2010（H22)年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部•医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻•検査技術科学専攻）
•歯学部•薬学部•工学部•農学部

$\boxed{1}$　$f(x)=x^3+3x^2-9x$とする。$y<x<a$を満たすすべてのx, yに対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$$

がなりたつようなaの範囲を求めよ。

$a-y=(a-x)+(x-y)$とおくと，$f(x)\{(a-x)+(x-y)\}>(x-y)f(a)+(a-x)f(y)$，だから

$(a-x)\{f(x)-f(y)\}+(x-y)\{f(x)-f(a)\}>0$　　①

$f(x)-f(y)=(x^3+3x^2-9x)-(y^3+3y^2-9y)=(x-y)\{x^2+xy+y^2+3(x+y)-9\}$　　②

$f(x)-f(a)=(x^3+3x^2-9x)-(a^3+3a^2-9a)=(x-a)\{x^2+xa+a^2+3(x+a)-9\}$　　③

(1)に(2)，(3)に代入して整理すると，

$(a-x)(x-y)\{x^2+xy+y^2+3(x+y)-9-x^2-xa-a^2-3(x+a)+9\}>0$

$x(y-a)+(y^2-a^2)+3(y-a)=(y-a)(x+y+a+3)>0$

$y-a<0$だから，$x+y+a+3<0$　　④

$x=a-\delta_x$，$y=a-\delta_y$，$\delta_x, \delta_y>0$とおくことができるので

$x+y+a+3=a-\delta_x+a-\delta_y+a+3=3a+3-\delta_x-\delta_y<0$　　⑤

ここで，x, yをどんどんaに近づける，すなわちδ_x, δ_yをどんどん0にして⑤を成り立たせるには，

$3a+3\leqq 0$が必要で，したがって，$a\leqq -1$　　（答）

＜解説＞

単純に関数の多項式を計算して，ゴリゴリ計算して行けば解けそうだ。しかし，それでは計算が複雑になって，時間がかかりそうな予感がする。しかも式の形が，何か一工夫を要求しているように見える。そこで，$a-y=(a-x)+(x-y)$とおいて式を変形してみるのが，一工夫というわけだ。

図形問題でいえば補助線のようなものだ。とたんに，複雑そうな計算が因数分解されて，見通しが良くなってくる。なぜ，このような着想が浮かぶのか？　いろいろな問題で，このような置き換えをする解法を経験すると，直感が働くのだろう。また，分子の形式と同じ形式を$(a-y)f(x)$で作ると，計算が簡明になりそうだと考えることも良い。

その上で，得られた④の条件から答を導くには一工夫必要である。$x+y+a+3<3a+3$だから，直感的に$3a+3\leqq 0$が必要との答を導いても正解とされよう。加えて，$a\leqq -1$ならば$x+y+a+3<0$であり，$a>-1$になると，$x+y+a+3<0$が成立しない場合があることを記述すれば完璧である。数学的には解答のように記載する。

$\boxed{2}$ a, bを正の実数とする。曲線C: $y=x^3-a^2x+a^3$と点P$(b, 0)$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点Pから曲線Cに接線がちょうど3本引けるような点(a, b)の存在する領域を図示せよ。

点(x, y)を通り傾きが$\dfrac{dy}{dx}=3x^2-a^2$となる直線が接線である。すると点(x_t, y_t)を通る接線の式は，$y-y_t=(3{x_t}^2-a^2)(x-x_t)$　①

点P$(b, 0)$を通るとすれば，$-y_t=(3{x_t}^2-a^2)(b-x_t)$　②

(2)に$y_t={x_t}^3-a^2x_t+a^3$を代入して整理すると，

$-{x_t}^3+a^2x_t-a^3=-3{x_t}^3+3b{x_t}^2+a^2x_t-a^2b$，$2{x_t}^3-3b{x_t}^2+a^2(b-a)=0$　③

接線が3本引けるということは，③が3つ実数解をもつということである。そのためには，③の極値が図１のように2つあって，しかも正負に分かれる必要がある。

$f(x_t)=2{x_t}^3-3b{x_t}^2+a^2(b-a)$とおくと，

$f'(x_t)=6x_t(x_t-b)$，したがって$x_t=0$と$x_t=b$において極値をとる。

$f(0)=a^2(b-a)$，$f(b)=2b^3-3b^3+a^2(b-a)=-b^3+a^2(b-a)$

$f(0)f(b)<0$だから，$a^2(b-a)\{-b^3+a^2(b-a)\}<0$

したがって，$b>a$のときは，$a^3+b^3-a^2b>0$　④

しかるに(4)は　$a^3+b^3-a^2b=a^3+b(b^2-a^2)>0$と，$b>a$であれば常に成立。

一方，$b<a$のときは，$a^3+b^3-a^2b<0$が必要だが，$a^3+b^3-a^2b=a^2(a-b)+b^3>0$なので，$b<a$ではない。したがって，接線が3本引ける$(a, b)$の領域は図２のようになる。

