2008（H20）年度 東京大学　理科前期　入学試験　物理解説

第１問

Ⅰ

Ｃの箱の運動方程式は

$$F = ma = -kx \quad (1)$$

箱が行う単振動の式，速度，加速度は

$$x = -L\cos\omega t \;,\quad v = L\omega\sin\omega t \;,\quad a = L\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x \quad (2)$$

ここでωは角振動数で，$\dfrac{\omega}{2\pi} = f = \dfrac{1}{T_s} = \dfrac{1}{4T}$　　(3)

ここで f は単振動の振動数，T_s は周期である。この振動では$T_s = 4T$ である。

(1)，(2)，(3)から$k = m\omega^2 = \dfrac{m\pi^2}{4T^2}$　　（答）

Ⅱ

Ａの場合

等加速度運動であるから，図１のように速度$v(t)$は直線的に増加し，移動距離はこの速度直線と時間軸との間の三角形の面積となる。したがって

$\dfrac{T\,v(T)}{2} = L$　であるから，$v(T) = \dfrac{2L}{T}$　　（答）

速度直線の傾き（加速度に相当）は$\dfrac{v(T)}{T} = \dfrac{2L}{T^2}$だから，$v(t) = \dfrac{2L}{T^2}t$　　（答）

Ｂの場合

図２のように速度$v(t)$は初めは直線的に増加し，$\dfrac{L}{2}$移動した時刻T_1から一定の速度となる。移動距離はこの速度直線と時間軸の間の面積となる。したがって

$$\frac{v(T)\,T_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (4)$$

$$(T - T_1)\,v(T) = \frac{L}{2} \quad (5)$$

(4)，(5)から$v(T) = \dfrac{3L}{2T}$　　（答）

同様に$T_1 = \dfrac{2T}{3}$と求まり，速度直線の傾きは$\dfrac{v(T)}{T_1} = \dfrac{9L}{4T^2}$となるので，

時刻　$0 \le t \le \dfrac{2T}{3}$　では　$v(t) = \dfrac{9L}{4T^2}t$

時刻　$\dfrac{2T}{3} < t \le T$　では　$v(t) = \dfrac{3L}{2T}$

したがって，グラフは図２のようになる。

Ｃの場合

$v(t)=L\omega\sin\omega t=\dfrac{L\pi}{2T}\sin\dfrac{\pi}{2T}t$　となるので，$t=T$ では

$v(T)=\dfrac{L\pi}{2T}$　　（答）

グラフは図３のようになる。

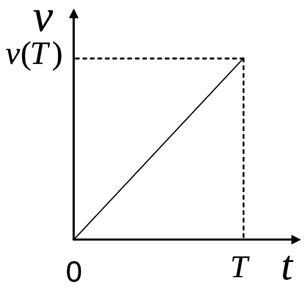

図 1

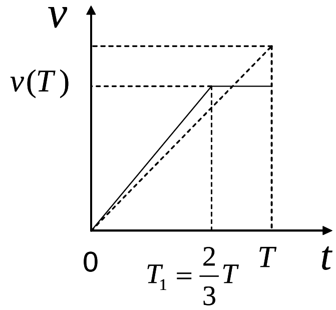

図 2

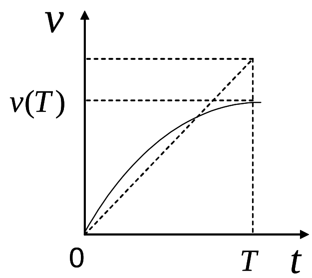

図 3

Ⅲ

摩擦のない滑らかな面上を箱は移動するので，エネルギーの摩擦損失は考慮しなくて良い。すると，箱にした仕事は箱の運動エネルギーに変換されていることになる。

Ａの場合

箱にした仕事 ＝ 箱の運動エネルギー ＝ $\dfrac{1}{2}mv^2(T)=2m\left(\dfrac{L}{T}\right)^2$　　（答）

Ｂの場合

箱にした仕事 ＝ 箱の運動エネルギー ＝ $\dfrac{1}{2}mv^2(T)=\dfrac{9}{8}m\left(\dfrac{L}{T}\right)^2$　　（答）

