2010（H22)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系甲）　教育学部（教育科学理系）、医学部（人間健康学科）
数学（理系乙）　総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
　　　　　　　　理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　　総合人間学部（文系、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（一般）

数学（理系甲）

$\boxed{1}$

1から5までの自然数を1列に並べる。どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする。このとき1番目と2番目と3番目の数の和と，3番目と4番目と5番目の数の和が等しくなる確率を求めよ。ただし，各並べかたにおいて，それぞれの数字は重複なく1度ずつ用いるものとする。

解答

3番目は共通だから，1番目と2番目の数の和が4番目と5番目の数の和に等しい確率を求めることになる。3番目の数を除くと，連続する2つの数字の組が2つ残ることが必要である。すると3番目の数になれるのは1，3，5の奇数である。

3番目の数が3の場合，1番目と2番目の数は1または5，4番目と5番目の数は2または4とすれば，場合の数は4通り。逆にして，1番目と2番目の数は2または4，4番目と5番目の数は1または5とすれば，場合の数は4通り。したがって，合わせて8通り。3番目の数が1と5の場合も同じだから，1番目と2番目の数の和が4番目と5番目の数の和に等しい場合の数は全部で，8×3通り。

一方，1から5までの自然数を重複なく1列に並べる場合の数は5!だから，
1番目と2番目と3番目の数の和と，3番目と4番目と5番目の数の和が等しくなる確率
＝1番目と2番目の数の和が4番目と5番目の数の和に等しい確率

$$=\frac{\text{1番目と2番目の数の和が4番目と5番目の数の和に等しい場合の数}}{\text{1から5までの自然数を重複なく1列に並べる場合の数}}$$

$$=\frac{3\times 8}{5!}=\frac{1}{5}$$　　（答）

＜解説＞

平易な確率の問題であるが着想が必要である。i番目の数をa_iとすれば，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2n+a_3=15$によって，3番目の数$a_i$が奇数であることが分る。3番目の数が3の場合，1番目と2番目の数の和が4番目と5番目の数の和に等しい場合の数は，

1番目が1の場合：2番目が5で，4番目と5番目が2または4であるから，2通り
1番目が2の場合：2番目が4で，4番目と5番目が1または5であるから，2通り
1番目が4の場合：2番目が2で，4番目と5番目が1または5であるから，2通り
1番目が5の場合：2番目が1で，4番目と5番目が2または4であるから，2通り

全部で8通り。

$\boxed{2}$

四面体ABCDにおいて$\overrightarrow{CA}$と$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DA}$と$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{CD}$はそれぞれ垂直であるとする。このとき，頂点A，頂点Bおよび辺CDの中点Mの3点を通る平面は辺CDと直交することを示せ。

解答

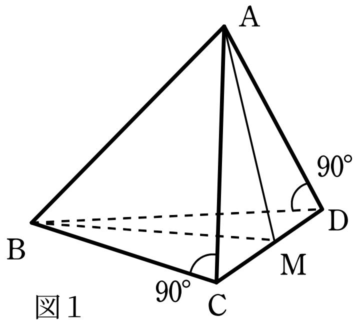

図１

図１を参照しながら考える。

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=0$，

したがって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AD\cdot AB\cos(\angle DAB)=(AD)^2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AC\cdot AB\cos(\angle CAB)=(AC)^2$
したがって，$AD=AC$，すなわち△ACDは2等辺三角形。したがって，頂点Aと中点Mを結ぶ直線AMは辺CDと直交する。

結局，辺CDはAM，ABと直交するから，これらの直線が作る平面，すなわちA，B，Mの3点を通る平面と直交する。

<解説>

題意を満たすような四面体の図を描いて考えてみる。すると，その四面体は斜辺を共通とする合同な直角三角形からなっているように見えてくる。そのことは，ABとCDが直交するためには，ABを軸として二つの直角三角形を回転すると，ぴったり重なる必要があることから分る。

そこで，ABとCDが直交することを利用して，二つの直角三角形の対応する辺の長さが同じであることを導けば良いことになる。このためにベクトルの加減算と内積演算を用いて求める。ただし，ここではベクトルの内積が長さの積に両者がなす角の余弦を乗じたものであることを利用しなければならない。このように考えてくると，存外簡明な問題であることが分る。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AD\cdot AB\cos(\angle DAB)=(AD)^2$では，$\cos(\angle DAB)=\dfrac{AD}{AB}$であることを用いている。

また同じように△BCDも2等辺三角形である。すなわち，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC})=0$，したがって，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BC\cdot BA\cos(\angle ABC)=(BC)^2$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=BD\cdot BA\cos(\angle ABD)=(BD)^2$
したがって，$BC=BD$となる。

$\boxed{3}$

xを正の実数とする。座標平面上の3点A$(0,1)$，B$(0,2)$，P(x,x)をとり，△APBを考える。xの値が変化するとき，∠APBの最大値を求めよ。

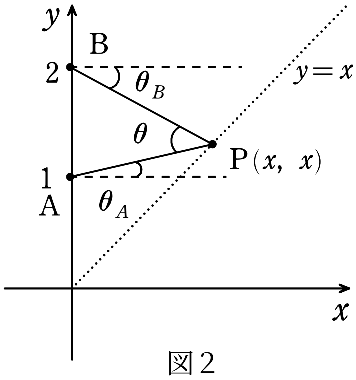

図2

解答

図2を参照しながら考える。∠APB$=\theta$とおく。

$$\tan\theta=\tan(\theta_A-\theta_B)=\frac{\sin(\theta_A-\theta_B)}{\cos(\theta_A-\theta_B)}$$

$$=\frac{\tan\theta_A-\tan\theta_B}{1+\tan\theta_A\tan\theta_B} \qquad (1)$$

$\tan\theta_A=\dfrac{x-1}{x}$，$\tan\theta_B=\dfrac{x-2}{x}$　を(1)式に代入すると，

$$\tan\theta=\frac{x}{x^2+(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(x-2)} \qquad (2)$$

