$\boxed{1}$

(35 点)

四面体ABCDにおいて $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ はそれぞれ垂直であるとする．このとき，頂点A，頂点Bおよび辺CDの中点Mの3点を通る平面は辺CDと直交することを示せ．

$\boxed{2}$

(35 点)

xを正の実数とする．座標平面上の3点A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$，P$(x,\ x)$をとり，△APBを考える．xの値が変化するとき，∠APBの最大値を求めよ．

$\boxed{3}$

(35 点)

aを正の実数とする．座標平面において曲線$y=\sin x\,(0 \leqq x \leqq \pi)$と$x$軸とで囲まれた図形の面積を$S$とし，曲線$y=\sin x\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，曲線$y=a\cos x\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$および$x$軸で囲まれた図形の面積を$T$とする．このとき$S:T=3:1$となるような$a$の値を求めよ．

4

(35 点)

$1 < a < 2$ とする．3辺の長さが $\sqrt{3}$, a, b である鋭角三角形の外接円の半径が1であるとする．このとき a を用いて b を表せ．

5

(30 点)

次の問に答えよ．

(1) n を正の整数，$a = 2^n$ とする．$3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ．

(2) m を正の偶数とする．$3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m = 2$ または $m = 4$ であることを示せ．

6

(30 点)

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる．各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする．どの箱にも1個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\log p_n}{n}$ を求めよ．

問題は，このページで終わりである．