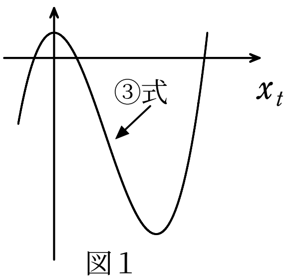

図１

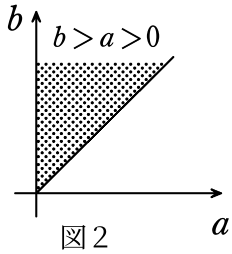

図２

(2) 点Pから曲線Cに接線がちょうど2本引けるとする。2つの接点をA，Bとしたとき，∠APBが90°より小さくなるためのaとbの条件を求めよ。

接線がちょうど2本引けるということは，③式が2つの実数解をもつということである。ところが，③は2つの極値をもつから，極値のいずれかが，実数解でなければならない。

$x_t=0$が解ならば，$f(0)=a^2(b-a)=0$，したがって$b=a$

一方，$f(b)=-b^3+a^2(b-a)<0$なので，$x_t=b$は解ではない。

③で$b=a$とおけば，$2{x_t}^3-3b{x_t}^2=0$により，$x_t=0$, $\dfrac{3}{2}b$が接点のx座標となる。

点A$(x_a, y_a)=(0, a^3)$，点B$(x_b, y_b)=\left(\dfrac{3b}{2}, y_b\right)$とすれば，①により

接線APの傾きは　$\tan\theta_a=3{x_a}^2-a^2=-a^2$,

接線BPの傾きは　$\tan\theta_b = 3{x_b}^2 - a^2 = \frac{27}{4}b^2 - a^2 = \frac{23a^2}{4}$

ただし，θ_a，θ_bはAP，BPがx軸となす角である。

∠APB<90°だから，$0 < \theta_a - \theta_b < 90°$

したがって，$0 < \tan(\theta_a - \theta_b) = \frac{\tan\theta_a - \tan\theta_b}{1 + \tan\theta_a \tan\theta_b} = \frac{-27a^2}{4 - 23a^4}$

したがって，$a^4 > \frac{4}{23}$となるので，$a > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{23}}$

したがって，接線が2本引けて，∠APB<90°となる条件は，$a = b > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{23}}$　　　（答）

＜解説＞

微分の問題であるが，題意を数学表現に変換してゆくところに難しさが伴う問題である。

(1) 接線が3本引けるということを数学的にどのように表現すべきか，考察しなければならない。接点が３つ存在するわけだから，接点のx座標が満足すべき式で，実数解が３つ存在する条件を求めることになる。ここを見通せれば，解答は近い。

(2) 接線が2本引けるという条件は，①では３つだったのが1つ減ることで，１つが重根、すなわち極値が接点のx座標の実数解になるということである。このように考察すれば，解答は近い。

ここでは，∠APB<90°の表現に，接線の傾きを用いたが，ベクトル演算を用いる方法もあろう。

$x_t = 0$のとき$y_t = a^3$，$x_t = \frac{3}{2}b$のとき$y_t = \frac{27}{8}b^3 - \frac{3a^2b}{2} + a^3 = \frac{23a^3}{8}$

したがって，点Aは$(0, a^3)$，点Bは$\left(\frac{3b}{2}, \frac{23a^3}{8}\right)$だから，$\overrightarrow{PA} = (-b, a^3)$，$\overrightarrow{PB} = \left(\frac{b}{2}, \frac{23a^3}{8}\right)$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB\cos(\theta_a - \theta_b)$，∠APB$= \theta_a - \theta_b <$90°だから，

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{-b^2}{2} + \frac{23a^6}{8} = \frac{-a^2}{2} + \frac{23a^6}{8} > 0$，$a^4 > \frac{4}{23}$となる。

$\boxed{3}$　1，2，3，4の数字が１つずつ書かれた4枚のカードを用いて，次の手順で5桁の整数をつくる。まず1枚を取り出して現れた数字を１の位とする。取り出した1枚を元に戻し，4枚のカードをよく混ぜて，再び１枚を取り出して現れた数字を10の位とする。このような操作を5回繰り返して，5桁の整数をつくる。得られた整数をXとするとき，以下の問いに答えよ。

