

2010 (H22) 年度 新潟大学 前期 入学試験 数学解説

< 理・医・歯・工学部 >

- 1 四面体OABCにおいて, $OA=OB=OC=3$, $AB=BC=CA=\sqrt{6}$ である。また, 点Pは辺ABを $x:1-x$ に内分し, 点Qは辺OCを $y:1-y$ に内分する ($0 < x < 1$, $0 < y < 1$)。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として, 次の問いに答よ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\triangle OAB \text{ において } \angle AOB = \theta \text{ として, 余弦定理により, } \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - AB^2}{2}$$

$$\text{したがって, } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9+9-6}{2} = 6 \quad (\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, x , y で表せ。

$$\text{図 1(a) から分るように, } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$$

$$\text{図 1(b) の } \triangle OAB \text{ において, } \overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{OP} = -\{(1-x)\vec{a} + x\vec{b}\}, \text{ また } \overrightarrow{OQ} = y\vec{c}$$

$$\text{したがって, } \overrightarrow{PQ} = y\vec{c} - (1-x)\vec{a} - x\vec{b} \quad (\text{答})$$

(3) 2点P, Qの間の距離PQの最小値と, そのときの x , y の値を求めよ。

$$\text{距離 } PQ = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{PQ^2} = \sqrt{\{y\vec{c} - (1-x)\vec{a} - x\vec{b}\}^2}$$

$$\begin{aligned} \{y\vec{c} - (1-x)\vec{a} - x\vec{b}\}^2 &= \{y^2\vec{c}^2 + (1-x)^2\vec{a}^2 + x^2\vec{b}^2 - 2y(1-x)\vec{a} \cdot \vec{c} - 2xy\vec{b} \cdot \vec{c} + 2x(1-x)\vec{a} \cdot \vec{b}\} \\ &= 9y^2 + 9(1-x)^2 + 9x^2 - 12y(1-x) - 12xy + 12x(1-x) \\ &= 6x^2 - 6x + 9 + 9y^2 - 12y = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} + 9\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - 4 \geq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\text{したがって, 最小値は } \sqrt{\frac{7}{2}}, \text{ そのとき } x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$

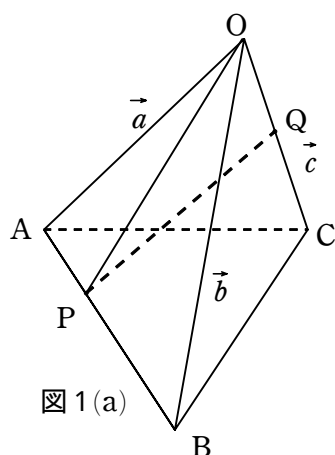


図 1(a)

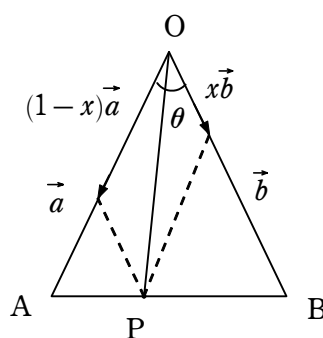


図 1(b)

< 解説 >

簡単な立体図形だから, 図を書いて確認しながら考えると良い。(2) 三角形の頂点と対边上の点を結ぶベクトルの求め方は, 知っていなければならない。(3) 2次式で最小値を求める方法も常套的なものだから, 知っていなければならない。

2 次の条件(ア)～(ウ)を満たす数列 $\{p_n\}$ について考える。

(ア) $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots$ である。

(イ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ はどれも自然数である。

(ウ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ の中にはすべての自然数 k が現れ、その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)～(ウ)を満たし、すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, k, k, \dots, k, \dots$

を $\{a_n\}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 項数5の数列で、数列 $\{p_n\}$ の初めの5項となり得るものをすべて挙げよ。

数列の和が短い順に並べることを考えて、列挙していく。すると自然数 k が k 個現れる数列が最大になるので、そこまでで許容される数列が決まる。

$1, 1, 1, 2, 2 \quad 1, 1, 2, 2, 2 \quad 1, 1, 2, 2, 3 \quad 1, 2, 2, 2, 2 \quad 1, 2, 2, 2, 3 \quad 1, 2, 2, 3, 3$ (答)