θは明らかに鋭角だから$\tan\theta$が最大のときθは最大となる。(2)式の分子が最小となるとき$\tan\theta$が最大となる。(2)式の分子が最小となるのは，

$f(x)=x+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(x-2)=2x+\dfrac{2}{x}-3$とおいて，

$f'(x)=2-\dfrac{2}{x^2}=0$から，$x=1$のときである。$x=1$を(2)式に代入すると，$\tan\theta=1$だから，

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，すなわち∠APBの最大値は$\dfrac{\pi}{4}$である。

<解説>

図を書いてみると，∠APBが45°のとき、すなわち△ABPが直角二等辺三角形のとき，∠APBが最大となるように思われる。そのことを証明すれば，この問題は解決である。だが，容易ではない。

そこで，∠APBが直線APとBPの傾きの差であることに着眼する。直線の傾きは，x軸から反時計方向に計った直線の角度のタンジェントである。直線の傾きは2点の座標が分れば求まる。当然ながら，三角関数の基本定理（ここでは加法定理）は覚えておかねばならない。

$\tan\theta$を以下のように求めても良い。

余弦法則によって，$\cos\theta=\dfrac{PA^2+PB^2-AB^2}{2PA\cdot PB}$

一方，正弦法則によって，$\sin\theta=\dfrac{2\triangle ABP}{PA\cdot PB}$

$$\tan\theta=\frac{4\triangle ABP}{PA^2+PB^2-AB^2}$$

$PA^2=x^2+(x-1)^2$，$PB^2=x^2+(x-2)^2$，△ABP$=\dfrac{x}{2}$だから，

$$\tan\theta=\frac{2x}{2x^2+(x-1)^2+(x-2)^2-1}=\frac{x}{2x^2-3x+2}$$

$\boxed{4}$

数列$\{a_n\}$は，すべての正の整数nに対して$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$を満たしているとする。このとき，すべての$n$に対して$a_n = 0$であることを示せ。

解答

数学的帰納法によって考察する。ある正の整数nに対して$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$が成立するとき，$k \leqq n$のすべての$k$に対して$a_k = 0$とする。$n+1$に対して，$0 \leqq 3a_{n+1} \leqq \sum_{k=1}^{n+1} a_k$が成立しているとする。すると$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = a_{n+1}$だから，$0 \leqq a_{n+1} \leqq 0$となって，$a_{n+1} = 0$となる。

$n=1$の場合，$0 \leqq 3a_1 \leqq a_1$であるから，$0 \leqq a_1 \leqq 0$となって，$a_1 = 0$である。

以上をまとめると，ある正の整数nに対して$0 \leqq 3a_n \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k$が成立するとき，$k \leqq n$の$k$に対して$a_k = 0$とすれば，$0 \leqq 3a_{n+1} \leqq \sum_{k=1}^{n+1} a_k$が成立すれば，$a_{n+1} = 0$となる。$n=1$でも成立するから，$n$を逐次大きくしていくことにより，全ての$n$において$a_n = 0$となる。

＜解説＞

この種の証明問題は，数学的帰納法を用いると直感することが必要である。あらゆるnにおいて成立することを証明するには，nを含む恒等式として$a_n = 0$が導出されねばならない。しかし，それは与えられた式から難しそうである。とするならば，nで成立することを仮定したとき，$n+1$で成立することを証明する。その上で$n=1$で成立していれば，nを次々に大きくしても，成立することが論理的に言えることになる。

$\boxed{5}$

aを正の実数とする。座標平面において曲線$y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$とx軸とで囲まれた図形の面積をSとし，曲線$y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，曲線$y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$および$x$軸で囲まれた図形の面積を$T$とする。このとき$S$： $T = 3 : 1$となるようなaの値を求めよ。

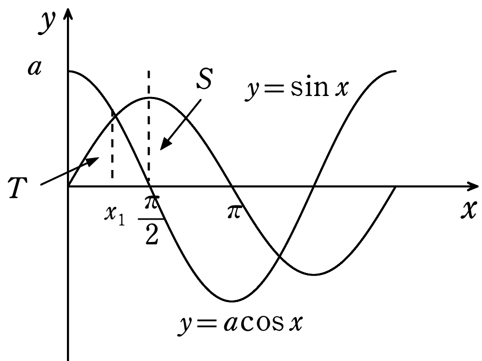

図３

解答

図３を参照しながら考える。

$S = \int_0^{\pi} \sin x = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = 2$

両曲線の交点をx_1とすれば，$\sin x_1 = a\cos x_1$だから，$a = \tan x_1$で，$x_1 = \tan^{-1} a$

$T = \int_0^{x_1} \sin x\,dx + \int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{x_1} + \Big[a\sin x \Big]_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos x_1 + 1 + a - a\sin x_1$

$= (1+a) - (1 + a\tan x_1)\cos x_1 = (1+a) - (1+a^2)\cos x_1$

$\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1 = 1$を変形して，$\cos^2 x_1 = \dfrac{1}{1+\tan^2 x_1} = \dfrac{1}{1+a^2}$だから，

$T = (1+a) - \sqrt{1+a^2}$，一方与えられた条件から，$T = \dfrac{S}{3} = \dfrac{2}{3}$だから，

$\dfrac{2}{3} = (1+a) - \sqrt{1+a^2}$，これを解くと$a = \dfrac{4}{3}$　　（答）

＜解説＞

三角関数の積分の問題である。題意は明瞭であり，単純な式の積分だから，紛れがない。三角関数の積分公式は覚えておかねばならない。

$\boxed{6}$

座標空間内でO (0, 0, 0)，A (1, 0, 0)，B (1, 1, 0)，C (0, 1, 0)，D (0, 0, 1)，E (1, 0, 1)，F (1, 1, 1)，G (0, 1, 1)を頂点にもつ立方体を考える。この立方体を対角線OFを軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

