2010（H22)年度　東北大学　前期入学試験　物理解説

$\boxed{1}$

問（１）(a)

小球AとBが一体のときの運動方程式は$(2m+m)a=F=-kx$，単振動をするから，

$x=\sin\omega_0 t$ とすれば，$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$，$T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$

一方Bが切り離された後のAの運動は，$\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$，$T_1=\dfrac{2\pi}{\omega_1}=2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$

したがって，$\dfrac{T_1}{T_0}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　　（答）

(b)

Bはばねが自然長のときに切り離される。このとき，ばねの弾性エネルギーは0だから，エネルギー保存則により，小球AとBの運動エネルギーは初期のばねの弾性エネルギーに等しいから，

$\dfrac{3mv^2}{2}=\dfrac{kd^2}{2}$だから，$v=d\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$　　（答）

(c)

小球Aがもつ運動エネルギーと振幅d_0のばねの弾性エネルギーが等しい。したがって，

$\dfrac{kd_0{}^2}{2}=mv^2=\dfrac{kd^2}{3}$，$d_0=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,d$

問（２）(a)

点Pに到達するまでの時間は，$t_p=\dfrac{R}{\sqrt{2}\,v_0}$　　(1)

この間に小球が重力により落下する距離は，$h+R\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=R=\dfrac{gt_p{}^2}{2}$　　(2)

(1)を(2)に代入してv_0について解くと，$v_0=\dfrac{\sqrt{gR}}{2}$　　（答）

(b)

水平から45°傾いた滑らかな面にはねかえり係数１で衝突する。すると，面に垂直な速度成分は向きを逆転させ，平行な成分は変化しない。したがって小球は面で反射する。また面は45°傾いているので，水平方向（x方向）と鉛直方向（y方向）の速度が入れ替わる。

衝突直前の速度のx成分は$v_0=\dfrac{\sqrt{gR}}{2}$，y成分は$v_{py}=gt_p=\dfrac{gR}{\sqrt{2}\,v_0}=\sqrt{2gR}$

したがって，はねかえり直後の速度のx成分は$\sqrt{2gR}$，y成分は$\dfrac{\sqrt{gR}}{2}$　　（答）

問３(a)

小球Bに及ぼす球面からの抗力を考える。

球面の中心O方向に働く力（向心力）は，$F_o=mg\sin\alpha$　　(1)

小球Bの円周速度による遠心力は，$F_c=\dfrac{mv_r{}^2}{R}$　　(2)

球面からの抗力をNとすれば，面での力のつりあいによって，$F_o=F_c+N$　　(3)

$N=0$のとき，小球は球面から離れるから，$mg\sin\alpha=\dfrac{mv_r{}^2}{R}$，$\sin\alpha=\dfrac{v_r{}^2}{gR}$　　(4)

エネルギー保存則により，$\dfrac{mv_r{}^2}{2}=\dfrac{mv^2}{2}+mg(R-H)=\dfrac{mv^2}{2}+mg(R-R\sin\alpha)$　　(5)

(4), (5)から，$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{v^2}{gR}+2\right)$　　（答）

(b)

(1)で$\sin\alpha=1$のとき，$F_c\geqq F_o$であれば，$\alpha=90°$で小球は球面台から離れる。

したがって，$\dfrac{mv^2}{R}\geqq mg$，$v\geqq\sqrt{gR}$，したがって速度の最小値は，$v_1=\sqrt{gR}$　　（答）

(c)

(a)の答により，$H=R\sin\alpha=\dfrac{R}{3}\left(\dfrac{v^2}{gR}+2\right)$

ただし，$v\geqq v_1$のときは$\alpha=90°$で，$H=R$

したがって，Hと速度vの関係は図１のようになる。

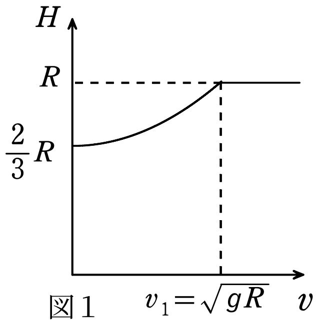

図１

＜解説＞

ばねによる単振動，重力の作用下での球面を滑り落ちる下降，に関わる力学の問題。題意は簡明であり，誘導的に問題が作成されているので，考え易い。

問（１）ばねの単振動の周期，ばねに蓄えられる弾性エネルギーと運動エネルギーなどの知識が問われるが，難しい思考を必要とはしない。素直に考えれば良い。

問（２）球面に衝突したときの小球の振る舞いの問題。一見、難しいように感じるが，簡明に扱えるように問題が設定されている。

はねかえり係数１（弾性衝突）ということは，図２のように小球は衝突面で反射する。なぜなら，衝突面に平行な速度成分は変化せず，垂直な速度成分は向きを逆転するからである。また，衝突面が水平面から45°傾いているということは，図３のように，鉛直方向の速度は水平方向の速度に，水平方向の速度は鉛直方向の速度に変換される。