Ｃの場合

箱にした仕事 ＝ 箱の運動エネルギー ＝ $\dfrac{1}{2}mv^2(T)=\dfrac{\pi^2}{8}m\left(\dfrac{L}{T}\right)^2$　　（答）

以上から，最も仕事が少ないのはＢ　　（答）

Ⅳ

$v(t)$ 曲線と時間軸の間の面積 $S(T)$ が箱の移動距離 L に等しい。一方箱にした仕事は箱が得た運動エネルギー $\dfrac{1}{2}mv^2(T)$ に等しい。そこで図４において、$S(T)$ が一定の条件で，$v(T)$ を最小にする $v(t)$ 曲線が求める解である。

この $v(t)$ 曲線の最大傾斜が最大の加速度で最大の力に対応する。すると $v(t)$ 曲線を最大加速に相当する直線（すなわち等加速度運動）にし，ある速度に達したら加速をやめて等速運動にする

と $v(T)$ を小さくできることが，図４から理解される。つまりできるだけ短い時間で最大速度にして，その後はその速度で移動することが最も箱に対する仕事が小さい。すなわちＢのような場合である。

そこで距離 x まで最大の力で加速し，その後等速運動で距離 L まで移動させる条件で $v(T)$ が最小になる場合を求める。距離 x の移動時間を T_x とすると，以下の式が成立する。

$$0 \le t \le T_x \quad \text{で} \quad v(t) = \frac{F_0}{m} t \qquad (6)$$

$$T_x \le t \le T \quad \text{で} \quad v(t) = \frac{F_0}{m} T_x \qquad (7)$$

であるから

$$v(T) = v(T_x) = \frac{F_0}{m} T_x \qquad (8)$$

$$\frac{v(T) T_x}{2} = \frac{F_0}{2m} {T_x}^2 = x \qquad (9)$$

$$(T - T_x) v(T) = \frac{(T - T_x) F_0 T_x}{m} = L - x \qquad (10)$$

(9)，(10)を解くと

$$T_x = T - \sqrt{T^2 - \frac{2mL}{F_0}}$$ となり，箱にする仕事は

$$\frac{1}{2} m v^2(T) = \frac{{F_0}^2}{2m} \left(T - \sqrt{T^2 - \frac{2mL}{F_0}} \right)^2 \qquad \text{（答）}$$

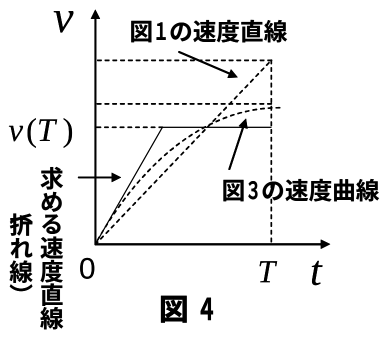

図 4

＜解説＞

良く工夫された力学の問題である。ある距離を同じ時間で移動する条件で，異なる三つの運動方法を設定し，最も仕事の少ない方法を考えさせる。電車や車の合理的な加速制御と関係するかも知れない。

Ｉでは，ばね定数と単振動の周波数との関係を記憶していれば解ける。もし記憶していないとし

ても，単振動の加速度から求めることができることを理解していれば解ける。ここでは，T が $\dfrac{1}{4}$ 周期であることに注意する。

Ⅱでは、速度と時間の関係すなわち速度曲線と時間軸の間の面積が移動距離に等しいことを理解している必要がある。Ａの等加速度運動の場合，速度は時間に関して直線的に増加する。Ｂでは中点まで速度は直線的に増加し，以降は中点における速度となる。Ｃでは移動距離 L でばねは自然長になるので，速度曲線は初速 0 で時刻 T で最大速度となる正弦波になる。なお図２，３には破線で図１の速度直線を描いて，図１との比較ができるようになっている。いずれも速度曲線と時間軸が囲む面積，移動距離が同じになることが分る。

Ⅲでは箱になした仕事は箱の運動エネルギーに変換されていることを理解する。したがってⅡを踏まえて，最小の仕事を求めるには箱の運動エネルギーを比較すればよい。

別の考え方として，仕事を（力×力の方向への移動距離）として求めて比較することも良い。するとＡでは,

$$\text{仕事} = \text{力}\times\text{距離} = m\frac{2L}{T^2}\times L = 2m\left(\frac{L}{T}\right)^2$$

