

第1問

(1)

単振動の中心は,ばねの復元力が0となる位置である。ここでは重力が働いているので,重力とばねの弾性力がつりあっている位置で復元力が0となる。すなわち,このつりあいの位置からずれると復元力が働く。

単振動の中心を $x_0$ とすれば,重力とばねの弾性力がつりあうことから,

$$k(h - x_0) = 2mg$$

したがって

$$x_0 = h - \frac{2mg}{k} \quad (\text{答})$$

(2)

物体1に働く力 = (下方へ重力) + (下方へ物体2からの抗力)  
+ (ばねの自然長からの変位と逆方向にばねの弾性力)

したがって運動方程式は,力の正方向を上方にすると

$$ma_1 = -mg - N - k(x - h) \quad (\text{答})$$

物体2に働く力 = (下方へ重力) + (上方へ物体1からの抗力)

したがって運動方程式は

$$ma_2 = -mg + N \quad (\text{答})$$

(3)

分離の瞬間は抗力が0で,かつ物体1の下方への加速度が物体2の下方への加速度に等しくなると,さらに上回る直前である。すると

$$ma_1 = -mg - k(x - h) = ma_2 = -mg \text{ だから,}$$

$$x = h \quad (\text{答})$$

(4)

分離の瞬間の速度を $v_s$ とすると,エネルギー保存則により

$$mv_s^2 + 2mgh = \frac{1}{2}k(h - x_A)^2 + 2mgx_A$$

ただし $x=0$ での位置エネルギーを0としている。この式から

$$v_s = \sqrt{\frac{k(h - x_A)^2}{2m} - 2g(h - x_A)} = \sqrt{\frac{\{k(h - x_A) - 4mg\}(h - x_A)}{2m}} \quad (\text{答})$$

ここで, 内は正でなければならないので,  $k(h - x_A) - 4mg > 0$  だから

$$x_A < h - \frac{4mg}{k} \quad (\text{答})$$

(1)

物体1のみが単振動しているときの運動方程式は(2)によって、

$$ma_1 = -mg - k(x - h)$$

$t=0$ で単振動の-方向への最大変位となっていたので、 $x = A\cos\omega t + x_0$ とおく。ここで $A$ は単振動の振幅、 $\omega$ は角振動数、 $x_0$ は単振動の中心の $x$ 座標である。すると

$$-m\omega^2 A\cos\omega t = -mg - k(A\cos\omega t + x_0 - h)$$
となるから

$$m\omega^2 = k \text{ から } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ となって } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{答})$$

ただし単振動の中心は、 $x_0 = h - \frac{mg}{k}$ となる。

また分離から衝突までの時間が周期 $T$ に設定されているので、物体1は分離後1周期の単振動をした瞬間に物体2と衝突するので、衝突時の $x$ 座標は分離時の $x$ 座標に等しい。すなわち

$$x = h \quad (\text{答})$$

(2)

物体2は $x=h$ で物体1と分離後、重力の下で上方へ初速 $V$ の運動を行い、時間 $T$ 後に再び $x=h$ で物体1と衝突する。衝突時の速度はエネルギー保存則によって下方へ初速 $V$ に等しい。すると分離後の物体2の速度 $v_2$ について、分離後の経過時間を $t'$ とすれば

$$v_2 = V - gt' \text{ で、 } t' = T \text{ で } v_2 = -V \text{ だから}$$

$$V = \frac{gT}{2} = g\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{答})$$

(3)

質量の等しい物体1と2が反対向きで同じ大きさの速度で弾性衝突する。したがって、衝突後物体1と2は元と逆方向に同じ大きさの速度で運動する。すると両物体が再び接触するのは、周期 $T$ 後である。さらに衝突の $x$ は同じ位置となる。

$$T_2 = T_1 + T \quad (\text{答}) \quad x = h \quad (\text{答})$$

グラフは次ページに示す。

(4)