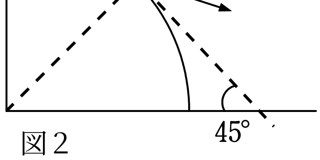

図２

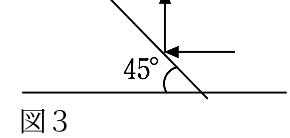

図３

これについて，計算によって確認してみよう。

衝突直前のx方向速度は$v_0=\dfrac{\sqrt{gR}}{2}$，y方向速度は$v_{py}=gt_p=\dfrac{gR}{\sqrt{2}\,v_0}=\sqrt{2gR}$

衝突面はx方向に対して45°傾いているから，衝突面に平行な速度成分は$v_{sp}=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}+\dfrac{v_{py}}{\sqrt{2}}$，

衝突面に垂直な速度成分は$v_{ss}=\dfrac{-v_0}{\sqrt{2}}+\dfrac{v_{py}}{\sqrt{2}}$

衝突によって，平行成分は変化しないので，$v_{sp}'=v_{sp}$，垂直成分は大きさは等しく向きが逆になるので，$v_{ss}'=-v_{ss}=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}-\dfrac{v_{py}}{\sqrt{2}}$

したがって，はねかえり直後の小球Bの速度のx成分は,

$$v_x'=\frac{v_{sp}'}{\sqrt{2}}-\frac{v_{ss}'}{\sqrt{2}}=\left(\frac{v_0}{2}+\frac{v_{py}}{2}\right)+\left(\frac{v_0}{2}-\frac{v_{py}}{2}\right)=v_{py}=\sqrt{2gR}$$

y方向成分は，$v_y'=\dfrac{v_{sp}'}{\sqrt{2}}+\dfrac{v_{ss}'}{\sqrt{2}}=\left(\dfrac{v_0}{2}+\dfrac{v_{py}}{2}\right)+\left(\dfrac{v_0}{2}-\dfrac{v_{py}}{2}\right)=v_0=\dfrac{\sqrt{gR}}{2}$

問（3）小球が球面を滑り落ちるとき，小球には重力に基づく向心力が働く。小球が球面に拘束されているということは，向心力と（遠心力＋面からの抗力）がつりあっている。球面から離れるということは，球面からの抗力がなくなるということである。

(b)では，初速が十分に速ければ，球面に入った時点で，拘束力が0になってしまう。つまり球面から離れる。(c)グラフは厳密なものである必要はない。(a)によって，Hとvの関係は求まる。放物線であること，$v=0$と$v\geqq v_1$でのHの値を的確に表現できれば良い。

$\boxed{2}$

問１(a)

電流が流れる角棒に磁場が及ぼす力はBIL，また角棒が移動すると、反対方向に動摩擦力が働く。したがって，角棒の運動方程式は，$m\alpha=BIL-\mu mg$　　(1)

(b)

角棒を含む閉回路に含まれる磁束密度が変化するので，誘導起電力が発生する。

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t}=BLv \qquad (2)$$

この起電力は電池による電流とは逆方向の電流を流すように働くので,

$RI=(E-BLv)$，したがって$I=\dfrac{E-BLv}{R}$　　(3)

(c)

角棒が一定の速度になるということは，(1)で加速度αを0とすれば，$I_c=\dfrac{\mu mg}{BL}$　　（答）

これを(3)に代入すれば，$v_c=\dfrac{E}{BL}-\dfrac{\mu mgR}{B^2L^2}$　　（答）

(d)

角棒の抵抗値がRで，そこに電流I_cが流れるから，発生するジュール熱は，$Q={I_c}^2R$　　（答）

(e)

角棒が摩擦力に抗してレール上を移動するので，摩擦熱が発生する。電池のエネルギーは、この摩擦熱にも変換される。単位時間当たりに発生する摩擦熱Q_fは，角棒が摩擦力μmgに抗して単位時間当たりv_c移動することで発生するから，

$$Q_f = \mu mgv_c = \mu mg\left(\frac{E}{BL} - \frac{\mu mgR}{B^2L^2}\right) \qquad \text{（答）}$$

問２(a)

