# 2009（H21）年度　新潟大学　理系前期　入学試験　数学解説

2010年3月作成，2017年3月修正（教育･農学部$\boxed{1}$(2)，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$(3)）

## ＜理・医・歯・工学部＞

$\boxed{1}$　$a$を定数，$e$を自然対数の底とする。曲線 $C: y=xe^{-x}$と直線 $l: y=ax$は，$x \geqq 0$の範囲で，原点O以外の点P$(p,\ pe^{-p})$で交わる。このとき，次の問いに答えよ。

（1）$a$の範囲を求めよ。

曲線$C: y=xe^{-x}$と直線$l: y=ax$が交わるので，$xe^{-x}=ax$から，$x \fallingdotseq 0$では$a=e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$となるので，$1<e^x$だから，$0<a<1$　　（答）

（2）曲線$C$上のPにおける接線の傾きを$h(a)$とするとき，$h(a)$が最小となる$a$の値と，そのときの$h(a)$の値を求めよ。

原点O以外の交点は$xe^{-x}=ax$から，$x \fallingdotseq 0$では$a=e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$から，$x=p=-\log_e a$

$\dfrac{dy}{dx}=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$だから$x=p$における傾きは$h(a)=(1+\log_e a)a$

$\dfrac{dh(a)}{da}=(\log_e a)'a+(1+\log_e a)=1+1+\log_e a=0$とすると，$\log_e a=-2$だから$a=e^{-2}$

$a<e^{-2}$のとき$\dfrac{dh(a)}{da}<0$，$a>e^{-2}$のとき$\dfrac{dh(a)}{da}>0$だから，$a=e^{-2}$で$h(a)$は極小値をとる。唯一の極小値だから最小値でもあり，その値は

$h(e^{-2})=\{1+\log_e(e^{-2})\}(e^{-2})=-e^{-2}$　　（答）

（3）（2）で求めた$a$の値について，$0 \leqq x \leqq p$の範囲で，曲線Cと直線OPとで囲まれた図形の面積を求めよ。

$p=-\log_e a=2$

曲線Cと直線OPで囲まれた面積は図１に示すように

$\displaystyle\int_0^2 (xe^{-x}-ax)dx=\Big[-e^{-x}-xe^{-x}-ax\Big]_0^2$

$=\{(-e^{-2}-2e^{-2}-2a)-(-1)\}=1-5e^{-2}$　　（答）

ここで不定積分　$\displaystyle\int xe^{-x}dx$　を求めるために部分積分

$\displaystyle\int f(x)g'(x)dx=f(x)\int g'(x)dx-\int f'(x)g(x)dx$

を利用して$f(x)=x$，$g'(x)=e^{-x}$とすれば，

$x\displaystyle\int e^{-x}dx=-xe^{-x}$，$\displaystyle\int -e^{-x}dx=e^{-x}$だから，

$\displaystyle\int xe^{-x}dx=-e^{-x}-xe^{-x}$となる。

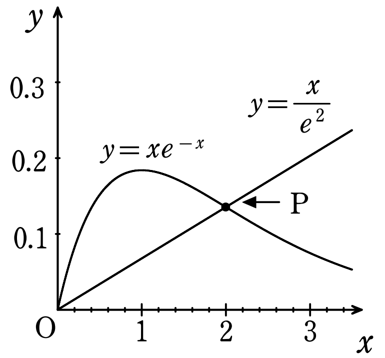

図１

＜解説＞

指数関数の微分積分の問題である。思考の過程は簡明だから，難問ではない。ここに出てくる導関数，不定積分，部分積分法などは全て頭に入っていなければならない。

$\boxed{2}$ $a$は実数で，行列$A=\begin{pmatrix}8 & -10\\4 & -6\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$とする。

$B$は2次の正方行列で，$AB=BA$，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-1 & a\\0 & 8\end{pmatrix}$を満たしている。

このとき，次の問いに答えよ。

（1）行列$P$の逆行列$P^{-1}$と行列$P^{-1}AP$を求めよ。

行列$X=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$の逆行列は$X^{-1}=\dfrac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$だから