(4)で示した式で $v_s = V$ として $x_A$ について解く。すなわち二次方程式

$$(x_A - h)^2 + \frac{4mg}{k}(x_A - h) - \frac{2mV^2}{k} = 0 \text{ を解く。}$$

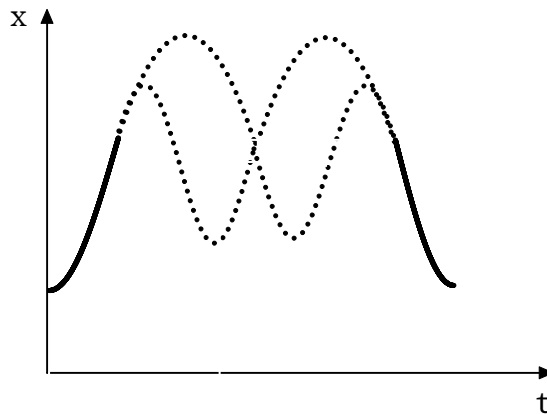
$$x_A - h = -\frac{2mg}{k} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4mg}{k}\right)^2 + \frac{8mV^2}{k}}$$

$$x_A = h - \frac{2mg}{k} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4mg}{k}\right)^2 + \frac{8mV^2}{k}}$$

(4)の $x_A$ に対する制限を満足するのは土のうち-の方である。さらに(2)の $V$ を代入

して

$$\begin{aligned}
 x_A &= h - \frac{2mg}{k} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{4mg}{k}\right)^2 + \frac{8m}{k} \left(\frac{g^2 \pi^2 m}{k}\right)} \\
 &= h - \frac{2mg}{k} - \frac{2mg}{k} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2}} \\
 &= h - \frac{2mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2}}\right) \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



(3) のグラフ (答)

< 解説 >

重力とばねの弾性力の作用の下での運動に関する問題で、単振動、等加速度運動、衝突などの基本的な力学現象を含むように設定されている。難解な問題ではないが、単純な設定ではないので、基本的な物理知識と思考力を必要とする。しかし問題の流れによって、思考の過程を正しく辿ることができるので、解答の方向を大きく逸脱することはないだろう。

(1)

重力とばねの弾性力が同時に働いている条件下での問題である。多くの教科書におけるばねの単振動の説明では、ばねは水平方向に置かれているので、重力は働かない。ばねにおもりを吊るして単振動させるという問題も教科書に掲載されている。単振動は変位に比例した復元力が働く場合に発生する。したがって単振動の中心は復元力が0になる位置、すなわちつりあいの位置である。

解答では重力と弾性力のつりあいの位置から単振動の中心を求めたが、別の考え方を説明する。物体1が達する最高位置を  $x_h$  とする。その位置で物体1の速度は0となり、かつ物体1と2は接しているのでエネルギー保存則によって、

$$\begin{aligned}
 &(\text{位置 } x_h \text{ でのばねの弾性エネルギー}) + (\text{位置 } x_h \text{ での物体 1 と 2 の位置エネルギー}) \\
 &= (\text{位置 } x_A \text{ でのばねの弾性エネルギー}) + (\text{位置 } x_A \text{ での物体 1 と 2 の位置エネルギー})
 \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{2} k(x_h - h)^2 + 2m x_h g = \frac{1}{2} k(h - x_A)^2 + 2m x_A g \quad (1)$$

ただしここで、 $x=0$ での位置エネルギーを0としている。単振動の中心は  $x_A$  と  $x_h$  の中点だから、

$\frac{x_A + x_h}{2}$  を求めれば良い。(1)を整理すると,

$$\frac{1}{2}k[(x_h - h)^2 - (h - x_A)^2] = \frac{1}{2}k(x_h - x_A)\{(x_h + x_A) - 2h\} = -2m(x_h - x_A)g \quad \text{となり}$$

$$\frac{x_h + x_A}{2} = h - \frac{2mg}{k} \quad (\text{答})$$

(2)

物体1と2が接している状態では両者の間に抗力が働いている。運動方程式における抗力は、両物体で符号が異なる(方向が逆となる)ことに注意する。

(3)

分離するという事は抗力が0となる瞬間であるから、(2)の運動方程式から分離の瞬間の位置を  $x = h$  と求めることは容易である。しかし、分離する理由について理解することが重要なので、ここで考えてみよう。

物体1にばねによる上方への弾性力が働いている間は、物体1と2は分離することはない。なぜなら、物体2に働く下方への重力による加速度よりも物体1に働く下方への加速度が小さいからである。しかし縮んでいたばねが伸び、自然長を超えると、重力に加えてばねの力が下方に働くようになり、その加速度は物体2の下方への加速度を上回る。すると、物体1の上方への速度が物体2のそれよりも小さくなって、両物体は分離する。このように考えれば、物体1がばねの自然長の位置に達した時が分離の瞬間となるから、 $x = h$ となる。