解答

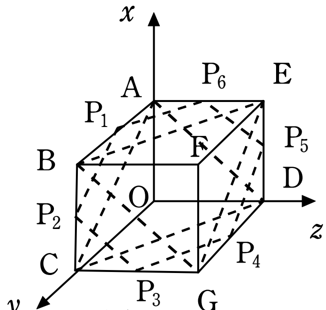

図４

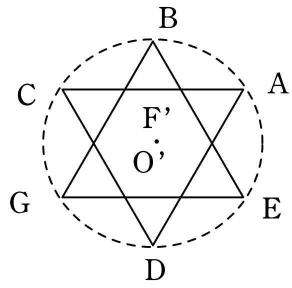

図５

図４，５を参照しながら考える。図４から分るように，OFに垂直な断面は正三角形，六角形，正三角形と推移する。図５はOFに垂直な平面上に正三角形ACDと正三角形BGEを投影したもので，両三角形は対角線OFに垂直である。OFと三角形ACDの交点をO’，三角形BGEの交点をF’，OFの中点をMとする。

回転軸OFに沿ったOからの距離をt，軸に垂直な断面内で軸から最も遠い点までの距離を$l(t)$とすれば，回転体の断面は半径$l(t)$の円となる。微小厚さΔtの円板の体積は$\pi l^2(t)\Delta t$だから，回転体の体積Vは，$\mathrm{OF} = \sqrt{3}$だから

$V=\int_0^{\sqrt{3}}\pi l^2(t)dt \qquad (1)$

OO’$=h$，O’M$=d$とおく。回転体は中点Mの断面に関して対称だから，積分範囲はOMで良い。

すると，$V=2\pi\int_0^h l^2(t)dt+2\pi\int_h^{h+d}l^2(t)dt \qquad (2)$

(2)の第一項は，図５に示す円を底面とする円錐の体積となるので，積分を実行せずに求める。

図５の円の半径は，$r=AO'=\dfrac{AD}{2\cos 30^\circ}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

したがって，$h=OO'=\sqrt{(OA)^2-(AO')^2}=\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

したがって，円錐の体積は　$\dfrac{\pi r^2 h}{3}=\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}=\pi\int_0^h l^2(t)dt \qquad (3)$

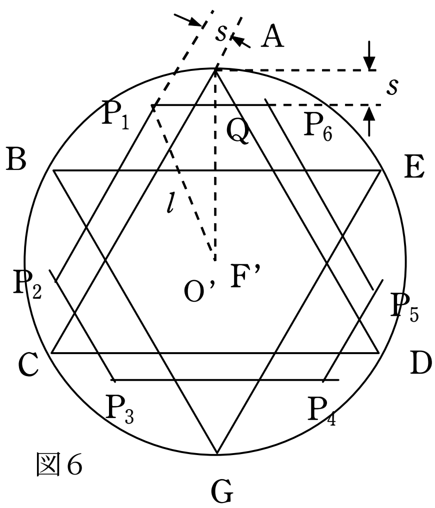

図６

次にO’M間での$l(t)$を求める。図６のように，O’での断面は正三角形ACDであり，O’からMに向かうと六角 形$P_1\cdots P_6$になり，Mでは正六角形になる。ここでsは正三角形から六角形への変形のパラメータであり，断面がO’からMに向かうにつれ増加する。

$$l^2=(O'P_1)^2=(O'Q)^2+(P_1Q)^2=(O'A-s)^2+\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+\frac{2s}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-s\right)^2+(\sqrt{3}\,s)^2$$

$$=4s^2-2s\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}$$

また$O'F'=OF-OO'-FF'=\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$だから，$O'M=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=d$

O’からMに向かう距離t'とsは比例し，断面が正六角形となる中点Mにおいて$t'=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$で，

$s=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$だから，$s=\dfrac{t'}{\sqrt{2}}$となる。したがって，$l^2=2t'^2-\dfrac{2t'}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{3}$

すると，(2)の第二項は$\pi\int_h^{h+d}l^2(t)dt=\pi\int_0^d l^2(t')dt'$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} l^2(t')dt'=\pi\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\left(\frac{2}{3}-\frac{2t'}{\sqrt{3}}+2t'^2\right)dt=\pi\left[\frac{2}{3}t'-\frac{t'^2}{\sqrt{3}}+\frac{2t'^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{12\sqrt{3}}+\frac{1}{36\sqrt{3}}\right)=\frac{5\pi}{18\sqrt{3}} \qquad (4)$$

(3)，(4)の和を2倍して，求める体積は

$$V=2\left(\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}+\frac{5\pi}{18\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}} \qquad \text{（答）}$$

＜解説＞

題意は単純で紛れがないが，難問である。類似問題を解いた経験がないと，時間内で正解を得るのは難しかろう。回転体の形状を正確に把握するのがなかなか難しいからだ。形状を把握してから，体積の計算することもなかなか難しい。

まず回転体の形状を理解するには軸に垂直な断面がどのようになるかを考える必要がある。その断面で，軸から最も遠い点までの距離を半径とする円が回転体の断面となる。半径が軸に沿ってどのように変化するかを次に求める。

$l^2(t)$が具体的に分れば，問題は解決である。上記の解答では，FF’とOO’では底面が正三角形の三角錐の回転だから円錐になるとして，$l^2(t)$を求めることなく円錐の体積の公式によって体積を求めた。

次に軸O’Mの回転による断面の回転体がどのようになるかを考えることが必要である。O’での断面が正三角形ACDであり，O’からMに向かうと六角形になり，Mでは正六角形になることを把握する。図６のような図を描いてみれば，軸から最も遠い点までの距離を求めることができる。ここで，O’からMに向かってsが増大して，正三角形が正六角形になることを理解し，$l^2(s)$を求めることが必要である。その上で，O’からの距離t'とsの関係を求め，$l^2(t')$を求める。