$P=\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$の逆行列は$P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 5\end{pmatrix}$　（答）

行列$P^{-1}AP=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -10\\4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20 & -2\\8 & -2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}12 & 0\\0 & -6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$　（答）

（2）$a$の値と，行列Bを求めよ。

$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=(P^{-1}A)(PP^{-1})(BP)=P^{-1}ABP=\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & a\\0 & 8\end{pmatrix}$

$(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)=(P^{-1}B)(PP^{-1})(AP)=P^{-1}BAP=\begin{pmatrix}-1 & a\\0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$

$AB=BA$だから

$\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & a\\0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & a\\0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$だから

$\begin{pmatrix}-4 & 4a\\0 & -16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -2a\\0 & -16\end{pmatrix}$となって，$4a=-2a$だから，

$a=0$　（答）

$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$だから，

$B=P\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 5\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1+5\\-16 & 40\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-21 & 45\\-18 & 42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 15\\-6 & 14\end{pmatrix}$　（答）

（3）自然数$n$に対して，行列$(A+B)^n$を求めよ。

$P^{-1}(A+B)^nP=P^{-1}(A+B)PP^{-1}(A+B)P\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot P^{-1}(A+B)PP^{-1}(A+B)P$

$=\{P^{-1}(A+B)P\}^n=(P^{-1}AP+P^{-1}BP)^n$

であることを利用する。

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}$，$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$だから

$P^{-1}AP+P^{-1}BP=\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}$，これは対角行列だから

$$(P^{-1}AP+P^{-1}BP)^n=\begin{pmatrix}3&0\\0&6\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&6^n\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^n=PP^{-1}(A+B)^nPP^{-1}=P(P^{-1}AP+P^{-1}BP)P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&0\\0&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&5\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{3^n\begin{pmatrix}5&-5\\2&-2\end{pmatrix}+6^n\begin{pmatrix}-2&5\\-2&5\end{pmatrix}\right\}\qquad\text{（答）}$$

＜解説＞

行列に独特の演算と技法が必要なので，やや高度の問題といえよう。問題が誘導的に構成されているので，それを的確に利用すること。（1）逆行列の公式は覚えておくこと。そして行列の積の計算はていねいに。（2）ここで（1）の結果と$PP^{-1}=E$（単位行列）を上手く利用する。（3）$(A+B)$からその$n$乗を求めるのでは無理だ。一工夫必要なのだが、この問題に（1）（2）が誘導しているのだから，それらの結果を利用する。$(A+B)^2=(A+B)PP^{-1}(A+B)=(AP+BP)(P^{-1}A+P^{-1}B)$であること，$P^{-1}(A+B)P=P^{-1}AP+P^{-1}BP$であること，それぞれが対角行列であること，対角行列の積は要素がその積となること，などに気づく必要がある。

答を$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\cdot3^n-2\cdot6^n&-5\cdot3^n+5\cdot6^n\\2\cdot3^n-2\cdot6^n&-2\cdot3^n+5\cdot6^n\end{pmatrix}$と表記しても良い。

（3）の問題について別解を示す。

$A+B=\begin{pmatrix}8&-10\\4&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7&15\\-6&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\-2&8\end{pmatrix}=C$とおく。ケリー･ハミルトンの定理によれば，

$f(C)=C^2-(1+8)C+(1\times8+5\times2)E=C^2-9C+18E=0$，ただし$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$の単位行列

$f(x)=x^2-9x+18=(x-3)(x-6)$とおけば，

$F(x)=x^n=f(x)Q(x)+px+q=(x-3)(x-6)Q(x)+px+q$とおくことができる。

$F(3)=3^n=3p+q$，$F(6)=6^n=6p+q$となるから，

$3p=6^n-3^n$となって，$p=(2^n-1)3^{n-1}$，また$q=3^n-3p=(2-2^n)3^n$

$$F(C)=C^n=pC+q=\begin{pmatrix}p+q&5p\\-2p&8p+q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}3^n-\frac{2}{3}6^n&\frac{-5}{3}3^n+\frac{5}{3}6^n\\\frac{2}{3}3^n-\frac{2}{3}6^n&-\frac{2}{3}3^n+\frac{5}{3}6^n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}3^n\begin{pmatrix}5&-5\\2&-2\end{pmatrix}\quad+\frac{1}{3}6^n\begin{pmatrix}-2&5\\-2&5\end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$　$-\pi<\theta<\pi$とするとき，次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1=\cos\frac{\theta}{2}，\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ )$$