(1)Xに数字1がちょうど2回現れる確率を求めよ。

5桁のうち1が2桁を占める場合の数は${}_5C_2 = 10$

他の3桁は1以外の3つの数のいずれでも良いから，場合の数は3^3

したがって，数字1がちょうど2回現れる場合の数は10×3^3

一方，4つの数字がつくる5桁の数の場合の数は4^5だから，

Xに数字1がちょうど2回現れる確率は，$\frac{10 \times 3^3}{4^5} = \frac{135}{512}$　　　（答）

(2)Xに数字1と数字2がちょうど1回ずつ現れる確率を求めよ。

5桁のうち1と2が2桁を占める場合の数は，1が2の上位桁のときが ${}_5C_2=10$

2が1の上位桁であるときが同じく ${}_5C_2=10$

他の3桁は1と2以外の2つの数のいずれでも良いから，場合の数は2^3

したがって，数字1と数字2がちょうど1回ずつ現れる場合の数は$2\times10\times2^3$

一方，4つの数字がつくる5桁の数の場合の数は4^5だから，

Xに数字1と数字2がちょうど1回ずつ現れる確率は，$\dfrac{2\times10\times2^3}{4^5}=\dfrac{5}{32}$　　（答）

(3)Xにちょうど2回現れる数字が1種類以上ある確率を求めよ。

１種類の場合と2種類の場合がある。

1種類の場合の数は，5桁のうち2桁を選ぶ場合が${}_5C_2=10$，さらに残り3桁がすべて異なる数字となる場合は，$3\times2\times1=6$，これが1，2，3，4と4つあるから、場合の数の合計は$10\times6\times4=240$

および残り3桁が全て同じ数字となる場合は$3\times1\times1=3$，これが1，2，3，4と4つあるから、場合の数の合計は$10\times3\times4=120$

2種類の場合の数は，4つの数字から2つを選ぶ場合が${}_4C_2=6$，2つの数字を4つ並べる場合の数は6，残りの桁位置は5箇所あって，選択できる数字は2つだから，場合の数の合計は

$6\times6\times5\times2=360$

したがって，Xにちょうど2回現れる数字が1種類以上ある確率は$\dfrac{120+240+360}{4^5}=\dfrac{45}{64}$

＜解説＞

題意の簡明な確率の問題。ていねいに場合の数を考えれば，さほど難しくはない。

(1)1～4の数字を重複を許して取って，5桁の数字を並べる場合の数は$4^5=1024$通り。この中で1が2回出てくる場合の数を求める。

(2)1，2が1回ずつ出る場合を考えるとき，1が上位桁になる場合と2が上位桁になる場合に分けて考えると考え易い。このように一気に求め難いとき，さらに細かく場合分けすると良い。

(3)1種類の場合と2種類の場合に分けて考えると良い。1種類の場合，他の数字が全て異なる場合と全て同じ場合があることに注意する。後者の場合が盲点になりやすい。

$\boxed{4}$　四面体ABCDにおいて，辺ABの中点をM，辺CDの中点をNとする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$$

を満たす点Pは存在するか。証明をつけて答よ。

図３を参照しながら考える。与えられた式を変形すると，$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB}$

$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{CA}$は面ACD内にあり，$\overrightarrow{BD}$は面BCD内にある。両面は辺CDにおいて交わるので平行ではない

から，$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BD}$となることはない。したがって，$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB}$となることはなく，
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$を満たす点Pは存在しない。

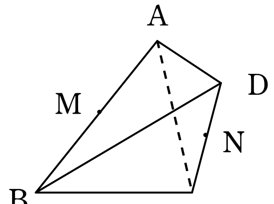

図３

(2) 点Qが等式

$$|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$$

を満たしながら動くとき，点Qが描く図形を求めよ。

$$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}=2\overrightarrow{QM},\ \overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}=2\overrightarrow{QN},\ したがって|\overrightarrow{QM}|=|\overrightarrow{QN}|$$

すなわち，点Qは点MとNから等距離の図形となる。それは線分MNを垂直2等分する面となる。

(3) 点Rが等式

$$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$$

を満たしながら動くとき，内積$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$はRのとりかたによらず一定であることを示せ。

$$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB})^2-2\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB}=4|\overrightarrow{RM}|^2-2\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB} \quad ①$$

$$|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2=(\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{RD})^2-2\overrightarrow{RC}\cdot\overrightarrow{RD}=4|\overrightarrow{RN}|^2-2\overrightarrow{RC}\cdot\overrightarrow{RD} \quad ②$$

△RAB，△RCDに余弦定理を適用すると

$$2\overrightarrow{RA}\cdot\overrightarrow{RB}=|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2$$

$$2\overrightarrow{RC}\cdot\overrightarrow{RD}=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2-|\overrightarrow{CD}|^2$$

これを①，②に代入すると

$$2(|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2)=4|\overrightarrow{RM}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2 \quad ③$$

$$2(|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2)=4|\overrightarrow{RN}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2 \quad ④$$

与えられた条件によって，③と④は等しいから

$$4|\overrightarrow{RM}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2=4|\overrightarrow{RN}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2 \quad ⑤$$

$$|\overrightarrow{RM}|^2-|\overrightarrow{RN}|^2=(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{RN})(\overrightarrow{RM}-\overrightarrow{RN})=(2\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MN})(-\overrightarrow{MN})=2\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{MN}-|\overrightarrow{MN}|^2$$

したがって，

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{RM}|^2-|\overrightarrow{RN}|^2)+\frac{|\overrightarrow{MN}|^2}{2}=\frac{(|\overrightarrow{CD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)}{8}+\frac{|\overrightarrow{MN}|^2}{2} \quad ⑥$$

⑥式は，内積$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$は四面体ABCDにのみ関係しているので，Rのとりかたには関係しないことを意味している。

(4)　(2)の点Qが描く図形と(3)の点Rが描く図形が一致するための必要十分条件は$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$であることを示せ。