このような分離はいつでも起きるとは限らない。ばねが押し下げられた位置  $x_A$  から自然長に戻らなければならない。つりあいの位置と自然長の位置との差に相当する長さ以上にばねをつりあいの位置から押し下げないと、ばねは自然長の位置には達しない。

$x_A < h - \frac{4mg}{k} = \left(h - \frac{2mg}{k}\right) - \frac{2mg}{k} = x_0 - \frac{2mg}{k}$  だから、つりあいの位置  $x_0$  から  $\frac{2mg}{k}$  (つりあいの位置と自然長の位置との差に等しい) 以上押し下げることが必要ということである。

(4)

両物体が分離するばねの自然長の位置では、ばねの弾性エネルギーは0だから、物体の運動エネルギーと位置エネルギーを考慮すれば良い。これが初期位置  $x_A$  での弾性エネルギーと位置エネルギーの和に等しいことから分離の瞬間の速度を求めることができる。

$x_A$  に対する条件は、上記(1)で述べた単振動の最高位置  $x_h$  が自然長の位置  $h$  より高くなれば分離することから、 $x_h > h$  として求めることもできる。

(1)

物体1には重力が働いているが、ばねによる弾性力によって単振動するので、周期は重力の有無によって変化することはない。両物体が分離するのは自然長の位置だから、周期  $T$  後に衝突するのは、当然に同じ自然長の位置である。

(2)

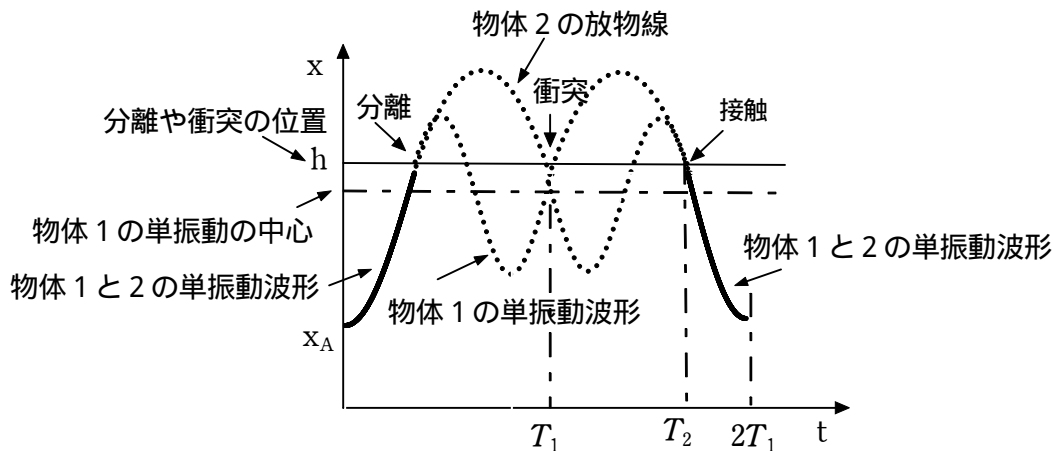
物体2は分離後、重力による等加速度運動をするので、上方へ運動して再び元の位置まで落ちてくる時間が周期  $T$  と等しいということになる。

(3)

はねかえり係数が1なので、同じ質量の物体1と2は衝突後、衝突前と同じ速さで逆方向へ運動する。すると物体1は元の単振動を衝突前と逆方向に行う。物体2は等加速度運動を衝突前と逆方向に行う。したがって両者は物体1の周期 $T$ 後に衝突したと同じ位置(ばねの自然長の位置、すなわち $x = h$ )で再び接触する。

グラフの概形であるが、ばねが自然長になるまでは物体1と2が合体した状態での単振動なので、正弦波形である。物体1と2が分離後は、物体1は単振動となるので正弦波形となる。物体2は重力の下での運動だから放物線となる。物体1と2の分離から衝突までの時間は単振動の周期だから、両者はばねの自然長の位置で衝突する。はねかえり係数が1だから、グラフは時刻 $T_1$ で折り返した形状になる。そして周期 $T$ 後に両者は接触して再び一体となった運動をする。それは $t=0$ からばねが自然長になるまでの波形を折り返した波形となる。