このとき，次の問いに答えよ。

（1）$a_n=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$　$(n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot)$ が成り立つことを証明せよ。

$a_n=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$　$(n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot)$ について

$n=1$のとき，すなわち$a_1$は題意によって成り立っている。

$n=k-1$で成り立つとすれば，$a_{k-1}=\cos\dfrac{\theta}{2^{k-1}}$ だから，

$$a_k=\sqrt{\frac{1+a_{k-1}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(2\times\frac{\theta}{2^k}\right)\right\}}$$

$=\sqrt{\cos^2\dfrac{\theta}{2^k}}=\cos\dfrac{\theta}{2^k}$，となって$n=k$でも成立する。ただし，ここでは三角関数の半角の公式を用いた。$n=1$で成り立ち，$n=k-1$で成り立つとき，$n=k$でも成り立つので数学的帰納法によって，$a_n=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$　$(n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot\cdot)$ が証明された。

（2）$2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}\times\cos\dfrac{\theta}{2}\times\cos\dfrac{\theta}{2^2}\times\cos\dfrac{\theta}{2^3}\times\cdot\cdot\times\cos\dfrac{\theta}{2^n}=\sin\theta$　$(n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$

が成り立つことを証明せよ。

$$2^n\sin\frac{\theta}{2^n}\times\cos\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2^2}\times\cos\frac{\theta}{2^3}\times\cdot\cdot\times\cos\frac{\theta}{2^n}=\sin\theta \qquad (1)$$

$(n=1,2,3,\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$

について，$n=1$のとき，$2\times\sin\dfrac{\theta}{2}\times\cos\dfrac{\theta}{2}=\sin\theta$ となって成立する。

$n=k-1$のとき成立するとすれば，すなわち

$$2^{k-1}\sin\frac{\theta}{2^{k-1}}\times\cos\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2^2}\times\cdot\cdot\cdot\times\cos\frac{\theta}{2^{k-1}}=\sin\theta \qquad (2)$$

2倍角の公式による$\sin\dfrac{\theta}{2^{k-1}}=\sin\left(2\times\dfrac{\theta}{2^k}\right)=2\sin\dfrac{\theta}{2^k}\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ を(2)に代入すれば，

$$2^k\sin\frac{\theta}{2^k}\times\cos\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2^2}\times\cos\frac{\theta}{2^3}\times\cdot\cdot\cdot\times\cos\frac{\theta}{2^{k-1}}\times\cos\frac{\theta}{2^k}=\sin\theta$$

となって$n=k$でも成立する。$n=1$で(1)が成立し，$n=k-1$で成立するとき，$n=k$でも成立するから，数学的帰納法によって，(1)が成り立つことが証明された。

（3）$b_n=a_1\times a_2\times a_3\times\cdot\cdot\cdot\times a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdot\cdot\cdot)$とおく。$\theta\fallingdotseq 0$のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$を$\theta$を用いて表せ。

$-\pi<\theta<\pi$かつ$\theta\fallingdotseq 0$だから$\sin\dfrac{\theta}{2^n}\fallingdotseq 0$なので，(1)を変形すれば

$$b_n=a_1\times a_2\times a_3\times\cdot\cdot\cdot\cdot\times a_n=\frac{\sin\theta}{2^n\times\sin\dfrac{\theta}{2^n}} \qquad (3)$$

$\delta_n=\dfrac{\theta}{2^n}$とおけば，$2^n=\dfrac{\theta}{\delta_n}$だから，$2^n\times\sin\dfrac{\theta}{2^n}=\dfrac{\theta}{\delta_n}\sin\delta_n$となる。したがって，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\sin\theta}{\frac{\theta\sin\delta_n}{\delta_n}} = \frac{\sin\theta}{\theta} \qquad \text{（答）}$$

