2010（H22）年度　東京工業大学　入学試験　物理解説

1

[A]

(a)

物体Bの斜面（傾き1）に垂直に衝突するということは，軌道の傾き$\dfrac{dy}{dx}=-1$ということだから，

衝突する点Q(x_q, y_q)では，$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{dx}{dt}$，すなわち$v_y=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}-gt=-v_x=-\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$　　(1)

すると速度の絶対値は初速と同じだから，エネルギー保存の法則により，点PとQの高さは同じ。

すなわち$y_q=y_p=\dfrac{L}{2}$，斜面は直線$y=x$だから，$x_q=y_q=\dfrac{L}{2}$　　（答）

一方，衝突までの時間は$t=\dfrac{L}{v_x}=\dfrac{\sqrt{2}L}{v_0}$だから，(1)より$v_0=\sqrt{gL}$　　（答）

(b)

小球は物体Bと弾性衝突するので，エネルギー保存の法則が成立する。

点Pでのエネルギー＝（運動エネルギー）＋（位置エネルギー）

$$=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{mgL}{2} \qquad (2)$$

最高点でのエネルギー$=\dfrac{mv_x^2}{2}+mgh=\dfrac{mv_0^2}{4}+mgH$　　(3)

(2)，(3)が等しいので，$H=\dfrac{L}{2}+\dfrac{v_0^2}{4g}=\dfrac{3L}{4}$　　（答）

[B]

(c)

衝突直後の小球の速度をv'_Qとする。衝突後の時間tに対して，x, y方向の運動方程式は

$v_x=\dfrac{-v'_Q}{\sqrt{2}}$　　(4)，$v_y=\dfrac{v'_Q}{\sqrt{2}}-gt$　　(5)，

$x=\dfrac{L}{2}+v_xt=\dfrac{L}{2}-\dfrac{v'_Qt}{\sqrt{2}}$　　(6)，$y=\dfrac{L}{2}+\dfrac{v'_Qt}{\sqrt{2}}-\dfrac{gt^2}{2}$　　(7)

$x=0$になるのは(6)より$t=\dfrac{L}{\sqrt{2}v'_Q}$，このとき$y=0$だから(7)より$v'_Q=\dfrac{\sqrt{gL}}{2}$　　(8)

小球は最高点で$v_y=0$だから(5)により，$t=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{2g}}$

このとき(7)により$y=H'=\dfrac{9L}{16}=\dfrac{3H}{4}$　　（答）

(d)

(4)，(8)により$v=v_x=\dfrac{\sqrt{gL}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-v_0}{2\sqrt{2}}$

x方向の運動量保存則により，$\dfrac{mv_0}{\sqrt{2}}=-mv+MV$，$MV=\dfrac{3mv_0}{2\sqrt{2}}$，$V=\dfrac{3mv_0}{2\sqrt{2}M}$　　（答）

(e)

(a)で記載のように$T=\dfrac{\sqrt{2}L}{v_0}=\sqrt{\dfrac{2L}{g}}$

(c)で記載のように $T'=\dfrac{L}{\sqrt{2}\,v'_Q}=\sqrt{\dfrac{2L}{g}}=T$　　（答）

(f)

点Qでの衝突は弾性衝突だから，衝突前後で運動エネルギーは変化しないので，
衝突前の小球の運動エネルギー＝衝突後の小球と物体Bの運動エネルギー

衝突直後のx，y方向の速度は同じで，$v=\dfrac{-v_0}{2\sqrt{2}}$だから，

$\dfrac{m{v_0}^2}{2}=\dfrac{mv^2}{2}\times 2+\dfrac{MV^2}{2}$，$V=\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{3m}{M}}$

(d)の結果と照合すると，$\dfrac{3mv_0}{2\sqrt{2}M}=\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{3m}{M}}$，したがって$\dfrac{M}{m}=1.5$　　（答）

＜解説＞

重力下での物体の運動に関する問題で題意は簡明である。[A]では，物体Bが固定されているので，困難なく解答したい。小球が$y=x$の斜面に垂直に衝突するということは，小球の速度のx, y成分が等しいということである。[B]では物体Bが水平方向に滑らかに動く。衝突によってBが等速運動を始める。問題は誘導的に構成されているので，困難は少ないだろう。

[A](a)