これらを考慮してグラフを描く。フリーハンドで描くのがから、正弦波形や放物線が少々歪んでいても差し支えない。ただし、放物線は重力の下での投げ上げ運動、正弦波形は単振動でおなじみだから、戸惑うことなく描いてほしい。解答では必要ないが、以上のことを説明した図を下に示す。



(4)

(4)で分離の瞬間の物体1の速度を求めた。この速度は物体2の速度でもある。この際の式から $x_A$ を求めれば良い。この式では $(x_A - h)$ の2次方程式になっているから、 $(x_A - h)$ について解けば良い。

第2問

(1)

質量 $m$ の物体の重力による落下運動の運動方程式  $ma = mg$  から、 $v = gt$ 、 $x = \frac{1}{2}gt^2 - h$

によって $x=0$ になるときの時刻 $t_1$ と速度 $v_1$ は(ただし、ここではEFの位置を $x=0$ とする)

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (\text{答}) \quad v_1 = \sqrt{2gh} \quad (\text{答})$$

(2)

EFの位置を0として、ABの位置を $x$ とすれば、 $0 \leq x \leq a$ においてコイル中を横切る磁束が増大するので、誘導起電力 $V$ が発生し、電流 $I$ が流れる。すなわち

$$V = -\frac{d}{dt} = -vbB, \quad I = \frac{V}{R} = -\frac{vbB}{R}$$

すると、電流が流れる導体ABが磁場により受ける力は $F_i = IBb = -\frac{vb^2B^2}{R}$ となる。

したがって、コイルに働く合力は、重力と磁場による力の和となり

$$F = mg - \frac{vb^2B^2}{R} \quad (\text{答})$$

(3)

$F$ が正であれば加速、負であれば減速となる。したがって

$$\text{加速するのは } v_1 < \frac{mgR}{b^2B^2} \quad (\text{答}) \quad \text{減速するのは } v_1 > \frac{mgR}{b^2B^2} \quad (\text{答})$$

(1)

$v_1 = \frac{mgR}{b^2B^2}$ のとき $F=0$ となって、等速落下運動となる。(1)の解答から

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \frac{mgR}{b^2B^2} \text{ だから,}$$

$$\text{ABとEFの距離 } h = \frac{m^2gR^2}{2b^4B^4} \quad (\text{答})$$

$$t_2 - t_1 = \frac{a}{v_1} = \frac{ab^2B^2}{mgR} \quad (\text{答})$$

(2)

コイルで消費される電力は

$$P = VI = I^2R = \left(\frac{v_1bB}{R}\right)^2 R = \left(\frac{mg}{bB}\right)^2 R \quad (\text{答})$$

熱として発生するエネルギーは

$$W = P(t_2 - t_1) = mga \quad (\text{答})$$

(3)

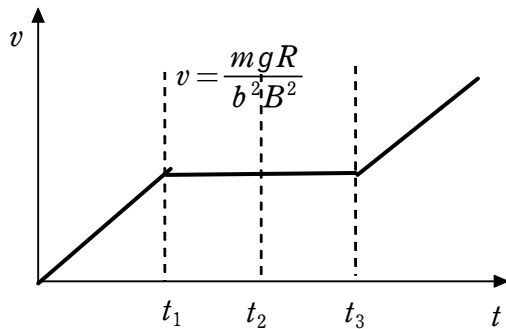
ABが磁場から脱してCDが磁場中に入る場合、すなわち $x \geq a$ では、導体CDに上方に同様な力が働くので、引き続きコイルは等速落下運動を続ける。したがって

$$t_3 - t_2 = \frac{a}{v_1} = \frac{ab^2B^2}{mgR} \quad (\text{答})$$

CDが磁場から脱すると、すなわち $x \geq 2a$ では、磁力による上方への力はなくなるので、コイルは初速 $v_1$ で重力による落下運動を行う。したがって

$$v = v_1 + g(t - t_3)$$

したがって速度と時間のグラフ（答）と時刻 $t_1, t_2, t_3$ における速さの式（答）は下記のようになる。



< 解説 >

教科書によく掲載される磁場中を移動するコイルに関する問題であるが、コイル移動を重力の作用によって行うという設定である。電磁誘導に加え重力の作用も含めた知識と思考を問う問題である。第1問と同様に、問題文と小問の流れが解答の思考のプロセスになっているので、電磁誘導と力学の基礎が的確であれば、大きな困難を感じないであろう。