(2)の点Qが描く図形と(3)の点Rが描く図形が一致するならば$|\overrightarrow{RM}|=|\overrightarrow{RN}|$である。すると⑤から$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$である。したがって，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$は(2)の点Qが描く図形と(3)の点Rが描く図形が一致するための必要条件である。

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ならば，⑤から$|\overrightarrow{RM}|=|\overrightarrow{RN}|$である。(2)における$|\overrightarrow{QM}|=|\overrightarrow{QN}|$と同じことを意味

するから，(2)の点Qが描く図形と(3)の点Rが描く図形が一致する。したがって，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$は(2)の点Qが描く図形と(3)の点Rが描く図形が一致するための十分条件である。

＜解説＞

ベクトルを利用する立体図形の問題である。四面体に関わる問題は東大理科の第6問にも出題されている。ベクトルを利用することにより，図形の要素間に潜む関係性を巧みに明らかにすることができる。だから，受験問題に出題されるのであろう。

(1) 四面体を構成する辺のベクトルは同じにはならないことを利用する。

(2) ベクトルの和を変換する基本的な考え方を用いる。

(3) ていねいに計算していけば良い。計算に際しては，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$などの関係を利用する。

(4) 必要条件と十分条件の意味を理解することは基本の基本である。(2)，(3)の解答中で導出した式を利用すれば，速やかに証明ができる。

次の$\boxed{5}$，$\boxed{6}$は理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）・歯学部・薬学部・工学部受験者のみ解答すること。

$\boxed{5}$ $0<t<3$のとき，連立不等式

$$\begin{cases} 0\leqq y\leqq \sin x \\ 0\leqq x\leqq t-y \end{cases}$$

の表す領域をx軸のまわりに回転して得られる立体の体積を$V(t)$とする。

$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$となる$t$と，そのときの$V(t)$の値を求めよ。

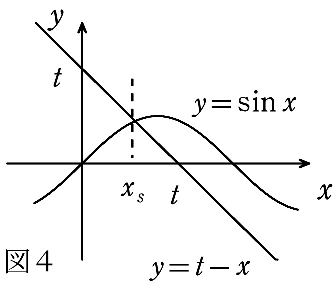

図４

図４を参照しながら考える。$0\leqq x\leqq t<3<\pi$だから，$y=\sin x$と$y=t-x$は1点で交わる。交点のx座標をx_sとする。すなわち，$t-x_s=\sin x_s$　①

$$V(t)=\pi\left\{\int_0^{x_s}\sin^2 x\,dx+\int_{x_s}^{t}(t-x)^2dx\right\}$$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$だから，$\sin^2 x=\dfrac{(1-\cos 2x)}{2}$

$$V(t)=\pi\left\{\frac{1}{2}\int_0^{x_s}(1-\cos 2x)dx+\int_{x_s}^{t}(t-x)^2dx\right\}=\pi\left\{\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{x_s}-\frac{1}{3}\left[(t-x)^3\right]_{x_s}^{t}\right\}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{2}\left(x_s-\frac{\sin 2x_s}{2}\right)+\frac{(t-x_s)^3}{3}\right\}=\pi\left\{\frac{1}{2}\left(x_s-\frac{\sin 2x_s}{2}\right)+\frac{\sin^3 x_s}{3}\right\}\quad ②$$

$$\frac{d}{dt}V(t)=\frac{dx_s}{dt}\frac{d}{dx_s}V(x_s)=\frac{\pi}{1+\cos x_s}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2x_s)+\sin^2 x_s\cos x_s\right\}$$

$$=\frac{\pi}{1+\cos x_s}\left\{\sin^2 x_s+\sin^2 x_s\cos x_s\right\}=\pi\sin^2 x_s=\frac{\pi}{4}$$

題意により，$0\leqq x_s<3$だから，$\sin x_s=\dfrac{1}{2}$，したがって，$x_s=\dfrac{\pi}{6}$および$\dfrac{5\pi}{6}$，これを①と②に代入すると

$x_s=\dfrac{5\pi}{6}$ のとき，$t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{6}$，$V(t)=\dfrac{\pi}{24}(1+2\pi-3\sqrt{3})$　　　（答）

しかるに $x_s=\dfrac{5\pi}{6}$ のとき，$t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5\pi}{6}>3$ となり，問題の条件を満たさないので解はない。

＜解説＞

三角関数を含む積分の問題。グラフを描いて題意を的確に把握する。すると，$y=\sin x$ と $y=t-x$ の交点を境に積分する関数が異なることが分る。体積は微小な厚さの円板 $\pi y^2 dx$ を積分してゆけば良い。計算はやや煩雑になるので，ていねいに行うこと。二つの解が出るが，一方は問題の条件を満たさないので，棄却しなければならない。これを忘れて，体積を求めるなどすると余計な時間をとられてしまう（筆者はひっかかってしまった）。