上記の解答では，数式に頼らない物理的な見方によって解答を導いた。ここでは運動方程式によって導いてみよう。

小球は点P$(x_p, y_p)=\left(\dfrac{-L}{2}, \dfrac{L}{2}\right)$を水平45°方向に初速$v_0$で投げ出されたので，$t$秒後の速度と座標は

$v_x=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$　　(1’)，$v_y=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}}-gt$　　(2’)

$x=x_p+\dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}}$　　(3’)，$y=y_p+\dfrac{v_0 t}{\sqrt{2}}-\dfrac{gt^2}{2}$　　(4’)

物体Bの斜面は$y=x$の直線だから，小球が斜面に衝突する点Q(x_q, y_q)は(1)，(2)で$y=x$とおいて，

$x_q=y_q=v_0\sqrt{\dfrac{L}{g}}-\dfrac{L}{2}$　　(5’)，$t=\sqrt{\dfrac{2L}{g}}$　　(6’)

物体Bの斜面（傾き1）に垂直に衝突するということは，軌道の傾き$\dfrac{dy}{dx}=-1$ということだから，

$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{dx}{dt}$，すなわち$v_x=-v_y$だから，(1)，(2)から$\sqrt{2}\,v_0=gt$　　(7’)

(5’)，(6’)，(7’)から

$x_q=y_q=\dfrac{L}{2}$　（答），$v_0=\sqrt{gL}$　（答）

(b)

弾性衝突であり，物体Bは固定されているので，小球のエネルギーが保存される。
もちろん，運動方程式から導くこともできる。点Qから出る小球は点Pから出た小球と同じ軌道を戻ることになるから，(1’)〜(4’)の運動方定式で$v_y=0$となるyを求めれば良い。

(2’)から$t=\dfrac{v_0}{\sqrt{2}\,g}=\sqrt{\dfrac{L}{2g}}$，これを(4’)に代入して$y=H=\dfrac{L}{2}+\dfrac{L}{2}-\dfrac{L}{4}=\dfrac{3L}{4}$

[B](c)

物体Bが水平面上を滑らかに動く場合である。衝突点Q，衝突後の小球の方向（衝突面に垂直方向），落下点Oが分っているので，放物線の軌道は定まる。衝突後の速度が分らなくても良いことに気づ

けば，容易に扱える。

(d)

衝突直後の小球の速度と物体Bの速度は，運動量の保存則を満たす。また弾性衝突だから，はね返り係数1の衝突であり，エネルギー保存則も満たす。しかも，衝突直後の小球の速度は(c)において求まってしまう。ということは，求める解に対して、条件は余剰となっている。

(e)

重力下の投げ上げ運動であり，初期位置（点Q），落下位置（点O），初速（衝突後の速度）が決まっているので，運動方程式が定まるので容易に解を得ることができよう。

(f)

(d)で述べたように，条件は余剰となっているので，m, Mに特定の関係が導かれる。ここでは，エネルギー保存則によって得られるVと運動量保存則によって得られるVとを等しいとおくことにより，$\dfrac{M}{m}$が特定される。

$\boxed{2}$

[A]

(a)

半径 rの球内に含まれる電荷量は$Q(r)=\dfrac{-4\pi r^3\rho}{3}$

これが原点Oにあると正電荷qに働く力は引力となるので原点に向かい，その大きさはクーロンの法則により，

$$F(r)=\left|\frac{k_0Qq}{r^2}\right|=\left|\frac{-4k_0\pi\rho qr}{3}\right|=\frac{4k_0\pi\rho qr}{3}=Cr$$

したがって，$C=\dfrac{4k_0\pi\rho q}{3}$　　（答）

(b)

rにおける位置エネルギーは，原点からrまで荷電粒子を運ぶのに要する仕事量と考えることができる。位置sにおいて力の方向と逆方向に微小距離ds移動する仕事量は$F(s)ds$だから，

$$U(r)=\int_0^r Csds=\left[\frac{Cs^2}{2}\right]_0^r=\frac{Cr^2}{2}$$　（答）

(c)

原点におけるエネルギー$=\dfrac{m{v_0}^2}{2}$

$x=R$におけるエネルギー$=\dfrac{CR^2}{2}+\dfrac{mv^2}{2}$

エネルギー保存の法則により，両者は等しいから，$\dfrac{m{v_0}^2}{2}=\dfrac{CR^2}{2}+\dfrac{mv^2}{2}$

$v=0$となるv_0が最小だから，$v_0=\sqrt{\dfrac{C}{m}}R$　　（答）

[B]

(d)