以上の結果，上の解答のように$l^2(t')=2t'^2-\frac{2t'}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}$として，上記の積分を実行して求めた。OMの回転体とFMの回転体とは向きは逆だが，全く同じである。軸OMの回転体の体積を2倍すれば良い。

入試という限られた時間の中で正答するのは難しいとしても，題意は明瞭だから全く歯が立たないという問題ではない。分るところ，できるところまで食らい付いて，解答のプロセスを記載していく心構えが必要である。そこが評価されて，得点に反映されるだろう。All or Nothingではない。

＜理系甲総評＞

全体として，題意が明瞭な紛れの少ない問題であるから，基礎的知識の理解と計算力があれば，対応できるだろう。$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{1}$あたりを迅速に完答し，$\boxed{3}$，$\boxed{2}$に取組み，$\boxed{6}$に食らいついて，高得点を得たい。

$\boxed{1}$　素直な確率の問題。難易度C

$\boxed{2}$　四面体をベクトルによって扱う問題。立体図形を描いて，図形の状況を把握し，解答の方向を考える。この方向を誤ると，上手く証明できなくなるので注意のこと。難易度はB。

$\boxed{3}$　直線図形の関数の問題。題意は明瞭であり，紛れは少ない。着眼点を違えると煩瑣になるので注意する。難易度B。

$\boxed{4}$　簡易な数列の証明問題である。数学的帰納法によって証明する。難易度C

$\boxed{5}$　三角関数の平易な積分の問題。難易度C

$\boxed{6}$　立体図形の問題で，積分により回転体の体積を求める。回転軸に沿った断面の形状を考えるのが難しい。立体図形を頭の中で考え，紙面に色々な図を描いて考えるようにしたい。難易度A

100930

数学（理系乙）

$\boxed{1}$　理甲の$\boxed{2}$に同じ。

$\boxed{2}$　理甲の$\boxed{3}$に同じ。

$\boxed{3}$　理甲の$\boxed{5}$に同じ。

$\boxed{4}$

$1<a<2$とする。3辺の長さが$\sqrt{3}$，a，bである鋭角三角形の外接円の半径が1であるとする。このときaを用いてbを表せ。

解答

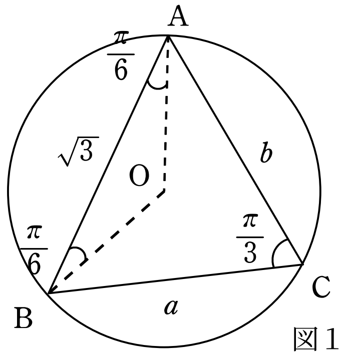

図１

図１を参照しながら考える。AO＝1，AB＝$\sqrt{3}$だから，∠BAO＝∠ABO＝$\frac{\pi}{6}$，したがって

∠AOB＝$\frac{2\pi}{3}$，したがって∠ACB＝$\frac{\pi}{3}$

余弦法則により，$a^2+b^2-2ab\cos\angle ACB=a^2+b^2-ab=(\sqrt{3})^2$

これを解いて，$b=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{12-3a^2}}{2}$

ただし$b\leqq\frac{a}{2}$のとき∠BAC$\geqq\frac{\pi}{2}$となり，鋭角三角形ではなくなるから，$b=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{12-3a^2}}{2}$は棄却される。したがって，

$$b=\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{12-3a^2}}{2}$$

＜解説＞

三角関数を用いた平易な図形問題。外接円半径1，辺長$\sqrt{3}$というところから，ピーンときて，特定

の三角形が想定されることに気がつくこと。そうすれば，難しく考えないですむ。鋭角三角形の条件に注意すること。ここでは余弦定理を用いたが，正弦定理を用いた解法を紹介する。

∠A，∠Bをα，βとする。正弦定理によれば，

$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2$，したがって

$b=2\sin\beta=2\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha$

αは鋭角だから，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}$，したがって

$b=\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{12-3a^2}}{2}$

5

次の問に答よ。

(1) nを正の整数，$a=2^n$とする。3^a-1は2^{n+2}で割り切れるが2^{n+3}では割り切れないことを示せ。

(2) mを正の偶数とする。3^m-1が2^mで割り切れるならば$m=2$または$m=4$であることを示せ。

解答

(1) 3^a-1が2^{n+2}で割り切れ，2^{n+3}では割り切れないことを帰納法によって示す。

3^a-1が2^{n+2}で割り切れるということは，$3^a-1=2^{n+2}i$（iは正の整数）と表されることである。

一方，2^{n+3}では割り切れないということは，$3^a-1=2^{n+3}i'=2^{n+2}(2i')$（$i'$は正の整数）なる$i'$が存在しないということである。すると，$i\fallingdotseq 2i'$だから，$i$は奇数でなければならない。

すなわち，3^a-1が2^{n+2}で割り切れ，2^{n+3}では割り切れないということは，$3^a-1=2^{n+2}(2j-1)$（jは正の整数）と表されることなので、これを帰納法によって証明すれば良い。

nで$3^a-1=2^{n+2}(2j-1)$が成立するとする。

$n+1$のとき，$3^a-1=3^{2^{n+1}}-1=(3^{2^n}-1)(3^{2^n}+1)=2^{n+2}(2j-1)\{(3^{2^n}-1)+2\}$

$=2^{n+2}(2j-1)\{2^{n+2}(2j-1)+2\}=2^{(n+1)+2}(2j-1)\{2^{n+1}(2j-1)+1\}$

ここで，$2^{n+1}(2j-1)+1$は奇数だから，$3^a-1=2^{(n+1)+2}(2k-1)$（kは正の整数）となり，$n+1$でも成立する。また$n=1$のとき$3^a-1=3^2-1=8=2^{1+2}\times 1$となって，成立する。