ただし，ここで$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$だから，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\delta_n}{\delta_n}=1$となることを用いた。

＜解説＞

三角関数，半角ならびに2倍角の公式，数列，数学的帰納法などを基礎とする問題である。一見，複雑そうに見えるが，（１）～（３）まで誘導的に構成されているので，題意を的確に把握し，小問の関連に注意して取り組めば困難を感じることは少ないだろう。

（１）三角関数の半角の公式から導出される数列である。隣り合う項の関係によって定義される数列の一般項の解を証明する場合は，数学的帰納法が有効である。なぜなら，前項での成立を仮定すれば，次項は前項との関係によって容易に導かれる場合が多いからである。

（２）これも数学的帰納法による。2倍角の公式を用いる。（３）$b_n$が(2)式の変形によって導出されることを見ぬかなければならない。$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$はしばしば登場するから理解しておくこと。

$\boxed{4}$ $n$を3以上の整数とし，1から$n$までのすべて異なる整数が1つずつ書いてある$n$枚のカードをよく切って横1列に並べ，左から1番目のカードに書いてある数字を$x$とする。

左から3番目までのカードに書いてある数字の中で$x$が最大のとき，$x$が得点として与えられ，それ以外の場合の得点は0である。このとき，次の問いに答えよ。

（１）得点が$x$である確率を$p_x$とするとき，$p_x$を$n$と$x$を用いて表せ。

$x$が最大であるためには，2番目と3番目で$x$より小さい数字が出なければならない。

したがって，$x$が最大となる確率は

（1番目の数字が$x$である確率）×（2番目に$x$より小さい数が出る確率）×（3番目に$x$より小さい数が出る確率）である。

（1番目の数字が$x$である確率）$=\dfrac{1}{n}$

$x$より小さい数の枚数は$x-1$だから，（2番目に$x$より小さい数が出る確率）$=\dfrac{x-1}{n-1}$

3番目で$x$より小さい数の枚数は$x-2$だから，（3番目に$x$より小さい数の出る確率）$=\dfrac{x-2}{n-2}$

したがって，

$$p_x=\frac{(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)} \qquad \text{（答）}$$

（２）得点が0である確率を$p_0$とするとき，$p_0$の値を求めよ。

$x$が最大とならないときに，得点が0になるのだから，得点が0になる確率は$x$が最大とならない確率である。

$$p_0=1-\sum_{x=1}^{n}p_x=1-\sum_{x=1}^{n}\frac{(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{x=1}^{n}(x-1)(x-2)$$

$$\sum_{x=1}^{n}(x-1)(x-2)=\sum_{x=1}^{n}(x-1)(x-2)=\sum_{x=1}^{n}(x^2-3x+2)$$

$\displaystyle\sum_{x=1}^{n}x^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\displaystyle\sum_{x=1}^{n}x=\frac{n(n+1)}{2}$だから

$$\sum_{x=1}^{n}p_x=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{3n(n+1)}{2}+2n\right\}=\frac{1}{3}$$

したがって

$p_0=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ （答）

（３） 得点の期待値を$n$を用いて表せ。

得点が$x$となる確率は$p_x$だから，

$$\text{得点の期待値}=\sum_{x=1}^{n}xp_x=\sum_{x=1}^{n}\frac{x(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{x=1}^{n}x(x-1)(x-2)$$

ここで

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x(x-1)(x-2)&=\sum_{x=1}^{n}(x^3-3x^2+2x)=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-2(2n+1)+4\}=\frac{n(n+1)(n^2-3n+2)}{4}\\&=\frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4}\end{aligned}$$

，したがって

$\displaystyle\sum_{x=1}^{n}xp_x=\frac{n+1}{4}$ （答）

ただし，ここで

$\displaystyle\sum_{x=1}^{n}x^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$であることを用いた。

＜解説＞

確率統計の数学は，高校数学においては必ずしも体系的に取り扱われていない。しかし，理系文系を問わず，社会人として最も身近になる数学の一つが確率統計なのである。実社会の経験の少ない高校生には，まだ理解が及ばないかも知れないが，社会人となればいつかそのように思うことがあろう。