磁場が荷電粒子に及ぼす力は進行方向と直交するので，速度の大きさを変えない。したがって，原点と球表面での運動エネルギーと位置エネルギーに関してエネルギー保存の法則が成立する。

$$\frac{m{v_1}^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{CR^2}{2}$$，したがって，$v=\sqrt{{v_1}^2-\frac{CR^2}{m}}$　　（答）

(e)

荷電粒子に原点Oを中心とする円の接線方向に速度vを与える。すると，粒子には球の電荷による原点方向への力と，磁場によるローレンツ力が原点方向（あるいは逆方向）に働くので，粒子は適当な速度で円運動する。

(ⅰ)時計回りのとき

ローレンツ力は原点に向く。したがって，粒子の円運動の方程式は

$Cr+qvB=Cr+qr\omega B=mr\omega^2$

$\omega^2-\frac{qB\omega}{m}-\frac{C}{m}=0$，これを解くと，

$\omega=\frac{qB}{2m}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{qB}{m}\right)^2+\frac{4C}{m}}$，$\omega>0$だから，時計回りのときの角速度は

$\omega_R=\frac{qB}{2m}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{qB}{m}\right)^2+\frac{4C}{m}}$　　（答）

(ⅱ)反時計回りのとき

ローレンツ力は原点とは逆方向に働く。したがって，粒子の円運動の方程式は

$Cr-qvB=Cr-qr\omega B=mr\omega^2$

$\omega^2+\frac{qB\omega}{m}-\frac{C}{m}=0$，同様にこれを解いて，$\omega>0$だから，反時計回りのときの角速度は

$\omega_L=\frac{-qB}{2m}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{qB}{m}\right)^2+\frac{4C}{m}}$　　（答）

(f)

① $\frac{qB}{2m}$　② $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{qB}{m}\right)^2+\frac{4C}{m}}$　③ $C+\frac{(qB)^2}{2m}$

＜解説＞

電磁場中の荷電粒子の運動に関する問題である。運動する荷電粒子に働く電場と磁場の作用について知識と理解が必要である。

[A](a)

半径rの球内の電荷は（体積×単位体積当たりの電荷）である。電荷間に働くクーロンの法則を適用すれば良い。

(b)

球は負に帯電しているので，正電荷に対しては静電気力による引力が働く。原点を基準点とするので，原点の位置エネルギーを0とする。原点から引力に抗して電荷を運ぶときになす仕事が位置エネルギーに変換されることになる。

(c)

荷電粒子は運動エネルギーと位置エネルギーをもつ。原点では位置エネルギーは0で，運動エネルギーのみ。運動エネルギーが球の表面（位置R）ですべて位置エネルギーに変換されるような速度がRに達する最小の速度ということになる。

[B](d)

磁場が加わると，荷電粒子の速度と磁場の作る平面に直角方向にローレンツ力が働く。この力は速度の大きさを変えないので，運動エネルギーを変化させない。

(e)

荷電粒子の回転方向によって，磁場によるローレンツ力の向きが変わる。時計回りでは原点方向に，反時計回りでは原点と逆方向に働く。従って，円運動の向心力が異なるから，角速度も異なる。

(f)

①時計回りに角速度Ωで回っている観測者が時計回りに角速度ω_Rで回っている荷電粒子を見たときの角速度は$\omega_R-\Omega$，反時計回りに角速度ω_Lで回っている荷電粒子を見たときの角速度は$\omega_L+\Omega$，両者が等しいとすれば，$2\Omega=\omega_R-\omega_L$だから，$\Omega=\dfrac{qB}{2m}$。

②$\omega'=\omega_R-\Omega=\omega_L+\Omega$，によって求まる。

③観測者Kは角速度Ωで回っているので，その座標系から見ると，荷電粒子には$mr\Omega^2$の慣性遠心力が働いていることになる。したがって，Kから見た見た荷電粒子の円運動の方程式は，

$$mr\omega'^2=C'r-mr\Omega^2,\quad C'=m\omega'^2+m\Omega^2=C+\frac{(qB)^2}{2m}$$

$\boxed{3}$

[A]

(a)

気体の状態方程式によって，初期状態で$p_0V_0=RT_0$。

圧縮後の圧力をp_cとすれば，$p_c aV_0=RbT_0$。したがって，$a=\dfrac{bRT_0}{p_cV_0}=\dfrac{bp_0V_0}{p_cV_0}=\dfrac{bp_0}{p_c}$ (1)