したがって，$3^a-1=2^{n+2}(2j-1)$（jは正の整数）が成立するので，3^a-1は2^{n+2}で割り切れるが，2^{n+3}では割り切れないことが証明された。

(2) 3^m-1が2^mで割り切れるとするなら，$3^m-1=2^m k=2^{(m-2)+2}k$（kは正の整数）と表される。

kが奇数とするなら，(1)の結果から，$2^{(m-2)+2}k=3^{2^{m-2}}-1$，したがって$m=2^{m-2}$

図２(a)に$y=x$と$y=2^{x-2}$のグラフを示す。$x=2^{x-2}$となる整数は$x=4$だから，$m=4$

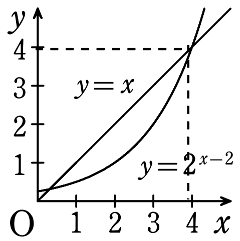

図２(a)

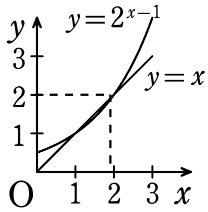

図２(b)

kが偶数とするなら，$3^m-1=2^m k=2^m\cdot 2k'=2^{(m-1)+2}k'$（$k'$は正の奇数），(1)の結果から，

$2^{(m-1)+2}k'=3^{2^{m-1}}-1$，したがって$m=2^{m-1}$

図２(b)に$y=x$と$y=2^{x-1}$のグラフを示す。$x=2^{x-1}$となる整数は$x=2$だから，$m=2$

以上によって，mを正の偶数として，3^m-1が2^mで割り切れるならば$m=2$または$m=4$であることが証明された。

＜解説＞

題意を的確に把握し，証明を要求されている内容を変換して考えるという数学的な論理性を必要とするので，少々難しい。(1)では，2つの数学的事象の証明を要求されるが，それが1つの事象に統一されることに気づくと容易になる。割り切れる，割り切れないという事象を一つの数式で表現し，それを数学的帰納法によって証明する。数学的帰納法は数式の一般的な証明が困難であっても，ある値で成立を仮定したとき，その値を順次増加させても成立することが証明できれば一般的な証明となるので，便利な証明方法である。

(2)では(1)の結論を上手に使う。そうでなければ証明は困難である。そのように使うために、式を上手に変形する。難しく考えないで，(1)を上手に使えるように式の変形を考えないと，迷路に迷いこむ恐れある。また，数式を解いて数値解を求めるのが難しいので，グラフによって求めるのが簡便である。

$\boxed{6}$

n個のボールを$2n$個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも１個以下のボールしか入っていない確率をp_nとする。このとき，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$を求めよ。

解答

ボールを投げて箱に入れるという過程は，$2n$個の箱から１個の箱を選ぶということである。したがってn回ボールを投げて，全ての箱に１個以下のボールが入るということは，n回の選択の結果，同じ箱が選ばれるのは１回以下であるということである。

１回めは，$2n$個の箱のどれを選んでも良いから，箱を選ぶ確率は$\dfrac{2n}{2n}$，次は前回選ばれた箱を選ぶことはできないから，$2n$個の箱のうち$2n-1$個の箱のどれかを選ぶことができるので確率は

$\dfrac{2n-1}{2n}$。次は既に選ばれた2個の箱以外の$2n-2$個の箱のどれかを選ぶことができるから，確率は$\dfrac{2n-2}{2n}$。このようにして，同じ箱を選ばないようにして，箱を選んでいくことができる確率は

$$p_n=\frac{2n}{2n}\times\frac{2n-1}{2n}\times\cdots\times\frac{2n-(n-2)}{2n}\times\frac{2n-(n-1)}{2n}$$

$$=\left(\frac{n}{2n}+\frac{n}{2n}\right)\left(\frac{n}{2n}+\frac{n-1}{2n}\right)\cdots\left\{\frac{n}{2n}+\frac{n-(n-2)}{2n}\right\}\left\{\frac{n}{2n}+\frac{n-(n-1)}{2n}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

$$\log p_n=-n\log 2+\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

第2項はnが大きくなると積分に置き換えることができる。すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\fallingdotseq\int_0^n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx=n\int_0^1\log(1+t)\,dt=n\Big[(1+t)\log(1+t)-(1+t)\Big]_0^1$$

$$=n\{2\log 2-(1+1)+1\}=2n\log 2-n$$

したがって，$\log p_n\fallingdotseq n\log 2-n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}=\log 2-1 \qquad \text{（答）}$$

＜解説＞

確率の問題は一見して難しそうでも，観点を変えると意外に簡単な問題に変わることがある。この問題もそうである。$2n$個の箱にn個のボールを投げ，全ての箱にボール1個以下である確率を求めるということを考え出すと，なかなか考えがまとまらない。箱に入るボールの個数とその確率はどうか，すると$2n$個の箱ではどうなるか，などと難しい方向へ頭が向かってしまう。

もっとも，どういう観点だと容易になるかは，どのような勉強をしてきたかなど，個人によって異なる可能性がある。だから大事なことはもし難しいと感じたら，観点を変えてみるということである。

そこで箱にボールを入れるということは，一つの箱を選ぶことだと考えると簡単な問題になる。1回のボール投げで1個の箱が選ばれる。1度選ばれた箱は2度と選ばれないとして，n回のボール投げを行って$2n$個の箱からn個の箱が選ばれる確率を求めるという問題である。すると，p_nはすっきりとした数式表現になる。