確率の問題の多くで必要となるのは，事象が発生する場合の数というものである。事象が発生するモデルを考える。そのモデルで，ある特定の事象が発生する確率とは，

$$\text{特定の事象が発生する確率}=\frac{\text{特定の事象が発生する場合の数}}{\text{全ての事象が発生する場合の数}}$$

分り易い例として，サイコロを振って出目の数（事象）を観測することをモデルとしよう。この場合の事象として，１から6までの6個の数字が出るので，全ての事象が発生する場合の数は6である。特定の事象の例として出目が3の倍数であることとしよう。3の倍数となるのは，出目が3と6であるから，場合の数は2である。したがって，

$$\text{出目が3の倍数となる確率}=\frac{\text{出目が3の倍数となる場合の数}}{\text{全ての目の出る場合の数}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ここで重要な前提として，場合が発生する可能性は等しいということである。サイコロでは，出目の数は均等の可能性をもつとされる（サイコロの作り方によっては，均等にならない場合がある）。もし可能性が均等でなければ，上式はそのことを考慮して修正しなければならない。

さて，この問題でも場合の数を求め，確率を求める必要がある。そして個々の場合の発生の可能性は均等であることを前提としている。（１）では1番目に数字$x$である確率は，$n$枚から1枚を選ぶのだから，数字$x$である場合の数は１，全ての事象（カードを1枚選ぶこと）の場合の数は$n$ということになる。2番目の数字は，$x$より小さくなければならないから，場合の数は$(x-1)$で，カードは1枚減っているので全ての事象の場合の数は$(n-1)$ということになる。3番目の数字は同様に，$x$より小さくなければならないから，場合の数は$(x-2)$で全ての事象の場合の数は$(n-2)$である。

（２）得点が0である確率と得点が$x$（$x$は1から$n$の任意の数）である確率の和は１である。カードを3枚並べるという行為において，1番目の数字$x$が最大である場合とそうでない場合という二つ以外の場合は存在しないから，得点は0か$x$のいずれかが必ず起きる（確率１とは、必ず起きるということ）。このように考えて求めようとすると，解答にも書いたように，$\sum_{x=1}^{n}(x-1)(x-2)$という数列の和を求める必要がある。これは，かなり難しい問題である。この数列の和の求め方や，$x^2$の数列の和の公式を覚えていれば良い。そうでなければ，どうするか。

$n$枚のカードを並べたとき，左から1番目と2番目と3番目のカードの数字のいずれが最大となるかには，なんら差異はない。すなわち同じ確率で起きる。したがって，1番目の数字$x$が最大となる確率は$\frac{1}{3}$である。すると得点が0となる確率は$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$と求まる。これで正答である。やや問題ありとすれば，「なんら差異はない」となぜいえるかである。しかし高校数学では，そこまで問われない。

場合の数という考え方を使って，この問題を回避する方法もある。3枚のカードの数を小さい順に$x_1$，$x_2$，$x_3$とする。これらの並べ方（場合の数）は$3!=6$通りである。1番左が$x_3$，すなわち$x=x_3$となる並べ方（場合の数）は2通りである。したがって得点が$x$となる確率は$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$である。したがって，得点が0となる確率は$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$と求まる。

（３）期待値は（発生する数×その確率）を全ての数について足したものである。すると，ここでは数列の和$\sum_{x=1}^{n}x(x-1)(x-2)=\sum_{x=1}^{n}(x^3-3x^2+2x)$を求めなければならない。$\sum_{x=1}^{n}x$は覚えていなくても直ぐに分る。$\sum_{x=1}^{n}x^2$と$\sum_{x=1}^{n}x^3$はどうであろうか。

連続する$m$個の自然数の積の和については，非常に巧妙な方法がある。ここでは$m=2,\ 3$の場合について紹介しておく。まず$a_k=(k-1)(k-2)$とすれば，$\sum_{k=1}^{n}a_k$を求めたい。