$\boxed{6}$ xy平面において，原点を中心とし P$(1, 0)$を頂点の１つとする正６角形をXとする。Aを２次の正方行列とし，Xの各頂点$(x,\ y)$に対して，行列Aの表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点 $(x',\ y')$ はXの辺上の点（頂点を含む）であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点Pが行列Aの表す移動でP自身に移るとき，Xの各頂点はXのいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列Aを求めよ。

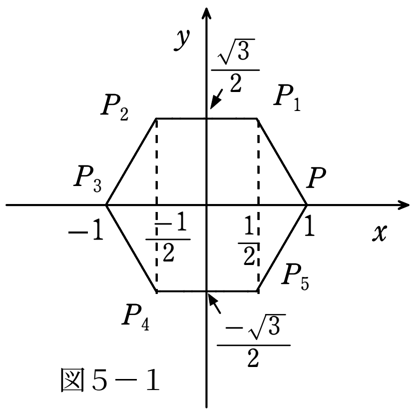

図５－１

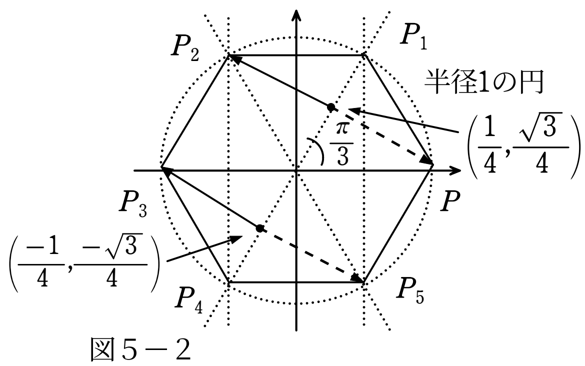

図５－２

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$として，点Pが行列$A$の表す移動でP自身に移るので，

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$により，$a=1$，$c=0$

Xの頂点の座標は，図５－１を参照するとPから反時計回りに

$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{P}_2\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3(-1, 0)$，$\mathrm{P}_4\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{P}_5\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

これらに行列Aの表す移動を施すと，

$$\mathrm{P}_1\to\mathrm{P}_1' : A\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{3}\,b}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}\,d}{2} \end{pmatrix} \qquad ①$$

$$\mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_2{}' : A\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}\,b}{2} \\ \frac{\sqrt{3}\,d}{2} \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$\mathrm{P}_3 \to \mathrm{P}_3{}' : A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_4 \to \mathrm{P}_4{}' : A\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}\,b}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}\,d}{2} \end{pmatrix} \qquad ③$$

$$\mathrm{P}_5 \to \mathrm{P}_5{}' : A\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}\,b}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}\,d}{2} \end{pmatrix} \qquad ④$$

①では$x'=\dfrac{1+\sqrt{3}\,b}{2}$，②では$x'=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,b}{2}$，このとき$y'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}d$，$b>0$とすれば，$\mathrm{P}_2$'は$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$上か$\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$上にある。すると$d=1$あるいは$-1$。すると$\mathrm{P}_1$'は$X$の辺上に存在しなくなる。$b<0$とすると$\mathrm{P}_2$'が$X$の辺上に存在しなくなる。したがって，$\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$ともに$X$の辺上に存在するためには$b=0$，$d=\pm1$でなければならない。同様に③，④から$\mathrm{P}_4$，$\mathrm{P}_5$も$X$の辺上に存在するためには，$b=0$，$d=\pm1$でなければならない。

また$d=1$のとき，全ての頂点は自分自身に移る。$d=-1$のときは，P_1とP_5が入れ替わり，P_2とP_4が入れ替わることが分る。

行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}$　　（答）

(2) 点Pが行列Aの表す移動でXのある頂点に移るとき，Xの各頂点はXのいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列Aを求めよ。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$として，点Pが行列$A$の表す移動で$X$のある頂点に移るので，

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$により，$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$または$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

したがって，$A=\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{2} & b \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & d \end{pmatrix}$または$\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$となる。その上で，個々の移動を検討してみる。

今$\mathrm{P}\to\mathrm{P}_1$の移動に対応する行列$A$による各頂点の移動を考えると，

$$\mathrm{P}_1\to\mathrm{P}_1'：A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&b\\\frac{\sqrt{3}}{2}&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}d\end{pmatrix}\quad ⑤$$

$$\mathrm{P}_2\to\mathrm{P}_2'：A\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&b\\\frac{\sqrt{3}}{2}&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\\frac{-\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}d\end{pmatrix}\quad ⑥$$

$$\mathrm{P}_3\to\mathrm{P}_3'：A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&b\\\frac{\sqrt{3}}{2}&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\quad ⑦$$

$$\mathrm{P}_4\to\mathrm{P}_4'：A\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&b\\\frac{\sqrt{3}}{2}&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\\frac{-\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}d\end{pmatrix}\quad ⑧$$

$$\mathrm{P}_5\to\mathrm{P}_5'：A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&b\\\frac{\sqrt{3}}{2}&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}d\end{pmatrix}\quad ⑨$$