次に$\log p_n$を求めることになるが，私にとっては意外に難しい問題であった。nが大きくなったとき，Σの計算を積分に置き換えるという着想を得れば良いのだが，そうでないと想念があちこちに飛んで収拾がつかなくなってしまう。積分に置き換えることを検討する場合にグラフを描いてみると良い。nが大きくなるにつれ，グラフがどのように変化するかを見れば，積分に置き換えることができると思えるようになる。図3に$n=20$の場合の$y=\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$のグラフを示す。その線上に$y=\log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$，$(k=1, 2, \cdots, n)$の点を示している。すると$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\fallingdotseq\int_0^n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$であることが分る。

さらにnが大きくなるにつれ，$\dfrac{1}{n}$は小さくなるから，近似の程度は上がっていく。

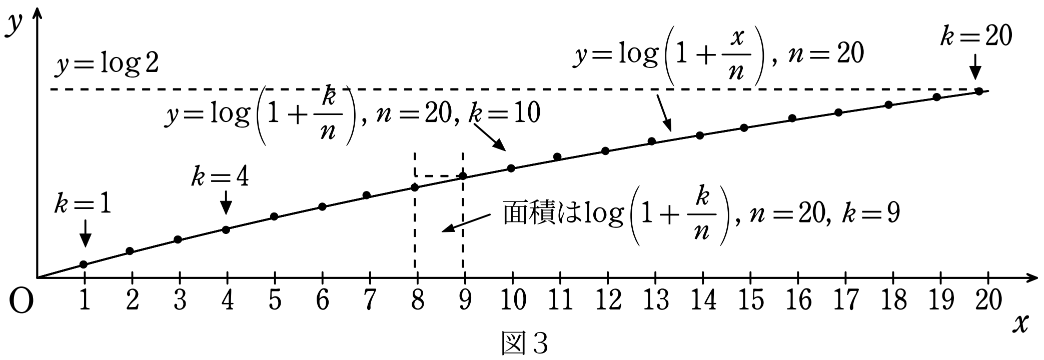

図３

<理系乙総評>

3問が理甲と共通である。難易度Ｃの$\boxed{1}$，$\boxed{4}$，難易度Ａの$\boxed{6}$の代わりに，難易度Ｂの$\boxed{4}$難易度Ａの$\boxed{5}$，$\boxed{6}$が加わったので，理乙の方がやや難しくなっていると思われる。難易がほどほどに混じった問題群なので，難易度Ｃ，Ｂの問題は着実に正答し，Ａの問題には食らい付いてゆけば，高得点も期待できよう。

$\boxed{1}$　理甲の$\boxed{2}$に同じ。難易度Ｂ

$\boxed{2}$　理甲の$\boxed{3}$に同じ。難易度Ｂ

$\boxed{3}$　理甲の$\boxed{5}$に同じ。難易度Ｃ

$\boxed{4}$　平易な図形の問題。
難易度Ｂ

$\boxed{5}$　整数の問題。上手に式を変形すれば，容易になる。
難易度Ａ－

$\boxed{6}$　確率の問題で一見難しそうだが，観点を変え，着想を得れば，正答を得ることは難しくない。
難易度Ａ－

101014

文系数学

$\boxed{1}$

次の各問に答えよ。

(1)　座標平面上で，点（1，2）を通り傾きaの直線と放物線$y=x^2$によって囲まれる部分の面積を$S(a)$とする。aが$0\leqq a\leqq 6$の範囲を変化するとき，$S(a)$を最小にするようなaを求めよ。

解答

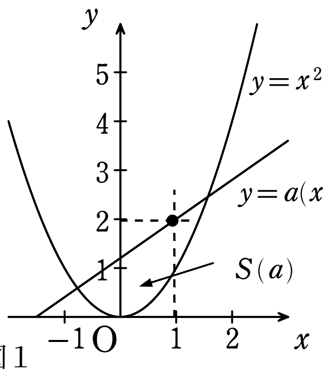

図1

図1を参照する。x_1，x_2は$y=x^2$と$y=a(x-1)+2$の交点のx座標とする。

$$S(a)=\int_{x_1}^{x_2}\{a(x-1)+2-x^2\}dx=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}+(2-a)x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$i=1, 2$として，$x_i{}^2=a(x_i-1)+2$だから，

$$\frac{-x_i{}^3}{3}+\frac{ax_i{}^2}{2}+(2-a)x_i=\frac{-a(x_i-1)x_i-2x_i}{3}+\frac{a^2(x_i-1)+2a}{2}+(2-a)x_i$$

$$=\frac{-2ax_i{}^2+(3a^2-4a+8)x_i+6a-3a^2}{6}=\frac{(a^2-4a+8)x_i+2a-a^2}{6}$$

$$S(a)=\frac{(a^2-4a+8)(x_2-x_1)}{6}=\frac{1}{6}\{(a-2)^2+4\}^{\frac{3}{2}}$$

したがって，$S(a)$が最小になるのは，$a=2$

(2)　△ABCにおいてAB=2，AC=1とする。∠BACの二等分線とBCの交点をDとする。AD＝BDとなるとき，△ABCの面積を求めよ。

解答

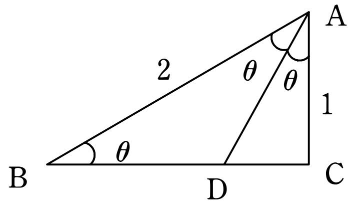

図2

$\theta=\frac{1}{2}$∠BACとする。AD＝BDだから，∠ABD＝∠BAD＝θ，

したがって，$\mathrm{BC}\sin\theta=\mathrm{AC}\sin 2\theta=2\mathrm{AC}\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta$

したがって，$\mathrm{BC}=2\cos\theta=\mathrm{AB}\cos\theta$，したがって∠ACB=$\frac{\pi}{2}$，BC=$\sqrt{3}$