$3(k-1)(k-2)=k(k-1)(k-2)-(k-1)(k-2)(k-3)$，したがって

$(k-1)(k-2)=\frac{1}{3}\{k(k-1)(k-2)-(k-1)(k-2)(k-3)\}$となって，連続する2個の自然数の積は連続する3個の自然数の積の差分によって表される。すると，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\{k(k-1)(k-2)-(k-1)(k-2)(k-3)\}=\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

これを（２）に適用すれば，直ちに$\sum_{x=1}^{n}p_x=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{x=1}^{n}(x-1)(x-2)=\frac{1}{3}$が求まる。

次に$a_k=k(k-1)(k-2)$として$\sum_{k=1}^{n}a_k$を求めたい。

$4k(k-1)(k-2)=\{(k+1)k(k-1)(k-2)-k(k-1)(k-2)(k-3)\}$　となって，同様に連続する3個の自然数は連続する4個の自然数の差分によって表される。これを利用すれば

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^3-3k^2+2k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{(k+1)k(k-1)(k-2)-k(k-1)(k-2)(k-3)\}$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)$$　となり，これを

$$\sum_{x=1}^{n} xp_x=\sum_{x=1}^{n}\frac{x(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{x=1}^{n}x(x-1)(x-2)$$　に適用すれば，直ちに

$\displaystyle\sum_{x=1}^{n} xp_x=\frac{n+1}{4}$ を得る。

ここでは$m=2,\ 3$の場合について説明したが，一般に$m$個の連続する自然数の積は$(m+1)$個の連続する自然数の積の差分によって表される。ということは，$m$個の連続する自然数の積を要素とする数列の和は，要素の数の$(m+1)$次の多項式で表せるということである。このことから，$\displaystyle\sum_{x=1}^{n} x^2$は$n$の3次の多項式，$\displaystyle\sum_{x=1}^{n} x^3$は$n$の4次の多項式で表されることが分る。一般に$\displaystyle\sum_{x=1}^{n} x^m$は$n$の$(m+1)$次の多項式で表されるということになる。

$\boxed{5}$

点A $(0,\ a)$を中心とする円と，曲線$y=\dfrac{1}{x}$　$(x>0)$は1点B$\left(b, \dfrac{1}{b}\right)$のみを共有する。このとき，次の問いに答えよ。

（1）$a$を$b$を用いて表せ。

円の方程式が$y=\dfrac{1}{x}$と1点のみを共有するということは，図２のように，両者が接触するということであり，$\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$が接点である。$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{x^2}$だから，点Bにおける傾きと円の中心Aと点Bを結ぶ直線ABとが直交するから，

$$\frac{\frac{1}{b}-a}{b-0}\times\frac{-1}{b^2}=\frac{ab-1}{b^4}=-1$$，したがって

$$a=\frac{(1-b^4)}{b}$$　　（答）

なお円の方程式は

$$x^2+(y-a)^2=b^2+b^6$$

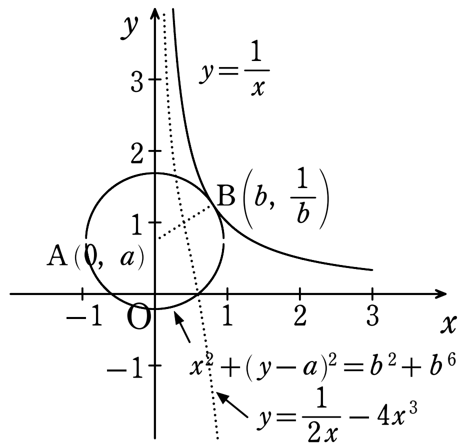

図２

（2）

線分ABの中点Mの座標を$(x_m,\ y_m)$とすれば，

$$x_m=\frac{b}{2},\quad y_m=\frac{a+\frac{1}{b}}{2}=\frac{1}{b}-\frac{b^3}{2}$$，ただし，$b>0$だから$x_m>0$。したがって中点の軌跡の式は，両式から$b$を消去して

$y_m=\dfrac{1}{2x_m}-4x_m{}^3$　さらに座標$(x_m,\ y_m)$を一般座標$(x,\ y)$に変更して，軌跡は

曲線$y=\dfrac{1}{2x}-4x^3$の　$x>0$の部分　　（答）

＜解説＞

円と曲線が1点のみ共有するということは，両者が接触するということであり，その1点が接点であることに気づくこと。円と曲線の方程式から根を求めるような方法で考えると，ややこしくなる。