一方，この状態変化では，$p_0V_0^{\frac{5}{3}}=p_c(aV_0)^{\frac{5}{3}}$，$a^{\frac{5}{3}}=\dfrac{p_0}{p_c}$ (2)

(2)を(1)に代入すると，$a=b^{\frac{-3}{2}}$ (答)

(b)

断熱圧縮なので，ピストンが気体にした仕事は気体の内部エネルギーの増大になる。

初期状態の気体の内部エネルギーは$\dfrac{3}{2}RT_0$，圧縮後の内部エネルギーは$\dfrac{3}{2}RbT_0$。

したがって，$W=\dfrac{3}{2}RbT_0-\dfrac{3}{2}RT_0=\dfrac{3}{2}RT_0(b-1)=\dfrac{3}{2}p_0V_0(b-1)$ (答)

[B](c)

気体が失った熱量と物体が得た熱量が等しい。気体の温度はbT_0からcT_0に変化したので，気体が失った熱量は$\dfrac{3}{2}RbT_0-\dfrac{3}{2}RcT_0=\dfrac{3}{2}(b-c)RT_0$。一方，物体の温度は$T_0$から$cT_0$に変化したので，物体が得た熱量は$xRcT_0-xRT_0=xRT_0(c-1)$。両者を等しいとおいて，

$c=\dfrac{2x+3b}{2x+3}$ (答)

(d)

気体と物体が同じになった温度をT_sとする。すると，$p_ceV_0=RT_s$，また$p_caV_0=RbT_0$だから

$$p_c=\frac{RbT_0}{aV_0} \qquad (1),\ \ T_s=\frac{be}{a}T_0 \qquad (2)$$

物体が得た熱量は$xR(T_s-T_0)$，気体が失った熱量は$\frac{3}{2}RbT_0-\frac{3}{2}RT_s=\frac{3}{2}R(bT_0-T_s)$，さらにピストンが気体になした仕事は$p_c(aV_0-eV_0)$。これらについてエネルギー保存則によって，

$$xR(T_s-T_0)=\frac{3}{2}R(bT_0-T_s)+p_cV_0(a-e) \qquad (3)$$

(3)に(1)，(2)を用いて，$e=\left(\frac{2x+5b}{2x+5}\right)b^{-\frac{5}{2}}$　　（答）

[C](e)

状態方程式は$fp_0eV_0=RT_0$，初期状態で$p_0V_0=RT_0$だから，$f=\frac{1}{e}=\left(\frac{2x+5}{2x+5b}\right)b^{\frac{5}{2}}$　　（答）

(f)

気体の温度は変化しないので，気体の内部エネルギーは変化しない。すると熱力学の第一法則によって，熱源から気体に与えられた熱量Q'と気体がする仕事W'とは等しい。

＜解説＞

題意が簡明であり，理想気体の状態変化に関する基本知識と理解があれば，大きな困難なく解答できるだろう。気体の状態変化のpV曲線を描いて考察すると良い。すると問題の過程は，気体を圧縮するにつれ，温度が上昇していく過程（膨張する場合は温度は低下）であることが分かる。

(a)

ここでは熱の出入りのない状況（断熱状態）で，気体に圧力を加え圧縮していく。この状態変化の過程が$pV^{\frac{5}{3}}=C$(＝一定)であるところに目新しさがある。この状態変化は図１のpV曲線であるが，これをどのようにして実現するのか気になるところだが，ここでは脇においておこう。曲線$pV^{\frac{5}{3}}=C$と$pV=RT_0$とは点(p_0, V_0)で交わる。したがって$C=p_0V_0^{\frac{5}{3}}$。気体の状態方程式と与えられた状態変化の過程の式を組み合わせれば良い。

(b)

気体の内部エネルギーについて理解していれば容易に解ける。気体の内部エネルギーは$U=\frac{3}{2}nRT$（nは気体のモル数）である。解答では内部エネルギーの変化から求めた。別の解法を紹介しよう。

$pV^{\frac{5}{3}}=C$の曲線に沿って状態が変化するので，ピストンが気体にする仕事Wは，図１に示すこの曲線とx軸との間の面積となる。

$$W=\int_{aV_0}^{V_0}CV^{\frac{-5}{3}}dV=C\left[\frac{-3}{2}V^{\frac{-2}{3}}\right]_{aV_0}^{V_0}=\frac{-3CV_0^{\frac{-2}{3}}}{2}\left(1-a^{\frac{-2}{3}}\right)=\frac{3p_0V_0}{2}(b-1) \qquad （答）$$