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第210項 a_{210} の値を求めよ。

自然数 k までの項数は $\sum_{n=1}^k n = \frac{k(k+1)}{2}$ 、自然数 $k+1$ までの項数は $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\frac{k(k+1)}{2} \leq 210 \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ だから、これを満たすのは $k=20$

$k=20$ で $\frac{k(k+1)}{2} = 210$ だから、自然数20に対応する最後の項が a_{210} で、

$a_{210} = 20$ (答)

(3) $\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。

小さい自然数が含まれるほど、 $\sum_{i=1}^{50} p_i$ は小さくなる。したがって自然数 n に対応する項数が $n+2$

になる場合に $\sum_{i=1}^{50} p_i$ が最小になる。

自然数 k までの項数は $\sum_{n=1}^k (n+2) = \frac{k(k+1)}{2} + 2k$ 、これが50以下であるためには、 $k \leq 7$

$k=7$ のとき、 $\frac{k(k+1)}{2} + 2k = 42$ だから、 $k=50-42=8$ の項が8項含まれる。したがって、

$\sum_{i=1}^{50} p_i = \sum_{n=1}^7 n(n+2) + 8^2 = \sum_{n=1}^7 (n^2 + 2n) + 64 = \frac{1}{6} \times 7 \times (7+1)(2 \times 7 + 1) + 7 \times (7+1) + 64$
 $= 260$ (答)

ただし、ここで $\sum_{n=1}^k n^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$ を用いた。

< 解説 >

数列の問題。難しい問題ではないが、題意を的確に捉えることが必要である。(1)では項数5の意味を理解する。列挙する場合、ある規則によって挙げていかないと見落とす。1の個数ごとに許容される2と3の組み合わせを挙げるのも良い。(2)数列 $\{a_n\}$ では、自然数 n に対応する項数は n である。

(3)では $\sum_{n=1}^k n^2$ の公式を覚えていないと解答は困難である。

[3] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & d \end{pmatrix}$ は、ある実数 k に対して等式 $A^2 = kA$ を満たす。このとき、次の問いに答えよ。

ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) k と d の値を求めよ。

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -3-3d \\ 2+2d & -6+d^2 \end{pmatrix} = kA = \begin{pmatrix} k & -3k \\ 2k & kd \end{pmatrix}, \text{したがって}$$

$$k = -5, d = -6 \quad (\text{答})$$

(2) 実数 b と c が等式

$$(E + bA)(E + 2A) = E + cA$$

を満たすとき、 c を b で表せ。

$$(E + bA)(E + 2A) = E^2 + 2EA + bAE + 2bA^2 = E + (2+b)A + 2bA^2 = E + cA$$

したがって、 $2bA^2 + (2+b-c)A = 0$ 、(1) より $A^2 = -5A$ だから

$$(2-9b-c)A = 0, \text{したがって } c = 2-9b \quad (\text{答})$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ が任意の自然数 n に対して等式

$$(E + 2A)^n = E + a_n A$$

を満たすとき、 a_n を n で表せ。

$$E + a_n A = (E + 2A)^n = (E + 2A)(E + 2A)^{n-1} = (E + 2A)(E + a_{n-1} A)$$

$$= E^2 + a_{n-1} EA + 2AE + 2a_{n-1} A^2 = E + (2 + a_{n-1})A + 2a_{n-1} A^2 = E + (2 - 9a_{n-1})A$$

$$a_n = 2 - 9a_{n-1}, \text{したがって } a_n - \frac{1}{5} = -9\left(a_{n-1} - \frac{1}{5}\right) = (-9)^{n-1}\left(a_1 - \frac{1}{5}\right)$$

$n=1$ のとき、 $E + 2A = E + a_1 A$ だから、 $a_1 = 2$ 、したがって、

$$a_n = (-9)^{n-1}\left(2 - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{1 - (-9)^n}{5} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

行列の問題である。素直に計算すればできる問題である。(1) 素直に A^2 と kA を等しいとおいて、行列計算により求めればよい。(2) これも同様に、行列計算をすればよい。(1) の結果を利用する。(3) 一見難しそうだが、与えられた等式は A の n 次式が 1 次式によって表されることを示している。そこで、1 次式どうしの関係を求め、 a_{n+1} と a_n の関係を求めることができる。数列の一般項を求める常套の方法を適用する。