⑤，⑥を見ると原点対称の点$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$にベクトル$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\\frac{\sqrt{3}\,d}{2}\end{pmatrix}$を加えた点になっている。

これらの点がX上の点であるためには，図５－２に見るように，

$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$が頂点$\mathrm{P}_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$へ，$\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$が頂点$\mathrm{P}_3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$へ移動するか，

あるいは$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$が頂点$\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$へ，$\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$が頂点$\mathrm{P}_5\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$へ移動する必要がある。

前者の場合は，

$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}\,d}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$だから，$b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$d=\frac{1}{2}$となる。このとき，⑧により，$\mathrm{P}_4$は

$\mathrm{P}_5\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$へ，⑨により$\mathrm{P}_5$は$\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$へ移ることが分る。これらの移動は各頂点が原点を中心に

して反時計方向に$\frac{\pi}{3}$回転していることに相当する。後者の場合は下記のようにP1がPに移動する。

$$A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & b\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\text{ ゆえに}b=\frac{\sqrt{3}}{2},\ d=-\frac{1}{2}$$

結局PがP1に，P1がPに移動するので，この行列Aは直線PP1の垂直2等分線に関する反転を行う。

この行列AをP2，P5，に作用させると，

$$A\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\text{：P5に移動}$$

$$A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\text{：P2に移動}$$

となって確かにP2とP5が交換されることが分る。同様にP3とP4が交換されることも分る。

次にP→P_2の移動を考えると，P→P1の移動と同様の考え方により，他の頂点がX上に来る移動は$\frac{2\pi}{3}$の回転と直線P_1P_4での反転がある。直線P_1P_4での反転によって，P_1，P_4は自分自身に，P_2はPに，P_3はP_5に移動する。このような移動を表す行列は

$$\text{P2→P：}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & b\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}\,d}{2}\end{pmatrix},\text{ ゆえに}b=\frac{\sqrt{3}}{2},\ d=\frac{1}{2}$$

このときのP，P1，P3，P4の移動は，

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\text{：P2に移動}$$

$$A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\text{：P1自身に移動}$$

$$A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\text{：P5に移動}$$

$$A\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\text{：P4自身に移動}$$

同様に考えると，P→P3の移動は角度πの回転とy軸に関する反転で，反転の行列Aは

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$だから，$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，このAによって，

P2とP1が交換，P4とP5が交換となる。

同様に，P→P4の移動は角度$\frac{4\pi}{3}$の回転と直線P2P5に関する反転で，反転の行列Aは

$$\text{P4→P}：\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & b\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}\,d}{2}\end{pmatrix}，\text{ゆえに}b=-\frac{\sqrt{3}}{2}，\ d=\frac{1}{2}$$

このAによって，PとP4，P1とP3が交換され，P2とP5は自分自身に移動する。

同様に，P→P5の移動は角度$\frac{5\pi}{3}$の回転と直線PP5の垂直2等分線に関する反転で，反転の行列Aは

$$\text{P5→P}：\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & b\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}\,d}{2}\end{pmatrix}，\text{ゆえに}b=-\frac{\sqrt{3}}{2}，\ d=-\frac{1}{2}$$

最後にPからPへの移動には無移動とx軸に関する反転がある。無移動の行列Aは

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$だから，$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

x軸に関する反転は$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$だから，$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，これによって，P1とP5が交換，P2とP4が交換となり，P3は自身に移動する。

以上をまとめると，行列Aは反時計回りの回転角θ_iにより，

$A=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}$，$\theta_i=\frac{i\pi}{3}\quad i=0,1,..,5$　と表される。したがって，行列Aは

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

（答）

加えて，y軸，x軸，直線P1P4，P2P5，PP1の垂直2等分線，PP5の垂直2等分線による反転の行列，すなわち

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

（答）

＜解説＞

行列による平面上の点の一次変換の問題。やや題意の把握が困難である。行列による移動により，正６角形の頂点が辺上（頂点を含む）に移動するという条件の下で，一つの頂点が自分自身を含む他の頂点に移動すれば，全ての頂点が頂点に移動することを証明しなければならない。頂点が６ケあるので，煩瑣である。直感的には，ある頂点が他の頂点に移動するのは，原点を中心とする回転と直線を軸とした反転になることが分るのだが，これをこの問題の条件下で一般的に証明するのは，なかな

か難しい。

受験生はこの問題には悪戦苦闘したのではあるまいか。(2)で時間がかかるようなら，完全な解を与えるよりは，回転と反転でなければならない必然性を述べて，両者に対応する行列を書き下すこともやむをえない。採点はどのように行うのであろうか，難しいように思う。

なお，(2)の行列Aをよく見ると，

回転の行列として，$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

反転の行列として，$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$\pm\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\pm\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