(c)

気体が失う熱量と物体が得る熱量とは等しいことから，両者が同じになる温度cT_0を求める。この場合も，気体の温度と気体の内部エネルギーの関係を知っておかねばならない。気体が失う熱量は気体の内部エネルギーの減少である。

(d)

気体は物体に接触して熱を失うので，圧力が低下する。圧力を低下させないためには，ピストンを押し込んでいかなければならない。この過程での仕事と熱量の授受の関係を上げて考察する。すると，

物体が得る熱量，気体が失う熱量，ピストンがする仕事の間にエネルギー保存則が成立する。

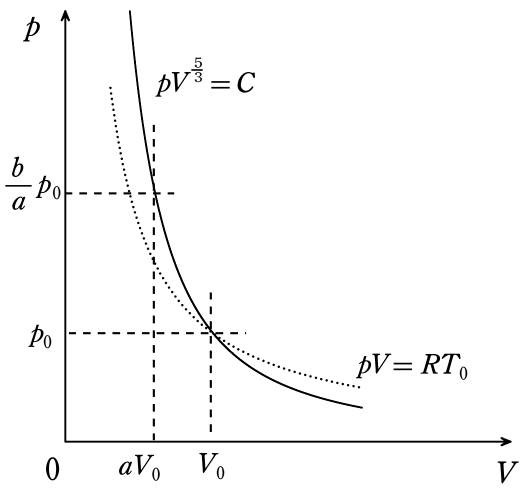

図１

(e)

この状態での気体の状態方程式から容易に求めることができる。初期状態での状態方程式での関係を用いる。

(f)

この過程は温度が変化しない等温変化だから，気体の内部エネルギーは変化しない。教科書によく記載されているように，温度一定と見なせる大きな浴槽（熱量量が大きくて少々の熱の流出でも温度は殆ど変化しない）にシリンダーを入れてゆっくりピストンを引いて膨張させるような実験が相当する。

＜総評＞

$\boxed{1}$

重力下での運動の問題で，衝突，運動量保存の法則，エネルギー保存の法則などを駆使して解く必要がある。ここでは，ちょっとした知見を利用することが重要である。具体的には，傾き45°の面に垂直に衝突するとは，水平，垂直方向の速度の大きさが等しいということである。また難しいのは滑らかな床に置かれている物体に衝突する小球と物体の運動を導くことである。ここでは運動量保存の法則を使うのだが，物体はy方向には拘束されていて，動かないことに注意する。難易度はA。

$\boxed{2}$

電磁場における荷電粒子の運動に関する問題であるが，まず設定されている一様に負電荷が分布している絶縁体の球とはどのようなものであろうか。導体球では電荷は表面に分布するから，実現できない。負電荷どうしには反発力が働くので，一様に分布させることは困難であろう。残念ながら私には分からない。いくら入試問題で仮想的な物理条件だとしても，実現可能性（というより物理的可能性というべきかも知れない）に大きな疑問があるようでは，良問とはいえない。電磁場中の運動としては簡明なものなので，誘導的に構成されているので，難易度はB。

実はこの問題は物体の質量による重力とほぼ同じである。ただし，クーロン力は重力よりもはるかに大きいので，地球のような巨大な球を考えなければならないが。質量が均一な巨大な球を考え，半球の隙間に小球を置くと，巨大球の質量が中心に集中しているかのような引力が働く。学生の頃，物理の試験で地球の一点から中心を通り反対側表面まで穴を開ける。その穴に物体を落とすと、どんな運動をするか，などという問題が出されたことを思い出す。この問題と同様に，中心からの距離に比例する引力が働くので，単振動をする。

本問で難しいと思われるのは(f)③である。回転する座標系から見た物体には，慣性力が働いているように見えることに注意する。簡単な例では，重力の下で自由落下する部屋の中で林檎を静かに手から放す。部屋の中にいる人から見ると，林檎は静止して見える。これは，林檎には重力の加速度と逆方向に同じ大きさの慣性力が働いて，重力とつりあって静止していると考えることができる。

3

理想気体の状態変化に関する素直な問題。無論確かな基本知識と理解を必要とする。計算も煩瑣ではない。気体のもつ熱量の表現を的確に理解していることが必要である。すなわち気体のもつ熱量は内部エネルギーであり，それが温度と結びついている。難易度はB。

101227