Ｂでは，等速運動では力が働かず仕事をしていないので,

$$\text{仕事} = \text{力}\times\text{距離} = m\frac{9L}{4T^2}\times\frac{L}{2} = \frac{9m}{8}\left(\frac{L}{T}\right)^2$$

Ｃではばねの力が初期に最大値 kL で，自然長で 0 になるようなばねの変位に比例した力が働くわけだから,

$$\text{仕事} = \frac{kL^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{m\pi^2}{4T^2}\right)L^2 = \frac{\pi^2}{8}m\left(\frac{L}{T}\right)^2$$

となる。自然長ではばねの弾性エネルギーが 0 になるので，仕事は初期のばねの弾性エネルギーに等しい（つまりばねの弾性エネルギーが箱の運動エネルギーに変換される)。

Ⅳでは，Ⅰ～Ⅲを踏まえて，問題の意図を的確に捉える。時刻 T までの移動距離 L の条件下で，運動エネルギー最小，すなわち速度 $v(T)$ が最小の場合を求めることに相当する。Ａ，Ｂ，Ｃの比較ではＢの場合が最小の仕事であることが結果を暗示している。

最小の仕事，すなわち速度が最小となるのは，どのような場合かを考えるのに，Ⅱで描いた速度曲線（速度と時間のグラフ）を利用することがポイント（このような連続問題では，前の解答を次の解答に利用できる場合が多い)。Ａの場合の速度直線と時間軸の間の三角形の面積が移動距離 L に相当するから，この面積と等しい面積になるような速度曲線を想定し、その中で $v(T)$ が最小になるものを求める。すると速度が曲線的に変化するよりも，曲線の最大勾配（最大の加速度，すなわち最大の力）で立ち上がる速度直線の方が同じ面積で $v(T)$ が小さくなることが分かる。つまりＢのような場合である。

そこで，等加速度の運動をする時間を変数とした式を立てて，解くことにより $v(T)$ を求めることができる。

第２問

Ｉ

（１）

ネオンランプが点灯するのはコンデンサーＡの両端電圧 $V_A = V_{on}$ のとき。このコンデンサー回路について以下の関係がある。

$$V_1 = V_A + V_B \qquad (1)$$

$$C_A V_A = C_B V_B \qquad (2)$$

ここで，V_A, V_B はコンデンサーの両端電圧。これを解くと

$$V_1 = V_A + \frac{C_A}{C_B} V_A = \left(\frac{C_A + C_B}{C_B} \right) V_{on} \qquad \text{（答）}$$

（２）

ネオンランプの点灯直前にそれぞれのコンデンサーに蓄積された静電エネルギーは

$$W_A = \frac{1}{2} C_A {V_A}^2 = \frac{1}{2} C_A {V_{on}}^2, \quad W_B = \frac{1}{2} C_B {V_B}^2 = \frac{1}{2} C_B (V_1 - V_{on})^2 = \frac{{C_A}^2 {V_{on}}^2}{2C_B}$$

消灯直後の静電エネルギーは，コンデンサーＡの両端電圧が V_{off}，Ｂの電圧が $V_1 - V_{off}$ だから

$$W'_A = \frac{1}{2} C_A {V'_A}^2 = \frac{1}{2} C_A {V_{off}}^2, \qquad W'_B = \frac{1}{2} C_B {V'_B}^2 = \frac{C_B (V_1 - V_{off})^2}{2},$$

したがって，ネオンランプの点灯直前と消灯直後のコンデンサーの静電エネルギーの変化は

$$\Delta W_A = W'_A - W_A = -\frac{C_A}{2} ({V_{on}}^2 - {V_{off}}^2) \qquad \text{（答）}$$

$$\Delta W_B = W'_B - W_B = \frac{1}{2C_B} \left[\left\{ (C_A + C_B) V_{on} - C_B V_{off} \right\}^2 - {C_A}^2 {V_{on}}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} C_B (V_{on} - V_{off})^2 + C_A V_{on} (V_{on} - V_{off}) \qquad \text{（答）}$$

