

数 学

150 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本問題冊子は 8 ページ，答案用紙は 4 ページである。
3. 各答案用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて各答案用紙の枠内に記入し，裏面は使用しないこと。
5. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 250 点満点中の配点である。
6. 答案用紙の冊子は切りはなさないこと。
7. 答案用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1

(70点)

 $f(x) = 1 - \cos x - x \sin x$ とする.

(1) $0 < x < \pi$ において, $f(x) = 0$ は唯一の解を持つことを示せ.

(2) $J = \int_0^{\pi} |f(x)| dx$ とする. (1)の唯一の解を α とするとき, J を $\sin \alpha$ の式で表せ.

(3) (2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ.

2 (60点)

a を正の整数とする. 正の実数 x についての方程式

$$(*) \quad x = \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \right]$$

が解を持たないような a を小さい順に並べたものを a_1, a_2, a_3, \dots とする. ここに $[\]$ はガウス記号で, 実数 u に対し, $[u]$ は u 以下の最大の整数を表す.

(1) $a = 7, 8, 9$ の各々について $(*)$ の解があるかどうかを判定し, ある場合は解 x を求めよ.

(2) a_1, a_2 を求めよ.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ を求めよ.

3 (60点)

1 から n までの数字がもれなく一つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く。このとき、引いたカードの数字のうち小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする。

(1) $p(8)$ を求めよ。

(2) 正の整数 k に対し、 $p(3k+2)$ を k で表せ。

4 (60点)

a を正の定数とする. 原点を O とする座標平面上に定点 $A = A(a, 0)$ と, A と異なる動点 $P = P(x, y)$ をとる. 次の条件

A から P に向けた半直線上の点 Q に対し

$$\frac{AQ}{AP} \leq 2 \quad \text{ならば} \quad \frac{QP}{OQ} \leq \frac{AP}{OA}$$

を満たす P からなる領域を D とする. D を図示せよ.