問題図３と等価な回路を図４に示す。CとDにおいて角棒とレールの間にコンデンサーが形成される。したがってコンデンサーが二つ直列接続された回路になる。コンデンサーの容量は

$C_p = \dfrac{\varepsilon ab}{d}$，これが直列に接続されているから，回路全体の容量は，

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_p} = \frac{2}{C_p}，\text{したがって，}C_t = \frac{C_p}{2} = \frac{\varepsilon ab}{2d} \qquad \text{（答）}$$

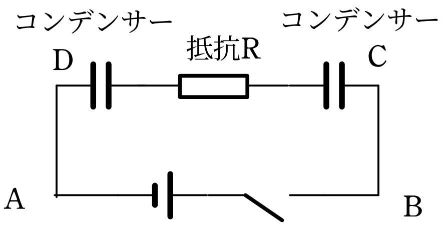

図４

(b)

摩擦がないので，角棒の運動方程式は問１(1)から$m\alpha = BIL$　(1)
角棒が移動することにより，逆起電力が発生するから，等価回路は図５のようになる。これにキルヒホッフの第２法則を適用すると，$E - vBL - \dfrac{Q}{C_t} - IR = 0$　(2)
角棒は問１と同様に，フレミングの左手の法則により，正の方向に移動する。初めに電流が流れてないときは，角棒には加速度が働かないので，速度は0である。コンデンサーの電荷Qが増大するにつれ，(2)により電流Iが減少するので，(1)により加速度が小さくなって，速度の増大も小さくなる。充電が終わると，$I = 0$，$\alpha = 0$となり，速度vは一定になる。

以上の考察により，角棒の速度変化のグラフとして，適当なのは，（ウ）である。

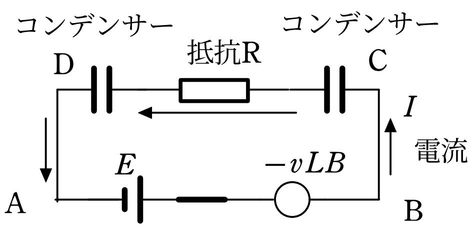

図５

<解説>

問１

電流に及ぼす磁場の力によってレール上を動く導体棒の実験は入試問題に良く出てくる。磁場中の導線に電流を流すと力が働く（フレミングの左手の法則）。その力によって導体棒は動く。一方，導体棒を含む回路を横切る磁束が変化するので，回路に誘導起電力が発生する。この二つの電磁現象を描くことが必要である。その上で，棒の運動という力学を考えていく。

(a)導体棒に働く力は，電流に及ぼす磁場の力と動いているときの動摩擦力である。

(b)電池の起電力に加えて，回路を横切る磁束密度の変化による逆起電力によって電流が流れる。

(c)時間が経つにつれ，導体棒の速度が一定になり，電流も一定になるのはなぜか。導体棒に働く加速度によって，導体の速度が増加する。すると，(2), (3)のように逆起電力が増加して，電流が減少する。すると，(1)のように加速度が減少して0になる。つまり速度が一定になる。速度が一定になると(3)により電流も一定になる。

(d)これは即答できなければならない。

(e)一定の電流が流れているので，電池が仕事をしている。その仕事は，導体に発生するジュール熱と，角棒が動摩擦に抗して移動することによる摩擦熱に変換されている。角棒の運動エネルギーは，一定の電流になるまでに電池がなした仕事によるものであり，運動エネルギーとして保存されている。

問２

(a)レールと角棒が対面する間にコンデンサーが形成される。容量は対面面積に比例し，間隔（ここでは誘電体薄膜の厚さ）に反比例する。コンデンサーは２箇所に形成されるが，それらは直列接続である。

(b)適正なグラフがどれかは，容易に判断できるだろう。消去法でも良い。センター試験によく出題される選択問題に似ている。ここでは，その理由を的確に記述することが求められる。コンデンサーへの充電が進むにつれ，電流が小さくなるので，角棒に働く力が小さくなる。したがって，速度の増加は次第に小さくなる。コンデンサーの充電が終わると、電流が流れず力が働かないので，速度は一定となる。このように，回路の物理現象の過程を捉えれば良い。

さて，グラフを見ると，（ア）（ウ）（オ）（キ）の系列と（イ）（エ）（カ）（ク）の系列では、速度の向きが逆である。ここで速度は正の向きだから，前者の系列が選択される。（ア）（オ）は速度が特異に変化する点がある。これは，この回路がある時点で，別の物理現象を始めるということを意味する。しかしこの回路は直流電源によるコンデンサーへの充電という現象のみだから，これらは対応しない。（キ）は速度が振動するが，速度を振動させるような現象ではない。妥当なのは（ウ）のみだということが分る。