とまとめられることが分る。

＜総評＞

全体として的確な数学的思考力と直感を必要とする骨の折れる問題が揃っている。

$\boxed{1}$ 一工夫できれば，容易に解ける。題意は簡明だから着実に正答したい。難易度B。

$\boxed{2}$ 接線が2本，3本引けるとはどういうことか，変換することが必要である。難易度A。

$\boxed{3}$ 題意が簡明な確率の問題。着実に正答したい。難易度B。

$\boxed{4}$ 立体図形をベクトルによって扱う問題。この種の問題としては，簡明である。着実に正答したい。難易度B。

$\boxed{5}$ 微分積分の問題。着実に計算してゆけば良い。難易度B。

$\boxed{6}$ 行列による図形の変換の問題。簡単そうで，終始一貫した証明はなかなか難しい。考え出すと，時間がどんどん進むだろう。食らい付いて、部分的でも良いから解答してゆくこと。採点基準がどのようになるか疑問あり。難易度A＋。

100612

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

$\boxed{1}$ $f(x)=x^3$とするとき，以下の問いに答よ。

(1)　$0\leqq a<x<y$を満たすすべてのa, x, yに対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

が成り立つことを示せ。

$$左辺=\frac{x^3-a^3}{x-a}=\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=x^2+ax+a^2$$

$$右辺=\frac{y^3-x^3}{y-x}=\frac{(y-x)(y^2+yx+x^2)}{y-x}=y^2+yx+x^2$$

したがって，右辺−左辺$=y^2+(y-a)x-a^2=(y-a)(y+a)+(y-a)x=(y-a)(y+x+a)>0$

したがって$0\leqq a<x<y$を満たすすべてのa, x, yに対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\quad が成り立つ。$$

(2) $y<x<b$を満たすすべてのx, yに対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(b)+(b-x)f(y)}{b-y}$$

が成り立つようなbの範囲を求めよ。

上式を変形して，$(b-y)f(x)-(x-y)f(b)-(b-x)f(y)>0$

$b-y=(b-x)+(x-y)$を代入して整理すると

$(b-x)(f(x)-f(y))+(x-y)(f(x)-f(b))$

$=(b-x)(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x-b)(x^2+bx+b^2)$

$=(b-x)(x-y)\{(x^2+xy+y^2)-(x^2+bx+b^2)\}=-(b-x)(x-y)(b-y)(x+y+b)>0$

したがって，$x+y+b<0$　　①

一方，$x+y+b<3b$　　②

①と②を見て考察する。$y<x<b$でx, yが限りなくbに近づくと，$x+y+b$は限りなく$3b$に近づくが，①を満足するには,

$3b\leqq 0$，すなわち　$b\leqq 0$　　（答）

＜解説＞

(1)は3次式の因数分解を用いて式を変形すれば解ける問題である。(2)は加えて，計算を簡明にするためには，一工夫必要である。ゴリゴリ計算してもできる。①，②から答えを導くには，記載のような少々の数学的考察が必要である。①，②から直感的に答えを導いても，正答とされよう。

$\boxed{2}$　放物線C: $y=x^2$に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　C上の点P(a, a^2)を通り，PにおけるCの接線に直交する直線lの方程式を求めよ。

点Pにおける接線の傾きは$2a$，直交する直線の傾きは$a\neq 0$のとき$-\dfrac{1}{2a}$だから，直線lの方程式は$y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$　　（答）

$a=0$の場合は接線はx軸になるから，直線lはy軸，すなわち$x=0$　　（答）

(2)　lを(1)で求めた直線とする。$a\neq 0$のとき，直線$x=a$をlに関して対称に折り返して得られる直線mの方程式を求めよ。

図１を参照しながら考える。

直線lに関して点Q$(a, 0)$と対称な点をR(x_r, y_r)とする。直線QRは接線と平行だから,

その傾きは$\dfrac{y_r}{x_r-a}=2a$　　①

QRの中点$\left(\dfrac{a+x_r}{2}, \dfrac{y_r}{2}\right)$は直線$l$上にあるから,

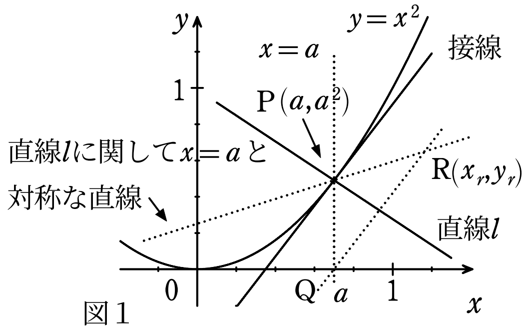

図１

$$\frac{y_r}{2}=-\frac{1}{2a}\left(\frac{x_r-a}{2}\right)+a^2=\frac{-x_r}{4a}+\frac{1}{4}+a^2,\ \text{したがって}\ y_r=\frac{-x_r}{2a}+\frac{1}{2}+2a^2 \qquad ②$$