敢えてハミルトン・ケーリーの定理を用いるまでもないのだが、これを用いる解法も考えてみよう。

(1) 行列 A においてハミルトン・ケーリーの定理によれば、

$$A^2 - (1+d)A + (d+6)E = 0 \quad (1) \text{ また与えられた条件により,}$$

$$A^2 - kA = 0 \quad (2) \quad (1)-(2) \text{ により, } (1+d-k)A = (d+6)E, A \text{ は対角行列ではないから,}$$

$$1+d-k=0, d+6=0 \text{ だから, } d=-6, k=-5 \quad (\text{答})$$

(3) $B = E + 2A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$ に対して、ハミルトン・ケーリーの定理によれば、

$$B^2 + 8B - 9E = (B + 9E)(B - E) = 0$$

一般に $F(x) = x^n = (x+9)(x-1)Q(x) + px + q$ とおくことができる。

$F(-9) = (-9)^n = -9p + q$, $F(1) = (1)^n = p + q$, これより

$$p = \frac{\{1 - (-9)^n\}}{10}, \quad q = \frac{\{9 + (-9)^n\}}{10}$$

x が行列であっても, 関数 F は成立するから,

$$\begin{aligned} F(B) &= B^n = pB + qE = \frac{\{1 - (-9)^n\}}{10} B + \frac{\{9 + (-9)^n\}}{10} E = \frac{\{1 - (-9)^n\}}{10} (E + 2A) + \frac{\{9 + (-9)^n\}}{10} E \\ &= E + \frac{\{1 - (-9)^n\}}{5} A \end{aligned}$$

題意より $B^n = (E + 2A)^n = E + a_n A$ だから, $a_n = \frac{1 - (-9)^n}{5}$ (答)

このようにケニー・ハミルトンの定理を応用すれば, 数列の一般項を求める計算なしに, 一気に a_n を求めることができる。したがって, この定理の応用に習熟していれば, こちらの解法を採用するのが良からう。

4 $F(x) = \int_0^x \sqrt{1 + e^{2t}} dt$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。ただし, e は自然対数の底である。

(1) $\sqrt{1 + e^{2t}} = u$ とおいて, $F(x)$ を求めよ。

$$\frac{du}{dt} = (1 + e^{2t})^{-\frac{1}{2}} e^{2t} = \frac{e^{2t}}{u} = \frac{(u^2 - 1)}{u}, \quad dt = \frac{u}{u^2 - 1} du$$

$t=0$ で $u = \sqrt{2}$, $t=x$ で $u = \sqrt{1 + e^{2x}}$ だから,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \frac{u^2}{u^2 - 1} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \left(1 + \frac{1}{u^2 - 1}\right) du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \left\{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\right\} du \\ &= \left[u + \frac{1}{2} \log(u-1) - \frac{1}{2} \log(u+1) \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} = \left[u + \frac{1}{2} \log \frac{u-1}{u+1} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x}}} \\ &= \sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right) - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \\ &= \sqrt{1 + e^{2x}} + \log \left(\frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{e^x} \right) - \sqrt{2} - \log(\sqrt{2} - 1) \\ &= \sqrt{1 + e^{2x}} + \log(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1) - \log e^x - \sqrt{2} - \log(\sqrt{2} - 1) \\ &= \sqrt{1 + e^{2x}} + \log(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1) - x - \sqrt{2} - \log(\sqrt{2} - 1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{F(x) - e^x\}$ を求めよ。

$$F(x) - e^x = \sqrt{1 + e^{2x}} - e^x + \log \left(\frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{e^x} \right) - \sqrt{2} - \log(\sqrt{2} - 1), \quad \text{ここで}$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + e^{2x}} - e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left\{ \left(\frac{1}{e^{2x}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left\{ \left(\frac{1}{2e^{2x}} + 1 \right) - 1 \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^x} = 0$$

$$\text{また, } \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\sqrt{\frac{1}{e^{2x}} + 1} - \frac{1}{e^x} \right) = \log 1 = 0$$

$$\text{したがって, } \lim_{x \rightarrow \infty} \{F(x) - e^x\} = -\sqrt{2} - \log(\sqrt{2} - 1) \quad (\text{答})$$