（３）

まずネオンランプが点灯してから消灯するまでにコンデンサーＢに蓄えられた電荷を求める。ネオンランプの点灯直前の電荷は

$$Q_{Bon} = C_B (V_1 - V_{on})$$

消灯直後の電荷は

$$Q_{Boff} = C_B (V_1 - V_{off})$$

したがって，コンデンサーＢに蓄えられた電荷は

$$Q_{Boff} - Q_{Bon} = C_B(V_{on} - V_{off})$$

この電荷が起電力V_1によって電源内で運ばれたのだから，電源が供給したエネルギーは

$$W_E = C_B(V_{on} - V_{off})V_1 = (C_A + C_B)(V_{on} - V_{off})V_{on} \qquad \text{（答）}$$

（４）

（点灯から消灯までにネオンランプによって失われたエネルギー）

＝（点灯直前のコンデンサーＡ，Ｂに蓄えられていたエネルギー）＋（電源が供給したエネルギー）－（消灯直後のコンデンサーＡ，Ｂに蓄えられていたエネルギー）

そこで（２），（３）の結果を利用すれば

$$W_N = W_E - \Delta W_A - \Delta W_B = (C_A + C_B)(V_{on} - V_{off})V_{on} + \frac{C_A}{2}(V_{on}{}^2 - V_{off}{}^2) - \frac{C_B}{2}(V_{on} - V_{off})^2$$

$$- C_A V_{on}(V_{on} - V_{off}) = C_B(V_{on} - V_{off})V_{on} - \frac{C_B}{2}(V_{on} - V_{off})^2 + \frac{C_A}{2}(V_{on}{}^2 - V_{off}{}^2)$$

$$= \frac{C_B}{2}(V_{on} - V_{off})(V_{on} + V_{off}) + \frac{C_A}{2}(V_{on}{}^2 - V_{off}{}^2) = \frac{1}{2}(C_A + C_B)(V_{on}{}^2 - V_{off}{}^2)$$

（答）

Ⅱ

（１）

図２－３のコンデンサー回路について，以下の関係がある。

$$V_A + V_B = V, \quad Q_A = C_A V_A, \quad Q_B = C_B V_B, \quad Q_B - Q_A = Q$$

これを解くと

$$V_A = \frac{C_B V - Q}{C_A + C_B} \qquad \text{（答）}$$

（２）

（１）の結果を利用すると，コンデンサーＡの消灯直後および再び点灯する直前の電圧について，下の式が成立する。

$$V_{off} = \frac{C_B V_1 - Q}{C_A + C_B}, \qquad V_{on} = \frac{C_B V_2 - Q}{C_A + C_B}$$

$$V_{on} - V_{off} = \frac{C_B(V_2 - V_1)}{C_A + C_B}$$ となるので，$$V_2 = \frac{(C_A + C_B)(V_{on} - V_{off})}{C_B} + V_1$$

Ⅰ（１）の結果を利用すると

$$V_2 = \frac{(C_A + C_B)(V_{on} - V_{off})}{C_B} + \frac{(C_A + C_B)V_{on}}{C_B} = \frac{(C_A + C_B)(2V_{on} - V_{off})}{C_B} \qquad \text{（答）}$$

＜解説＞

コンデンサー回路にネオンランプという放電管が加わった回路に関する問題である。放電管についての知識がなくても，必要な特性についての説明がなされているから，題意を把握すれば解ける。

放電管は一般に，ガラス管に気体と電極を封入し、電極間に電圧を印加して電子を加速して気体分子（あるいは原子）に衝突させて，気体を電離して（気体分子を電子とイオンに分離する）電流を流す（放電）ものである。電子が次々に気体分子と衝突して分子を電子とイオンに電離しながら，両者が電極間を電流として流れていく。この間に励起された分子（あるいは原子）が元へ戻ったり，電離した電子とイオンが再結合する際に光が放出される。この光が照明や電飾等に利用される。自然界でみられる雷も放電現象であるから，巨大な放電管といえるかも知れない。

放電管には封入する気体種や電極材料等によっていろいろな種類があるが，最も身近にある放電管は蛍光灯である。また主としてネオンガスを封入して電飾，広告（ネオンサイン），表示等に利用されるネオン管が知られている。ネオンランプも主としてネオンガスを封入したものだが，ネオン管よりはるかに小型のランプでオレンジ色に発光し，様々な装置の電気系統の状態表示などに利用される。