①，②から$x_r=\dfrac{8a^3+a}{4a^2+1}$，$y_r=\dfrac{8a^4}{4a^2+1}$，したがって直線PRすなわち直線$l$に関して$x=a$と対称な直線$m$の方程式は

$$y-a^2=\frac{\dfrac{8a^4}{4a^2+1}-a^2}{\dfrac{8a^3+a}{4a^2+1}-a}=\frac{4a^4-a^2}{4a^3}(x-a)=\frac{4a^2-1}{4a}(x-a),\ \text{したがって}$$

$$y=\frac{4a^2-1}{4a}(x-a)+a^2=\frac{4a^2-1}{4a}x+\frac{1}{4}\qquad\text{（答）}$$

(3)　(2)で求めた直線mはaの値によらず定点Fを通ることを示し，Fの座標を求めよ。

(2)の答えの式において，aの値が変わるとxの係数$\dfrac{4a^2-1}{4a}$は変化するが，aの値によらず，$x=0$であれば，$y=\dfrac{1}{4}$となる。したがって，定点Fの座標は$\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$　　（答）

＜解説＞

2次式の図形と微分に関する問題。接線や直交する直線の方程式などの求め方は，覚えておくべき基礎知識である。図を描いて，参照しながら解答を考えると良い。直線lに関してある直線の対称な直線mの方程式を求める問題は，少々計算が必要となる。落着いて取り組むこと。ある直線上の分かり易い点を選び，その点と直線lに関して対称となる点の座標を求める。(3)は（答）の式をaについて整理すると，$4a^2x-(1-4y)a-x=0$となり，この式がaの値によらず成立するためには，aの各項の係数が0でなければならないとして，$x=0$，$y=\dfrac{1}{4}$を求めても良い。

$\boxed{3}$　数直線上を動く点Pがある。裏表の出る確率が等しい硬貨を2枚投げて，2枚とも表が出たらPは正の向きに1だけ移動し，2枚とも裏が出たらPは負の向きに１だけ移動し，それ以外のときはその位置にとどまるものとする。Pが原点Oを出発点として，このような試行をn回繰り返して到着した位置をS_nとする。以下の問いに答えよ。

(1) $S_2=-1$となる確率を求めよ。

2回の試行で硬貨の裏表の組み合わせの場合の数は4^2通り。1回目の試行で（裏裏）で2回目で（表裏，裏表），あるいは1回目（表裏，裏表），2回目（裏裏）の場合に$S_2=-1$となるから，場合の数は2+2=4。したがって，$S_2=-1$となる確率は$\dfrac{4}{4^2}=\dfrac{1}{4}$　　（答）

(2) $S_3=1$となる確率を求めよ。

（表表）が1回出る場合は他の2回は（表裏，裏表）だから場合の数は3×4通り。

（表表）が2回出る場合は他の1回は（裏裏）だから場合の数は3通り。

したがって，$S_3=1$となる確率は$\dfrac{12+3}{4^3}=\dfrac{15}{64}$　　（答）

(3) 試行をn回繰り返して出た表の総数をiとするとき，S_nを求めよ。

2枚が（表表）となる回数をm_f，（表裏）あるいは（裏表）となる回数をm_e，（裏裏）となる回数をm_bとする。

$i=2m_f+m_e$　①

$n=m_f+m_e+m_b$　②

$S_n=m_f-m_b$，また（①－②）により，$m_f-m_b=i-n$だから，

$S_n=i-n$

(4) kを整数とするとき，$S_n=k$となる確率を求めよ。

試行をn回繰り返して出た表の総数がiとなる場合の数は${}_{2n}C_i$通り。

一方，n回の試行で表と裏の組み合わせの場合の数は2^{2n}

表の総数がiとなる確率は，$P=\dfrac{{}_{2n}C_i}{2^{2n}}$　③

しかるに$k=i-n$だから，$i=k+n$を③に代入すると，

$$P=\frac{{}_{2n}C_i}{2^{2n}}=\frac{{}_{2n}C_{k+n}}{2^{2n}}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n-k)!(k+n)!}$$

＜解説＞

一見難しそうな確率の問題である。しかし，引いてしまわずに素直に考えていけば，存外素直な問題だと気づくのではないか。設問は易から難へ，個別から一般へと進むので，(1)，(2)を正答して肩を慣らして，(3)，(4)に取り組もう。(1)，(2)では，場合の数を具体的に求める。(3)では題意を誤解しないこと。その上で，難しそうと思うかも知れないが，（表表），（表裏）と（裏表），（裏裏）となる回数をi, nで表現すれば良い。硬貨2枚一組の試行だが，1枚ずつ投げる試行と同じであることを理解していると，存外容易に扱える。

$\boxed{4}$　理系の$\boxed{4}$に同じ。

＜総評＞

文系の数学入試であるが，なかなか骨のある問題が揃っている。

$\boxed{1}$ 因数分解を用いる多項式の変換の問題だが，完答には少々，数学的な技巧と思考を必要とする。難易度はB。

$\boxed{2}$ 2次関数の図形と微分の問題。数式の計算力を必要とする。難易度はB。

$\boxed{3}$ 確率の問題。確率独特の思考方式に慣れていないと，苦戦するかも知れない。難易度はB＋。

$\boxed{4}$ 立体図形をベクトルによって扱う問題。この種の問題としては，簡明である。着実に正答したい。計算式が長くなるので，辛抱強く取り組むこと。難易度はB。

100623