< 解説 >

指数, 対数を含む積分の問題。やや計算が複雑になるので, 丁寧に計算を進めること。(1)では $\frac{u^2}{u^2-1}$ を積分可能な部分分数に展開することがポイント。 $\frac{1}{u-1}$ の不定積分では $u-1 \geq 0$ であることが前提。この不定積分は覚えていなければならない。(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{1+e^{2x}} - e^x\}$ が0に収束することを明らかにしなければならない。類似問題の経験がなければ, これはなかなか難しい。時間のない試験では直感で0としてもやむをえない。

一般に $0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2+1} - x\}$ なので, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2+1} - x\} = 0$ を証明しよう。

まず $0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2+1} - x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$ とおく。

$\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \leq 1 + \frac{1}{2x^2}$ は明らかである(両辺を2乗すれば)。したがって

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2+1} - x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 + \frac{1}{2x^2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

ところが, もっと巧妙な方法がある。 $(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x) = \{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2\} = 1$ だから,
 $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$, したがって, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2+1} - x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$, x の代わりに e^x でも同じことである。

5 座標平面上の4点をA(1, 1), B(1, 2), C(2, 2), D(2, 1)とする。点Aに駒をおき, 1個のさいころを投げて, 出目の数だけこれらの点の上を時計回りに駒を進める試行を考える。たとえば, 出目が5のとき, 駒はA→B→C→D→A→Bと進みBに止まる。1回目の試行で止まる点をPとし, 駒を点Aに戻し, 2回目の試行で止まる点をQとする。このとき, 次の問いに答えよ。ただし, Oは原点を表す。

(1) O, P, Qが同一直線上にある確率を求めよ。

O, P, Qが同一直線上にある場合を考える。

以下で, (1回目の出目, 2回目の出目)とする。

図1に4点と出目を対応させて示す。これを参照しながら考える。

(1) P, Qが同一の点である場合

1回目と2回目の試行の出目が同じ場合: 6通り

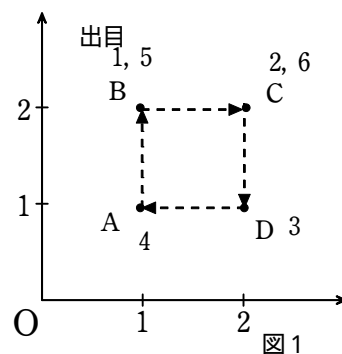
1回目と2回目の試行の出目の差が4: (1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2)の4通り

(2) (P, Q)が(A, C)あるいは(C, A): (4, 2), (4, 6), (2, 4), (6, 4)の4通り

一方, 2回の試行で出目の組み合わせの場合の数は $6 \times 6 = 36$ 通りだから,

$$\text{O, P, Qが同一直線上にある確率} = \frac{6 + 4 + 4}{36} = \frac{7}{18}$$

(2) O, P, Qを通る2次関数 $y = f(x)$ のグラフがただ一通りに定まるとき, P, Qの位置およびその2次関数をすべて求めよ。



$y=f(x)=ax^2+bx+c$ とすれば、原点Oを通るので、 $c=0$

P, Qが同一点である場合には、 a, b が一意に定まらないので、2次関数は一通りに定まらない。

また、 y の値が異なる2点を2次関数を通ることはないから、PがAでQがBあるいはその逆になることはない。C, Dの場合も同じ。またOPQが一直線ではない。すると、

(1)(P, Q)が(B, C)あるいは(C, B)の場合

$y=ax^2+bx$ がB(1, 2), C(2, 2)を通るので、 $2=a+b, 2=4a+2b$

$a=-1, b=3$ 、したがって、

2次関数は $y=f(x)=-x^2+3x$ 、PがBでQがCあるいはその逆の位置 (答)

(2)(P, Q)が(A, D)あるいは(D, A)の場合

$y=ax^2+bx$ がA(1, 1), D(2, 1)を通るので、 $1=a+b, 1=4a+2b$

$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$ 、したがって、

2次関数は $y=f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$ 、PがAでQがDあるいはその逆の位置 (答)