3

問１(a)

10目盛で１波長になっているから，周期は，$T_1 = 2.0\times10^{-4}\times10 = 2.0\times10^{-3}$ s　（答）

振動数は周期の逆数だから，$f_1 = \dfrac{1}{T_1} = \dfrac{1}{2.0\times10^{-3}} = 500$ Hz　（答）

(b)

音速＝（振動数×波長）だから，$\lambda_1=\dfrac{V}{f_1}=\dfrac{3.4\times10^2}{500}=0.68$ m　　（答）

(c)

開管の定常波が成立する条件は，$2l=n\times\dfrac{\lambda}{2}$　($n=1,\ 2,\ \ldots\ldots$)だから，$\lambda=\dfrac{4l}{n}$

$n=1$のとき，$\lambda=\lambda_1=0.68$だから，$l=\dfrac{0.68}{4}=0.17$

波長$\lambda=0.8l$に対応する周波数は，$f=\dfrac{V}{0.8l}=\dfrac{3.4\times10^2}{0.8l}=\dfrac{3.4\times10^2}{0.8\times0.17}=2500$ Hz　　（答）

(d)

図６のようにマイクの位置をPとする。音源となる二つの開口をA，Bとする。APとBPの差が波長の整数倍のとき，音波は干渉によって強めあう。

$\mathrm{AP}=\sqrt{\{(8l)^2+(y-l)^2\}}$，$\mathrm{BP}=\sqrt{\{(8l)^2+(y+l)^2\}}$

$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}=8l\left\{\sqrt{1+\left(\dfrac{y+l}{8l}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\dfrac{y-l}{8l}\right)^2}\right\}\fallingdotseq 8l\left\{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y+l}{8l}\right)^2-1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y-l}{8l}\right)^2\right\}=\dfrac{y}{4}$

したがって，$\dfrac{y}{4}=n\lambda=0.8nl$，$y=3.2nl$　($n=0,1,2,\ldots$)を満たすyにおいて，音波が強めあう。

すると，これに合致するグラフは（ウ）である。

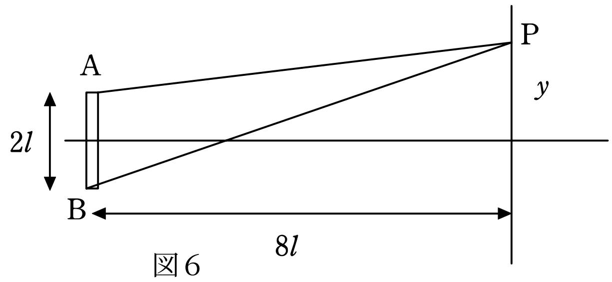

図６

問(2)(a)

円周の接線方向に速度$l\omega$をもつから，$v_x=l\omega\cos\omega t$，$v_y=l\omega\sin\omega t$　　（答）

(b)

ドップラー効果によって，マイクで検出する音波の周波数がシフトする。マイクに対して，音源が最も速く遠ざかるのは，開口端が$y=l$にあるときで，その際に観測される波長が一番長い。

すなわち，$\lambda_{max}=\dfrac{V}{f_{min}}$，$f_{min}=\dfrac{Vf}{V+v_{xmax}}$，$\lambda_{max}=\dfrac{V}{f_{min}}=\dfrac{V+v_{xmax}}{f}=\dfrac{0.8l(V+l\omega)}{V}$　　（答）

また、音源が最も速くマイクに近づいてくるのが，開口端が$y=-l$にあるときで，その際に観測される波長が一番短い。すなわち

$\lambda_{min}=\dfrac{V}{f_{max}}$，$f_{max}=\dfrac{Vf}{V-v_{xmax}}$，$\lambda_{min}=\dfrac{V}{f_{max}}=\dfrac{V-v_{xmax}}{f}=\dfrac{0.8l(V-l\omega)}{V}$　　（答）

(c)

$t=0$で$y=l$にある開口端の速度は，$y=-l$の開口端の速度と大きさが同じで，逆方向だから，

$v_{ux}=-l\omega\cos\omega t$，$v_{uy}=-l\omega\sin\omega t$

したがって,

$y=-l$の開口端からの音波の周波数は,

$$f_d=\frac{Vf}{V-v_x}=\frac{Vf}{V-l\omega\cos\omega t}$$

$y=l$の開口端からの音波の周波数は,

$$f_u=\frac{Vf}{V-v_{ux}}=\frac{Vf}{V+l\omega\cos\omega t}$$

したがって，うなりの繰り返しの数（単位時間あたりのうなりの数）は

$$f_d-f_u=Vf\left(\frac{1}{V-l\omega\cos\omega t}-\frac{1}{V+l\omega\cos\omega t}\right)=\frac{2Vfl\omega\cos\omega t}{V^2-(l\omega\cos\omega t)^2}$$