＜総評＞

$\boxed{1}$は指数関数，対数関数の微分積分の問題である。難しくはないが，いろいろな要素が絡んだ良問である。受験生の基礎的な数学力を問うことができる。$\boxed{2}$行列の独特の演算や技法が必要で（3）は難しいが（1）（2）は着実にできるようでありたい。$\boxed{3}$は三角関数の半角の公式，倍角の公式を用いる数列に関する問題で，帰納法による証明や極限など数学思考力を必要とする良問である。$\boxed{4}$確率の問題としては難しくないが，計算の過程で$x^2$や$x^3$の数列の和を扱う必要があり，計算の難しさが伴う。（1）（2）は解けるようにしたい。$\boxed{5}$は着眼が必要だが難しくはないので，正解したい。

## ＜教育・農学部＞

$\boxed{1}$　$2^a=x-5$，$2^b=x-6$のとき，次の問いに答よ。

（1）$a+b$を$x$を用いて表せ。

$2^a\times2^b=2^{a+b}=(x-5)(x-6)$だから，

$\log_2 2^{a+b}=a+b=\log_2\{(x-5)(x-6)\}$　　（答）

（2）$a+b=f(x)$とするとき，不等式$f(x)<\log_4 36$を解け。

$\log_2\{(x-5)(x-6)\}<\log_4 36=\dfrac{\log_2 36}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 6^2}{\log_2 2^2}=\log_2 6$，したがって

$(x-5)(x-6)<6$だから，$x^2-11x+24=(x-3)(x-8)<0$となって，$3<x<8$

一方 $2^b=x-6>0$，したがって $6<x<8$　（答）

＜解説＞

対数を用いることに気づくこと。指数と対数演算の基礎知識を問う問題である。

$\boxed{2}$　定点A$(0,\ 2)$と曲線$y=f(x)$上の点P$(x,\ f(x))$がある。点Aと点Pの距離をAPと表すとき，すべての$x$に対して，AP$=f(x)$が成り立っているとする。このとき，次の問いに答えよ。

（1）関数$y=f(x)$を求めよ。

AP$=\sqrt{x^2+(f(x)-2)^2}=f(x)$

$x^2+(f(x)-2)^2=(f(x))^2$，$4f(x)=x^2+4$，したがって

$y=f(x)=\dfrac{x^2}{4}+1$　　（答）

（2）$a>0$とする。曲線$y=f(x)$上の点Q$(a,\ f(a))$における接線が原点を通るときの$a$の値を求めよ。

$f'(x)=\dfrac{x}{2}$，したがって点Qにおける曲線の接線は

$y-f(a)=\frac{a}{2}(x-a)$だから，原点を通るとすれば，$x=0$，$y=0$として，

$f(a)-\frac{a^2}{2}=1-\frac{a^2}{4}=0$，$a>0$だから，$a=2$　　（答）

（３）（２）で求めた$a$の値について，直線AQと曲線$y=f(x)$とで囲まれた図形の面積を求めよ。

直線AQの方程式は$y-2=\frac{f(a)-2}{a-0}(x-0)=\frac{2-2}{2}x=0$だから，$y=2$

したがって，

直線AQと曲線$y=f(x)$とで囲まれた図形の面積$=\int_{-2}^{2}\{2-f(x)\}dx=\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx$

$=\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2}=\frac{8}{3}$　　（答）

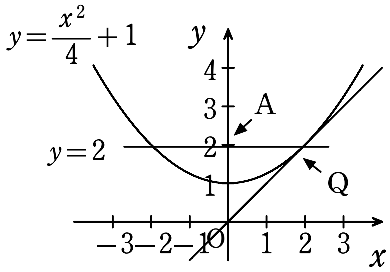

図３

<解説>

直線の方程式，微分，積分などの基礎を理解していること。

$\boxed{3}$ 数列$\{a_n\}$は

$$a_1=\frac{1}{6},\quad \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしている。また数列$\{b_n\}$は

$$b_1=8a_1a_2,\quad b_{n+1}-b_n=8a_{n+1}a_{n+2}\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしている。このとき，次の問いに答えよ。