したがって△ABCの面積は$\frac{\sqrt{3}}{2}$

＜解説＞

(1) 2次関数の平易な積分の問題。計算ミスに気をつければ，正答できるだろう。$a=2$のとき，直線は原点を通る。

(2) 平易な図形の問題。題意に沿って図を描けば，直角三角形だと気づくだろう。

$\boxed{2}$

座標平面上の点P（x, y）が$4x+y \leqq 9$，$x+2y \geqq 4$，$2x-3y \geqq -6$の範囲を動くとき，$2x+y$, x^2+y^2のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。

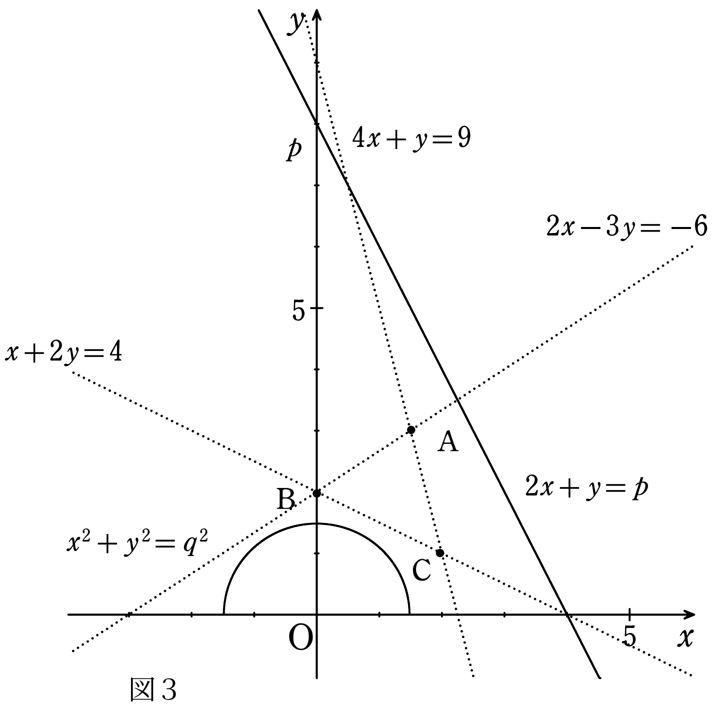

図３

解答

図３を参照する。与えられた3式の条件から点P（x, y）の存在する範囲は△ABCの辺上とその内部。$2x+y=p$とすれば，図３から明らかなように，直線 $2x+y=p$はpが小さくなるにつれ，yの負方向へ移動する。したがって，pが最大となるのは，直線 $2x+y=p$が点Aを通るとき。点Aは直線$4x+y=9$と$2x-3y=-6$の交点だから，（1.5，3）である。

したがって$2x+y$の最大値は6。pが最小となるのは直線 $2x+y=p$が点B（0, 2）を通るとき。したがって，$2x+y$の最小値は2。

$x^2+y^2=q^2$とすれば，これは原点を中心とする円であり，qはその半径である。図３から明らかなように，qは△ABCで原点から最も遠い点で最大値，最も近い点で最小値をとる。最も遠い点はA（1.5，3）だから，最大値は11.25。原点からBCに下ろした垂線が最小値になる。垂線の式は$y=2x$だから，$x+2y=4$との交点は（0.8，1.6）。したがって$x^2+y^2=3.2$が最小値である。

<解説>

３つの１次関数によって制限された領域での１次関数と2次関数の最大値と最小値を求める問題。グラフを描いて，領域を求める。この領域の点で与えられた関数が最大値になる点、最小値になる点を見つければ良い。このために，与えられた関数をグラフに描いて，関数のパラメータを変化させたときの関数の動きを考察して，最大値あるいは最小値をとる領域の点を求める。

$\boxed{3}$

理甲の$\boxed{1}$に同じ。

$\boxed{4}$

点Oを中心とする正十角形において，A，Bを隣接する2つの頂点とする。線分OB上に$OP^2=OB\cdot PB$を満たす点Pをとるとき，$OP=AB$が成立することを示せ。

解答

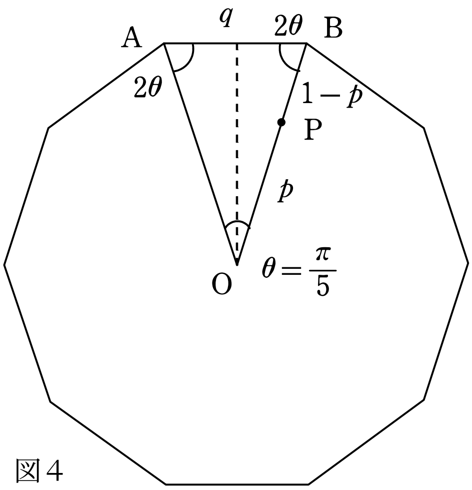

図４

図４を参照しながら考える。OB=OA=1，OP=pとする。すると，$p^2=(1-p)$

したがって，$p^2+p-1=0$　　(1)

AB=qとして，三角形OABに正弦定理を適用すると，$\dfrac{\sin\theta}{q}=\dfrac{\sin 2\theta}{1}$

したがって，$\sin\theta=q\sin 2\theta=2q\sin\theta\cos\theta$，$2q\cos\theta=1$　　(2)

一方，AB=q=2OB$\cos 2\theta=2\cos 2\theta=2(2\cos^2\theta-1)$　　(3)

(2)，(3)で$\cos\theta$を消去すると，$q^3+2q^2-1=(q+1)(q^2+q-1)=0$

$q\fallingdotseq -1$だから，$q^2+q-1=0$　　(4)

(1)，(4)からp, qは同じ方程式の解で，両者とも正だから，$p=q=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

すなわち，OP=ABである。

＜解説＞

題意は簡明な図形の問題であるが，着眼を誤ると、意外に手こずることを実感した。相似による比例関係やら，ベクトル表示やらを利用する方に頭が向くと，なかなか正しい筋道に至らない。ここでは正十角形というところがポイントである。つまり二等辺三角形の頂角の２倍が底角であるという事実を利用することである。