(3)(P, Q)が(B, D)あるいは(D, B)の場合

$y=ax^2+bx$ がB(1, 2), D(2, 1)を通るので、 $2=a+b, 1=4a+2b$

$a=-\frac{3}{2}, b=\frac{7}{2}$ 、したがって、

2次関数は $y=f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x$ 、PがBでQがDあるいはその逆の位置 (答)

(3)(2)で2次関数がただ一通りに定まるとき、その2次関数の最大値を X とし、そうでないとき $X=0$ とする。このとき、 X の期待値を求めよ。

(1)(P, Q)が(B, C)あるいは(C, B)の場合

2次関数は $y=f(x)=-x^2+3x=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$ 、最大値は $\frac{9}{4}$

(P, Q)が(B, C)あるいは(C, B)である場合の数は $2\times 2+2\times 2=8$ 通り。

したがって、 $X=\frac{9}{4}$ となる確率は $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

(2)(P, Q)が(A, D)あるいは(D, A)の場合

2次関数は $y=f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$ 、最大値は $\frac{9}{8}$

(P, Q)が(A, D)あるいは(D, A)である場合の数は2通り。

したがって、 $X=\frac{9}{8}$ となる確率は $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(3)(P, Q)が(B, D)あるいは(D, B)の場合

2次関数は $y=f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{49}{24}$ 、最大値は $\frac{49}{24}$

(P, Q)が(B, D)あるいは(D, B)である場合の数は $2\times 1+1\times 2=4$ 通り。

したがって、 $X=\frac{49}{24}$ となる確率は $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

以上から X の期待値は $\frac{9}{4}\times\frac{2}{9}+\frac{9}{8}\times\frac{1}{18}+\frac{49}{24}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{49}{216}=\frac{341}{432}$ (答)

< 解説 >

確率に、2次関数の最大値を絡ませた問題。さいころを2度振る試行の出目の組み合わせの数を考えれば良い。順列、組み合わせ等を含む複雑な計算を必要としないので、考え方を確立すれば困難はなからう。出目の組み合わせに関する見落としをしないこと。

(1)では題意を的確に捉え、直線になるには(P, Q)がどの点であるべきか、見落としのないように考える。(2)一般に2次関数の係数は3個だから、直線上にはない3点を通る2次関数はただ一通りである。そのような3点に対して2次関数を求める。(3)2次関数の最大値を計算することは問題なからう。2次関数を通る点(P, Q)の出目の組み合わせの数から確率を求める。

< 総評 >

- [1]は立体幾何をベクトルによって扱う問題。難易度はB程度だから確実にできるようにしたい。
- [2]数列の問題。一見複雑そうだが、ていねいに問題文を読めば、簡単な数列であることが分る。題意の理解が基本である。難易度はB。
- [3]行列と数列を絡ませた問題。難易度はA-。ハミルトン・ケリーの定理をすらすら使えるにこしたことはないが、素直に計算すればできる問題だから、定理を思い出すのにやきもきする必要はない。
- [4]対数、指数を含む積分計算を丁寧に行いケアレスミスのないようにしたい。(2)は類似問題をやったことがないと、困難を感じるだろう。変数が無限大になる時、変数に1を加えたルートは変数のルートと等しくなるということは直感できる。しかし証明となると、工夫がいる。難易度はA。
- [5]確率の問題としては、難しい部類ではない。題意を的確に捉えることが大事である。場合の数を見落としなく考えれば良い。難易度はA-。
ただしここで、A, B, Cの順に難度が高い。

100326

< 人文・教育・経済・農学部 >

- [1] 次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $4\log_4 x \leq \log_2(4-x) + 1$ を解け。

左辺を変形すると、 $\frac{\log x^4}{\log 4} = \frac{\log x^2}{\log 2}$ 、右辺を変形すると $\frac{\log 2(4-x)}{\log 2}$ 、したがって不等式は

$$\frac{\log x^2}{\log 2} \leq \frac{\log 2(4-x)}{\log 2} \text{ だから、} x^2 \leq 2(4-x) \text{ となって、} -4 \leq x \leq 2$$

一方題意により真数の条件として、 $0 < x < 4$ だから、 $0 < x \leq 2$ (答)