こうした放電管は問題にもあるように，電極間の電圧がある値（点灯電圧：放電開始電圧）にならないと放電しない。放電中の電圧を下げていくとある電圧で消灯（放電停止）する。そこで点灯，消灯を制御するために，コンデンサーと組み合わせた回路が利用される。

Ｉ（1）

ネオンランプの容量は無視して良いこと、ネオンランプにはまだ電流が流れてないことから，ネオンランプ点灯直前のコンデンサーの直列接続のみの回路として考えれば良い。

（2）

コンデンサーＡ，Ｂの両端の電圧を点灯直前，消灯直後について求めて，それぞれの静電エネルギーを求める。コンデンサーに蓄積された静電エネルギーの公式は教科書に記載されており，これを覚えておかないといけない。

（3）

問題文をしっかり読んで、題意を読み込むこと。そうすれば、自ずと解答にいたる思考のプロセスをたどることができる。もし問題文が単に「ネオンランプが点灯してから消灯するまでの間に電源が供給したエネルギーW_Eを求めよ」ならば，解答は容易ではない。

（ネオンランプが点灯してから消灯するまでの間に電源が運んだ電荷の量）

＝（コンデンサーＢに新たに蓄えられた電荷の量）

という事実の記述が解答を助けてくれる。この事実はどのようにして導かれるのか。以下のように考えると良い。

- ネオンランプが点灯すると，コンデンサーＡに蓄えられていた電荷がネオンランプの電流となって放電する。
- するとコンデンサーＡの両端の電圧が低下し、ネオンランプの消灯電圧まで下がる。
- しかし電源電圧は変化しないので、コンデンサーＢの両端電圧が上昇する。
- するとコンデンサーＢに蓄えられた電荷が増加する。この電荷は電源が運んだ電荷である。
- ネオンランプの電流はコンデンサーＡの電荷によるものだから、電源が運んだ電荷には含まれない。

第３問

Ｉ

（1）

$p(z)$ が一定と見なせる厚さ Δz の十分薄い気柱を考える。すると気体の状態方程式として、

$p(z)S\Delta z = n'RT = S\Delta z c(z)RT$ が成立する。ここで n' は気柱の気体のモル数で,

$n' = S\Delta z c(z)$ だから

$p(z) = c(z)RT$　　（答）

（2）

気柱に対するつりあいの関係は以下のようである。

下方に働く力＝（気柱の上面に働く気体の圧力）＋（気柱に働く重力）

＝上方に働く力＝（気柱の下面に働く気体の圧力）

（気柱の上面に働く気体の圧力）＝ $p(z+\Delta z)S$

（気柱に働く重力）＝$\Delta z c(z) mgS$

（気柱の下面に働く気体の圧力）＝ $p(z)S$

したがって

$p(z+\Delta z)S + \Delta z c(z) mgS = p(z)S$　　（答）

（3）

（1）,（2）の結果から

$c(z+\Delta z)RT + \Delta z c(z) mg = c(z)RT$

$$c(z+\Delta z) - c(z) = \frac{-mg\Delta z c(z)}{RT} = -\alpha \Delta z c(z)$$

したがって

$$\alpha = \frac{mg}{RT}$$　　（答）

（4）

$$-0.1\times 10^{-2} = \frac{c(z+\Delta z) - c(z)}{c(z)} = -\alpha \Delta z$$ だから

$$\Delta z = \frac{1}{\alpha}\times 10^{-3} = \frac{RT}{mg}\times 10^{-3} = \frac{8.3\times 286}{1.3\times 9.8}\times 10\times 10^{-3} = 1.86 \ [\mathrm{m}]$$　　（答）