そこに気がつけば，この種の問題で常套的であるように正十角形の外接円の半径を1として，OPとABを直接求めて，両者が同じであることをいえば良い。このとき，角度$\dfrac{\pi}{5}$の正弦や余弦の値が必要になる。ここに悩むと先へ進まない。直接，これらの値を使わなくても良い方法がないかと考える。

すると，正弦法則と直角三角形の辺の関係から，角度$\frac{\pi}{5}$の正弦や余弦の値を使わなくても，ABを求めることができるという見通しが出てくる。このあたりの見通しは、色々な問題に取り組んで養われる直感のようなものによるのであろう。

別解１

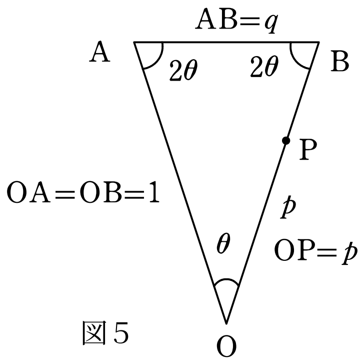

図５

$p^2+p-1=0$　　(1)

三角形OABに正弦定理を適用すると，$\frac{\sin 2\theta}{1}=\frac{\sin\theta}{q}$

したがって，$2\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin\theta}{q}$，$2\cos\theta=\frac{1}{q}$　　(2)

三角形OABに余弦定理を適用すると，$q^2=1+1-2\cos\theta=2-2\cos\theta$　　(3)

(2)，(3)から$\cos\theta$を消去すると$q^3-2q+1=q^3-q-(q-1)=(q-1)(q^2+q-1)=0$

$q<1$だから，$q^2+q-1=0$　　(4)

(1)，(4)によりp, qは同じ方程式の解であり，両者とも正だから，$p=q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

別解２

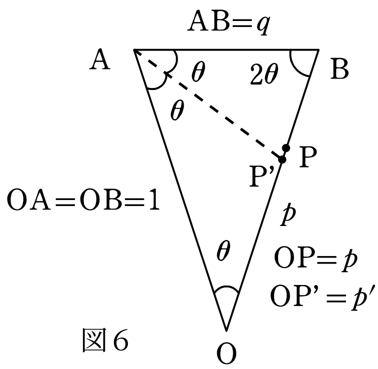

図６

$p^2+p-1=0$　　(1)

∠OABの2等分線とOBの交点をP'とする。すると△OAB ∽ △ABP'，△OAP'は二等辺三角形

$p'=$OP'=AP'=AB$=q$だから，OA：AP'=AB：BP'。

したがって，$q^2=(1-p')=(1-q)$，$q^2+q-1=0$　　(2)

(1)，(2)により，$p=q=p'$となり，P'とPは一致し，OP=ABが示された。

別解２が最も簡明である。ただし，APが∠OABの2等分線になるという事実に気づく必要がある。このことは，OP＝ABという結論からすれば，△ABPも△OAPも二等辺三角形と推定できることから気づくであろう。あるいは，図からも推定できる。すると，(2)を直ぐに導くことができる。

$\boxed{5}$

座標空間内でO (0, 0, 0)，A (1, 0, 0)，B (1, 1, 0)，C (0, 1, 0)，D (0, 0, 1)，E (1, 0, 1)，F (1, 1, 1)，G (0, 1, 1)を頂点にもつ立方体を考える。

(1)　頂点Aから対角線OFに下ろした垂線の長さを求めよ。

(2)　この立方体を対角線OFを軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

（理系甲$\boxed{6}$に同じ）

解答

図７，８を参照しながら考える。図８はOFに垂直な平面上に正三角形ACDと正三角形BGEを投影したもので，両三角形は対角線OFに垂直である。またOFと三角形ACDの交点をO’，三角形BGEの交点をF’とする。

(1)

Aから対角線OFに下ろした垂線はAO’。AC＝$\sqrt{2}$，O’は正三角形ACDの重心だから，

$$\mathrm{AO'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\qquad（答）$$

(2)

理系甲の$\boxed{6}$に同じ。

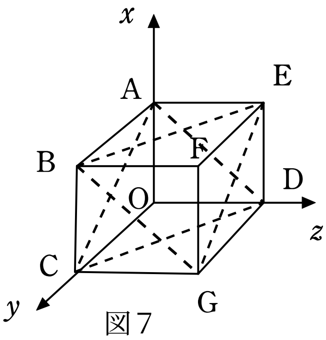

図7

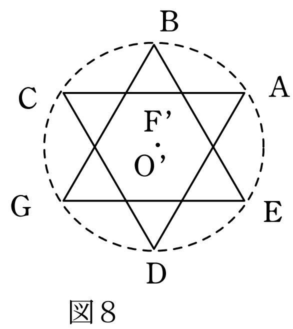

図８

＜文系総評＞

図形が関わる問題が3問ある。題意が簡明な問題ばかりで，基礎的な数学知識と思考力とを問う。$\boxed{5}$を除けば，難問ではないので，着実にできるようにしたい。

$\boxed{1}$　2次関数の積分と三角関数を利用する図形の問題。どちらも平易で，難易度はC。

$\boxed{2}$　1次関数で定まる領域での1次関数と2次関数の最大値，最小値を求める問題。グラフを描くことで求める。難易度はＢ－。

$\boxed{3}$　理系甲の$\boxed{1}$と同じ。確率の問題。難易度はC。

$\boxed{4}$　三角関数を利用する図形の問題。題意は簡明だから，着眼さえ良ければ，大きな困難はない。難易度はＢ。

$\boxed{5}$　理系甲の $\boxed{6}$ に(1)が加わった。(1)は容易で難易度はＣ。文系の問題としては(2)は難しく，難易度はＡ。

101113