(2) (1)で求めた x の範囲において、関数 $y = 9^x - 4 \cdot 3^x + 10$ の最大値、最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。

$$3^x = t \text{ とおくと、} 0 < x \leq 2 \text{ に対応して、} 1 < t \leq 9$$

$$y = t^2 - 4t + 10 = (t-2)^2 + 6, \text{ したがって、}$$

$$t = 9 \text{ すなわち } x = 2 \text{ のとき最大値 } 55 \quad (\text{答})$$

$$t = 2 \text{ すなわち } x = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2 \text{ のとき最小値 } 6 \quad (\text{答})$$

< 解説 >

数学の指数・対数分野の問題である。(1)対数の真数は正であることを忘れてはならない。

(2)別変数を導入して考えると、分り易い。

- 2 座標平面上の放物線 $y = (x+1)(x-3)$ を C とする。 x 座標が p, q である C 上の点 P, Q における C の2つの接線が点 $A(a, -7)$ で交わり、2点 P, Q を通る直線の傾きは2である。ただし、 $p < q$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a の値と点 P と点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

点 P の座標を (p, y_p) 、点 Q の座標を (q, y_q) とする。 $y' = 2x - 2$ だから、

点 P での接線の方程式は $y = (2p - 2)(x - p) + y_p$

点 Q での接線の方程式は $y = (2q - 2)(x - q) + y_q$

両者は点 $A(a, -7)$ で交わるので、

$$-7 = (2p - 2)(a - p) + y_p = (2p - 2)(a - p) + (p + 1)(p - 3) \quad (1)$$

$$-7 = (2q - 2)(a - q) + y_q = (2q - 2)(a - q) + (q + 1)(q - 3) \quad (2)$$

それぞれを整理すると

$$p^2 - 2ap + 2a - 4 = 0 \quad (3)$$

$$q^2 - 2aq + 2a - 4 = 0 \quad (4)$$

$$(3) - (4) \text{により } (p - q)(p + q - 2a) = 0 \quad p \neq q \text{ だから } p + q = 2a \quad (5)$$

一方、2点 P, Q を通る直線の傾きは2だから、

$$\frac{y_p - y_q}{p - q} = \frac{(p + 1)(p - 3) - (q + 1)(q - 3)}{p - q} = \frac{(p - q)(p + q - 2)}{p - q} = 2, \text{ したがって}$$

$$p + q = 4 \quad (6)$$

(5), (6) より $a = 2$ (答)、これを(3), (4)に代入して、

$$p^2 - 4p = p(p - 4) = 0, \quad q^2 - 4q = q(q - 4) = 0, \quad p < q \text{ だから、}$$

$$p = 0, \quad q = 4, \quad y_p = -3, \quad y_q = 5, \text{ したがって、}$$

点 P の座標は $(0, -3)$ 、点 Q の座標は $(4, 5)$ (答)

(2) C および3つの直線 $x = p, x = q, y = -7$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

図1から分るように、面積は

$$\begin{aligned} \int_p^q \{(x+1)(x-3) - (-7)\} dx &= \int_0^4 (x^2 - 2x + 4) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right]_0^4 = \frac{64}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

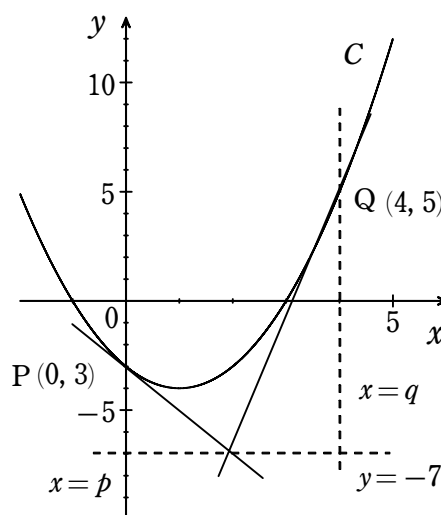


図1

< 解説 >

2次関数の微分、積分の問題。(1)は接線の方程式、両者の交点、2点を結ぶ直線の傾き等から、丁寧に計算していけば良い。

3 数列の問題で理系の2と共通

次の条件(ア)~(ウ)を満たす数列 $\{p_n\}$ について考える。

(ア) $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots$ である。

(イ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ はどれも自然数である。

(ウ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ の中にはすべての自然数 k が現れ、その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)~(ウ)を満たし、すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, k, k, \dots, k, \dots$$