(1) ~ (3) が「コイルの落下の運動方程式を立てて、磁場によって加速される場合と減速される場合の距離 $h$ の条件を求めよ」などという問題記述ならば、相当の困難を感じるだろう。

- (1) 重力による落下運動の基本問題だから、即答できなければならない。
- (2) 磁場による誘導電流に働く力と重力の合力である。落下に伴いコイルを横切る磁束が増大するので、その増大を妨げる向きにコイルのAB部分に力が働く。すなわち、磁束変化により誘導起電力が発生し、それによって回路に誘導電流が発生し、磁場によるローレンツ力が電流に作用する。これらの関係は教科書によく出てくる。そして重力による下向きの力と磁場による上向きの力の合力を求める。
- (3) 合力が正であれば、下方に加速される。負であれば下方に減速される。(2)の合力から求めれば良い。

(1) 等速度で落下するとは、加速も減速もしないということだから、(2)の合力が0ということである。そのような速度を(2)から求めて、(1)の結果を適用すれば良い。

(2) 電力は(電圧×電流)である。この場合、誘導起電力が抵抗 $R$ のコイルに流す電流として求める。この電力は回路の抵抗によって熱エネルギーに変換される。発生する熱エネルギーは電力に電力が作用している時間をかけたものである。

得られる $W = mga$ はコイルの位置エネルギーの減少に等しい。重力が磁場による上方への力に抗して作用した仕事とも表現できる。消費された熱エネルギーは重力による仕事に基づくことになり、エネルギー保存則を満足する。このように、得られた結果が物理的な妥当性をもつか、検証することが大事である。

(3) コイルのAB部が磁場から抜け出ると同時にCD部が磁場に入る。すると、コイルを横切る磁束

が減少するようになるので、それを妨げる向きすなわち上方に磁場の力が作用する。磁束の時間変化はABが磁場を横切る場合と同じだから、コイルに働く合力に変化はない。すなわち、コイルは磁場に入る時から抜け出るときまで、等速落下を続ける。CDが磁場を抜け出ると、重力のみの作用となるから、等加速度の落下運動となる。

このような考え方で、速度変化のグラフを描図すれば良い。上記の議論から、時刻 $t_1, t_2, t_3$ での速度は同一である。

### 第3問

つりあいの関係により、 $p_1 = \frac{m_1 g}{A}$ 、 $p_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{A}$  だから

$$m_1 = \frac{p_1 A}{g} \quad (\text{答}) \quad m_2 = \frac{(p_2 - p_1)A}{g} \quad (\text{答})$$

水の体積は $nv_1 = Ad$ だから、

$$d = \frac{nv_1}{A} \quad (\text{答})$$

必要とする熱量は(定圧モル比熱)×(水の物質モル数)×(温度上昇)であるから、

$$Q_1 = (30 - 20)nc = 10nc \quad (\text{答})$$

当初の水の物質量は $n$ モルだったから、このときの水の物質量は $(n - x)$ モル。

すると水の体積は $(n - x)v_2$ 、水蒸気の体積は $xv_3$ で、両者の和がシリンダーの体積だから

$$(n - x)v_2 + xv_3 = AL, \text{これを解いて}$$

$$x = \frac{AL - nv_2}{v_3 - v_2} \quad (\text{答})$$

$x$ モルの水が水蒸気になったのだから、必要とした蒸発熱は $xq$ [J]。

これは、ヒーターから発生するジュール熱によって与えられた。

$$\text{したがって、} Q_2 = qx = \frac{(AL - nv_2)q}{v_3 - v_2} \quad (\text{答})$$

(1)

水と水蒸気とが共存しながら温度が下がっていくから、図3 - 1の共存線に沿って圧力はB点の $p_2$ からC点の圧力 $p_1$ まで低下する。 $p_1$ はピストンの質量による圧力と等しいので、圧力 $p_1$ のまま一定となる。



( 2 )

ピストンの質量による圧力は $p_1$ なので、図3 - 1の共存線に沿ってB点からC点までの温度低下の間、ピストンはストッパーに接したまま停止している。C点に達するとピストンの圧力 $p_1$ と水蒸気の圧力が釣りあいつつ、温度 $20$  のまま水蒸気が水へと変化するのでピストンはゆっくりと下降していく。やがて水蒸気は全て水に変わり、ピストンは水面に接する。そのまま水温は $18$  に達する。

