

1

(30 点)

1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる. どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする. このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と, 3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ. ただし, 各並べかたにおいて, それぞれの数字は重複なく 1 度ずつ用いるものとする.

2

(35 点)

四面体 ABCD において \overrightarrow{CA} と \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{DA} と \overrightarrow{DB} , \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{CD} はそれぞれ垂直であるとする. このとき, 頂点 A, 頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ.

3

(35 点)

x を正の実数とする. 座標平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $P(x, x)$ をとり, $\triangle APB$ を考える. x の値が変化するとき, $\angle APB$ の最大値を求めよ.

4

(30 点)

数列 $\{a_n\}$ は、すべての正の整数 n に対して $0 \leq 3a_n \leq \sum_{k=1}^n a_k$ を満たしているとする。このとき、すべての n に対して $a_n = 0$ であることを示せ。

5

(35 点)

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし、曲線 $y = \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 、曲線 $y = a \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S : T = 3 : 1$ となるような a の値を求めよ。

6

(35 点)

座標空間内で、 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $E(1, 0, 1)$, $F(1, 1, 1)$, $G(0, 1, 1)$ を頂点にもつ立方体を考える。この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

問題は、このページで終わりである。