を $\{a_n\}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 項数5の数列で、数列 $\{p_n\}$ の初めの5項となり得るものをすべて挙げよ。

数列の和が短い順に並べることを考えて、列挙していく。すると自然数 k が k 個現れる数列が最大になるので、そこまでで許容される数列が決まる。

$$1, 1, 1, 2, 2 \quad 1, 1, 2, 2, 2 \quad 1, 1, 2, 2, 3 \quad 1, 2, 2, 2, 2 \quad 1, 2, 2, 2, 3 \quad 1, 2, 2, 3, 3 \quad (\text{答})$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第210項 a_{210} の値を求めよ。

$$\text{自然数 } k \text{ までの項数は } \sum_{n=1}^k n = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ 自然数 } k+1 \text{ までの項数は } \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq 210 \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ だから, これを満たすのは } k=20$$

$$k=20 \text{ で } \frac{k(k+1)}{2} = 210 \text{ だから, 自然数 } 20 \text{ に対応する最後の項が } a_{210} \text{ で,}$$

$$a_{210} = 20 \quad (\text{答})$$

(3) $\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。

小さい自然数が含まれるほど、 $\sum_{i=1}^{50} p_i$ は小さくなる。したがって自然数 n に対応する項数が $n+2$

になる場合に $\sum_{i=1}^{50} p_i$ が最小になる。

$$\text{自然数 } k \text{ までの項数は } \sum_{n=1}^k (n+2) = \frac{k(k+1)}{2} + 2k, \text{ これが } 50 \text{ 以下であるためには, } k \leq 7$$

$$k=7 \text{ のとき, } \frac{k(k+1)}{2} + 2k = 42 \text{ だから, } k=50-42=8 \text{ の項が } 8 \text{ 項含まれる。したがって,}$$

$$\sum_{i=1}^{50} p_i = \sum_{n=1}^7 n(n+2) + 8^2 = \sum_{n=1}^7 (n^2 + 2n) + 64 = \frac{1}{6} \times 7 \times (7+1)(2 \times 7 + 1) + 7 \times (7+1) + 64$$

$$= 260 \quad (\text{答}) \quad \text{ただし, ここで } \sum_{n=1}^k n^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) \text{ を用いた。}$$

< 解説 >

数列の問題。難しい問題ではないが、題意を的確に捉えることが必要である。(1)では項数5の意味を理解する。列挙する場合、ある規則によって挙げていかないと見落とす。1の個数ごとに許容される2と3の組み合わせを挙げるのも良い。(2)数列 $\{a_n\}$ では、自然数 n に対応する項数は n である。

(3)では $\sum_{n=1}^k n^2$ の公式を覚えていないと解答は困難である。

4 確率の問題で理系の5 (1) (2) と共通

座標平面上の4点をA (1, 1), B (1, 2), C (2, 2), D (2, 1)とする。点Aに駒をおき, 1個のさいころを投げて, 出た目の数だけこれらの点の上を時計回りに駒を進める試行を考える。たとえば, 出た目が5のとき, 駒はA→B→C→D→A→Bと進みBに止まる。1回目の試行で止まる点をPとし, 駒を点Aに戻し, 2回目の試行で止まる点をQとする。このとき, 次の問いに答えよ。ただし, Oは原点を表す。