< 解説 >

温度と圧力による水の状態変化（液体である水と気体である水蒸気）に関わる問題である。問題設定や実験装置などの記述が長文なので、的確に読み込み理解することが必要である。基本的な物理的知識と思考力を備えていれば全体として平易である。6つの連続する問題からなるが、問題を解きながら物理過程を追うことができるので、前問との関連を考えながら解いていくことが大切である。

身構えていると、拍子抜けするかも知れないほど単純な問題である。ケアレスミスをしないこと。

と同様である。

これも と同様である。ピストンにおもりを乗せたままなので、定圧状態で、水の温度を上昇させることであることを理解すること。

定圧状態で加熱を続けると、定温のまま、水は少しずつ水蒸気に変化していくという水蒸気発生過程を理解していること。やかんや鍋などでお湯を沸騰させると、大気圧の下では水温 $100$  のまま、水が水蒸気になっていくという現象がそれである。

蒸発熱（ここでは $qx$ ）は水分子がばらばらに分かれる（水蒸気になる）ために必要なエネルギーと水蒸気が定圧で膨張するために必要なエネルギーの両方を含む。したがって、水蒸気がピストンとおもりを押し上げる仕事を加えてヒーターのジュール熱 $Q_2$ とすると、水蒸気が膨張するエネルギーを二重に含むことになるので、注意する。

( 1 )

おもりを横にずらしたということは、水蒸気に加わる圧力が $p_2$ からピストンの重量のみによる圧力 $p_1$ へと減少したことである。水と水蒸気が共存しながら、温度が下がっていくので、圧力は $p_2$ から徐々に低下していく。水蒸気の圧力が $p_1$ に達すると、ピストンの圧力とつりあうから、その圧力のまま水蒸気の凝縮が進行する。

( 2 )

水蒸気の圧力は $p_2$ でピストンを押し上げているから、ピストンはストッパーで停止したまま。冷却に従い、水蒸気の圧力が低下し $p_1$ になったとき、ピストンの圧力とつりあうからピストンは下降を始める。水蒸気は凝縮熱を奪われながら、水に凝縮していくので、水蒸気の体積減少分に応じてピストンはゆっ

くりと下降していく。この過程は図3 - 1のC点で進行する。温度20 のまま、やがて水蒸気はすべて水に変わるので、ピストンは水面に接する。温度が20 から下降して18 に達するまで、ピストンはそのまま水面に接している。

<総評>

第1問が力学、第2問が電磁気学、第3問が熱とエネルギー分野の問題であるが、問題の構成等は類似である。ある物理現象を引き起こす実験モデルを設定し、その現象の全体像を把握するように小問の連続で誘導していく。その誘導に従えば、必ずしもすべてを自ら構想することなく物理的思考の過程を辿ることができるから、有難い問題構成である。

とはいえ、なじみのない問題設定であるから、長文を丁寧に読み込んで題意を的確に把握することが必要である。そうすれば、決して複雑で難しい問題ではないことに気づくであろう。特に物理現象の全体像を頭の中に迅速に正しく描くことが、連続する小問に対応する上で有効だろう。そのためには、日ごろからいろいろな物理現象の因果関係を考える癖をつけておくと良いだろう。しかし多くの受験勉強に迫られて余裕のない者には、難しいことも知れない。少なくとも筆者の50年近く前の受験勉強ではそうだった。

そうならば、物理の教科書や問題集をしっかりと読み込んで、物理現象を左右する条件等のが違う場合に、現象がどのように変化するか、などできるだけ総合的に考察を加えるような勉学上の工夫をしてみると良いのではないか。すると1問でも数問を解くような効果が得られるだろう。

2010年1月

第3問 の修正にあたって（お詫び）

2022年6月、読者からのメールによって、第3問 の解答と解説に基本的な誤りのあることを知った。解説で注意した水蒸気が膨張することによる仕事を $Q_2$ に加えるという誤りであった。

10年以上にわたって誤ったまま掲載を続けてきたことは、長年にわたって読者に誤った物理を教えたことであり、慙愧に絶えない。心からお詫びします。どのくらいの人々に悪影響を与えたか、全く判断ができない（目立つことのないサイトなので、高々数10人くらいと想像する）。願わくは、読者が賢明にも誤りを見抜き、適切に対処されていることを。

2022年6月