$\cos\omega t=1$のとき（すなわち管がy軸と一致しているとき），分母が最小，分子が最大になるから，うなりの繰り返し数の最大，すなわちうなりの単位時間あたりの最大値は

$$max(f_d-f_u)=\frac{2Vfl\omega}{V^2-l^2\omega^2}=\frac{2V^2\omega}{0.8(V^2-l^2\omega^2)}=\frac{5V^2\omega}{2(V^2-l^2\omega^2)}\qquad\text{（答）}$$

<解説>

開管に発生する音波の定常波についての問題。

問(1)

(a)グラフをきちんと読み取ること。

(b)音速，波長，振動数という波動の３要素の関係を理解していること。

(c)開管に発生する定常波と管長の関係を理解していること。図に描いてみると良い。

(d)二つの音源からの干渉によって波動が強めあう条件を理解していること。経路差の計算をする際に近似式を使う必要がある。$\sqrt{1+h}\fallingdotseq 1+\frac{h}{2}$を用いる。ただし，$h\ll 1$（$h$は1より十分小さい）。

問(2)

(a)開口端は円周方向の速度をもつ。両端の速度は円の中心に関して対称である。すなわち，大きさは同じで，逆方向のベクトルとなる。

(b)マイクをx方向に管長lに比べて十分離したということは，マイクで観測する音波の音速はほぼx方向の成分と等しく，y方向の成分は無視できるということである。したがって，音速のx方向成分の最大値（近づく場合），最小値（遠ざかる場合）のドップラー効果による波長の変化を考える。

(c)振動数がわずかに違う音波が重なったとき，音の強さが，振動数の違いに等しい繰り返し数で変化する現象をうなりという。教科書では，次のように説明されている。

振動数f_1とf_2の音波が重なるとき，ある時刻で音波の山の頂点どうしが重なると，強めあう。その後，振動数が異なるので音波の頂点がずれていき，重なった音波は次第に弱くなり，半波長ずれてちょうど頂点と谷が重なると，重なった音波は最も弱くなる。さらにずれていき，１波長ずれて，再び頂点どうしが重なると，音波は強めあう。これを繰りかえすので，音が強くなったり弱くなったりを繰り返す。これをうなりという。

したがって，音波が強くなる間の時間をTとすれば，その間にある音波の山の数はf_1T，f_2Tだから，$|f_1T-f_2T|=1$。したがって，うなりの繰り返しの時間間隔は

$T=\dfrac{1}{|f_1-f_2|}$，時間あたりのうなりの数は，$N=\dfrac{1}{T}=|f_1-f_2|$

＜総評＞

「結果だけでなく，考え方や計算の過程も記せ」というところに，理系に伝統のある東北大らしさを感じる。他大学に比べて，斜視図等を使うなど，問題図がていねいに描かれていて，分かり易い。小問が誘導的に連続しているので，現象の過程の理解を助けてくれる。全体として物理現象を簡明に扱えるような問題であって，錯綜して複雑なところは少ない。

$\boxed{1}$ 力学の問題。ばねによる単振動，落下運動とはね返り，球面に沿った運動などの力学現象に対する理解を問う問題である。難易度はB。

$\boxed{2}$ 電磁気の問題。しかし力学が絡む。このような問題設定は，いろいろなバリエーションがあるが，教科書にも出ているし，多大学の入試にも出ている。この問題の特徴は，レールと移動する角棒との間に誘電体の薄膜があって，コンデンサーを形成するという設定になっていることである。充電する過程と角棒の運動とを結びつけるところに問題の新しさがある。

キルヒホッフの第2法則によって，充電が進むにつれ，回路の電流が減り，角棒に働く力が減って，速度が一定になっていく過程を理解すること。難易度A。

$\boxed{3}$ 音波の問題で，定常波，干渉，ドップラー効果，うなりなど音波に関する諸現象が盛り込まれた問題設定で，良く工夫されていることに感心する。音波の干渉の問題では，経路差の計算は光波でも同じことだから，理解しておくこと。ドップラー効果やうなりは音波の問題では出題される場合が多いから、的確に記憶理解しておくこと。問２(b)(c)は難易度A。

100512