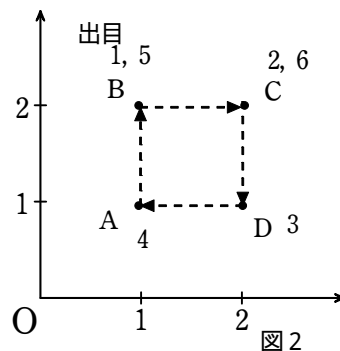
(1) O, P, Qが同一直線上にある確率を求めよ。

O, P, Qが同一直線上にある場合を考える。

以下で, (1回目の出目, 2回目の出目)とする。

図2に4点と出目を対応させて示す。これを

参照しながら考える。



(1) P, Qが同一の点である場合

1回目と2回目の試行の出目が同じ場合: 6通り

1回目と2回目の試行の出目の差が4: (1, 5), (5, 1), (2, 6), (6, 2)の4通り

(2) (P, Q)が(A, C)あるいは(C, A): (4, 2), (4, 6), (2, 4), (6, 4)の4通り

一方, 2回の試行で出目の組み合わせの場合の数は $6 \times 6 = 36$ 通りだから,

$$O, P, Q \text{ が同一直線上にある確率} = \frac{6 + 4 + 4}{36} = \frac{7}{18}$$

(2) O, P, Qを通る2次関数 $y = f(x)$ のグラフがただ一通りに定まるとき, P, Qの位置およびその2次関数をすべて求めよ。

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ とすれば, 原点Oを通るので, $c = 0$

P, Qが同一点である場合には, a, b が一意に定まらないので, 2次関数是一通りに定まらない。

また, y の値が異なる2点を2次関数を通ることはないから, PがAでQがBあるいはその逆になることはない。C, Dの場合も同じ。またOPQが一直線ではない。すると,

(1) (P, Q)が(B, C)あるいは(C, B)の場合

$y = ax^2 + bx$ がB (1, 2), C (2, 2)を通るので, $2 = a + b, 2 = 4a + 2b$

$a = -1, b = 3$, したがって,

2次関数は $y = f(x) = -x^2 + 3x$, PがBでQがCあるいはその逆の位置 (答)

(2) (P, Q)が(A, D)あるいは(D, A)の場合

$y = ax^2 + bx$ がA (1, 1), D (2, 1)を通るので, $1 = a + b, 1 = 4a + 2b$

$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$, したがって,

2次関数は $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$, PがAでQがDあるいはその逆の位置 (答)

(3) (P, Q)が(B, D)あるいは(D, B)の場合

$y = ax^2 + bx$ がB (1, 2), D (2, 1)を通るので, $2 = a + b, 1 = 4a + 2b$

$a = -\frac{3}{2}, b = \frac{7}{2}$, したがって,

2次関数は $y = f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$, PがBでQがDあるいはその逆の位置 (答)

(3) O, P, Qが同一直線上にあるとき $X = 1$, またO, P, Qを通る2次関数 $y = f(x)$ のグラフがただ

一通りに定まるとき $X=2$ ，そのどちらでもないとき $X=0$ とする。このとき， X の期待値を求めよ。

(1) O, P, Q が同一直線上にある確率は(1)により $\frac{7}{18}$

(2) O, P, Q を通る2次関数 $y=f(x)$ のグラフがただ一通りに定まる確率

(P, Q)が(B, C)あるいは(C, B)となる場合の数は 4×2 通り

(P, Q)が(A, D)あるいは(D, A)となる場合の数は 1×2 通り

(P, Q)が(B, D)あるいは(D, B)となる場合の数は 2×2 通り

$$\text{だから } \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

(1)と(2)の両者を同時に満足する場合はない。

$$\text{したがって } X \text{の期待値は } 1 \times \frac{7}{18} + 2 \times \frac{7}{18} = \frac{7}{6} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

確率と2次関数の一意性を絡ませた問題。さいころを2度振る試行の出目の組み合わせの数を考えれば良い。順列，組み合わせ等を含む複雑な計算を必要としないので，考え方を確立すれば困難はなかろう。出目の組み合わせに関する見落としをしないこと。

(1) では題意を的確に捉え，直線になるには(P, Q)がどの点であるべきか，見落としのないように考える。(2) 一般に2次関数の係数は3個だから，直線上にはない3点を通る2次関数はただ一通りである。そのような3点に対して2次関数を求める。(3) 2次関数を通る点(P, Q)の出目の組み合わせの数から確率を求める。

< 総評 >

[1] 指数，対数，2変数2次式の最大値最小値など，まぎれの少ない基本問題だから，確実にできること。

難易度はC。

[2] 2次関数（放物線）の微分，接線，積分（面積）など，基本事項に関わる問題だから，確実にできること。難易度はB。

[3] 理系と共通の数列の問題。一見複雑そうだが，ていねいに問題文を読めば，簡単な数列であることが分る。題意の理解が基本である。難易度はB。

[4] (3) を除いて，理系と共通。確率の問題としては，難しい部類ではない。題意を的確に捉えることが大事である。場合の数を見落としなく考えれば良い。難易度はAー。

100331