（5）

（1）の結果から $c(0) - c(L) = \dfrac{1}{RT}\{p(0) - p(L)\}$

$p(0)$ と $p(L)$ の差は気柱の重力によるものだから

$p(0) - p(L) = \dfrac{nmg}{S}$，したがって

$$c(0) - c(L) = \frac{1}{RT}\{p(0) - p(L)\} = \frac{nmg}{SRT}$$　　（答）

II

（1）

物体に働く重力と浮力とがつりあって静止している。

重力はMg，浮力は物体の体積に等しい体積の気体の重力だから$vc(z_0)mg$，したがって

$Mg = vc(z_0)mg$ だから，$c(z_0) = \dfrac{M}{vm}$　　（答）

（2）

$z > z_0$ だから，物体に働く重力より浮力の方が小さい。

物体に働く力F =（物体に働く重力）－（物体に働く浮力）

$$= Mg - vc(z)mg = Mg - vc(z_0 + \Delta z)mg = Mg - vc(z_0)mg + \alpha v\Delta z c(z_0)mg$$

$$= \alpha v\Delta z c(z_0)mg = \alpha\Delta z Mg$$　　（答）

働く力は鉛直下向きである。　　（答）

＜解説＞

重力を考慮した理想気体の状態方程式や浮力に関わる問題である。重力が作用して気体分子の密度は下方ほど高くなる。教科書の理想気体の扱いには重力を考慮した記述は見当たらないので，戸惑う者もいるかも知れない。文章をしっかり読んで題意を的確に把握し，思考を素直に展開すれば大きな困難なく解答できる。ただし随所に物理的な発想を必要とする。

Ⅰ（1）

教科書に載っている状態方程式は容器全体の気体に対するもので，容器内で気体の密度が変化している場合について言及していない。しかし容器内の気体の温度が均一なので，$p(z)$が一定とみなせる気体の部分領域においても同様の状態方程式が成立する。その領域に対して，状態方程式を考えれば良い。

（2）

気体分子が分布している中に気柱を考える，ということが分り難いかも知れない。仮想的に重さのない薄い膜で囲まれた気柱に対して，働く力を考えてつりあいの式を考えると良い。

（3）

（1），（2）の結果から容易に求めることができる。

（4）

関係式（＊）と（3）で求めたαに具体的な値を使って求めれば良い。

（5）

（1）の結果を利用することに加え，$p(0)$と$p(L)$の差が気柱の重力によるものだということに着目することが必要である。

一方関係式（＊）　$c(z+\Delta z) - c(z) = -\alpha\Delta z c(z)$　を使って以下のように考えることもできる。

$\dfrac{c(z+\Delta z) - c(z)}{\Delta z} = -\alpha\, c(z)$ なので

$\Delta z \to 0$ の極限を考えれば（＊）は$\dfrac{dc(z)}{dz} = -\alpha\, c(z)$，一方$c(z) = \displaystyle\int \frac{dc(z)}{dz} dz$だから

$$c(0)-c(L)=\int_L^0 \frac{dc(z)}{dz}dz=-\alpha\int_L^0 c(z)dz=\alpha\int_0^L c(z)dz$$

$c(z)$ は単位体積当たりのモル数だから $S\int_0^L c(z)dz$ は気柱中の気体のモル数 n に等しい。

したがって $c(0)-c(L)=\alpha\int_0^L c(z)dz=\dfrac{\alpha n}{S}=\dfrac{mgn}{SRT}$ を得る。

Ⅱ（１）

静止しているということは，物体に働く重力と浮力がつりあっているということ，浮力は気体の密度に関係することから，単位体積当たりのモル数と関係することに着眼する。

（２）

物体に働く力は重力と浮力の差であることに着眼すれば，容易に解ける。つりあいの位置より高い位置に置かれた物体は，気体の密度が上の方ほど小さいので浮力が重力より小さいから，つりあいの位置まで沈んでいく。

＜総評＞

いずれの問題の設定も，教科書等には出てこないものなので，戸惑うかも知れない。物理に対する理解と思考を問うために，良く工夫された問題である。しかし題意をつかめば，決して難しい思考を要求しているものではないことに気づくであろう。物理の基礎的な知識と思考を積み重ねていけば解ける。加えて難しい計算ではないが，多くの変数とその関係式を整理して，見通しの良い結果を得るような計算力が必要とされる。丁寧に取り組むことが必要である。

前問が次問の前提になるような一連の構成をとっているので，最初の問題の把握と解答が重要である。また後ろの問題によって，前の問題のヒントを掴むこともできるので，始めに全問に一通り目を通して，問題の全容を頭に入れておくことが良い。