（１）数列$\{a_n\}$の一般項$a_n$を$n$を用いて表せ。

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}=\sum_{k=1}^{n}2=2n$，したがって

$\frac{1}{a_{n+1}}=2n+\frac{1}{a_1}=2n+6=2(n+1)+4$，したがって

$a_n=\frac{1}{2n+4}$，これは$n=1$でも成立する。　　（答）

（２）数列$\{b_n\}$の一般項$b_n$を$n$を用いて表せ。

$b_1=8a_1a_2=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=2$，したがって$a_{n+1}a_n=\frac{1}{2}(a_n-a_{n+1})$

$\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1=8\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}a_{k+2}=4\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_{k+2})$

$=4(a_2-a_{n+2})=4\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2n+8}\right)=\frac{n}{2n+8}$，したがって

$$b_{n+1}=\frac{n}{2n+8}+b_1=\frac{(n+1)-1}{2(n+1)+6}+\frac{1}{6}$$，したがって

$$b_n=\frac{1}{6}+\frac{n-1}{2n+6}=\frac{8n}{6(2n+6)}=\frac{2n}{3(n+3)}$$，これは$n=1$でも成立する。　（答）

＜解説＞

数列の一般項を求める場合の方法，すなわち連続する２項の差分の和をとる方法には習熟していること。計算がやや煩瑣になるので，根気良くていねいに行うこと。

$\boxed{4}$ AB＝$n$，BC＝$n+1$，CA＝$n+2$である三角形ABCにおいて，$\tan C=\frac{4}{3}$のとき，次の問いに答えよ。

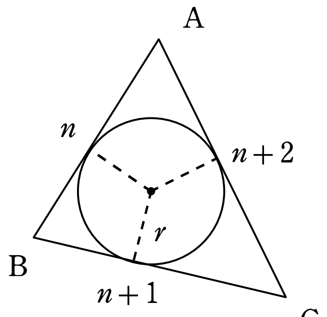

図４

（１）$\sin C$，$\cos C$の値を求めよ。

$$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 C}}{\cos C}=\frac{4}{3}$$，したがって

$16\cos^2 C=9-9\cos^2 C$，$\cos^2 C=\frac{9}{25}$，したがって

$\cos C=\frac{3}{5}$　（答）

$\sin C=\tan C\cos C=\frac{4}{5}$　（答）

（２）$n$の値を求めよ。

余弦定理によれば，$n^2=(n+1)^2+(n+2)^2-2(n+1)(n+2)\cos C$

$\cos C=\frac{3}{5}$を代入して整理すると，$n^2-12n-13=(n-13)(n+1)=0$，題意により$n>0$，

$n=13$　（答）

（３）三角形ABCの面積と内接円の半径を求めよ。

三角形ABCの面積＝$\frac{1}{2}$（BC×AC $\sin C$）＝$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\times\frac{4}{5}=84$

内接円の中心は三辺から等距離の点だから，半径を$r$とすれば，

三角形ABCの面積＝$\frac{r}{2}$×（AB＋BC＋AC）＝$\frac{r(n+n+1+n+2)}{2}=21r=84$

$r=4$　（答）

＜解説＞

三角関数の基礎的な問題である。素直に解いていけば良い。（３）では内接円の半径と三角形の面積を結びつける着眼が必要だ。

＜総評＞

どの問題も卓抜な着眼，難しい思考，複雑な技法などは必要とはしない。しっかりとした数学力があれば，ほぼ対応できる。$\boxed{1}$は指数，対数の基礎的な問題で，着実に正解したい。$\boxed{2}$微分積分の基礎的な問題である。難しくはないので，着実に正解したい。$\boxed{3}$数列の一般項を求める技法を素直に適用して行けば良い。$\boxed{4}$それにしても3辺が13，14，15という三角形は3辺長，正弦，余弦，面積，内接円半径などきれいな数値をとるのだろう。