2010（H22）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

$\boxed{1}$（70点）

$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする。

(1)　$0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解を持つことを示せ。

解答

$f'(x)=-x\cos x$，したがって図１のように $f(x)$ は変化する。$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\dfrac{\pi}{2}<0$，$f(\pi)=2>0$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ で $f(x)$ は単調増加だから，ある唯一の x で $f(x)=0$ となる。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2

図１

(2)　$J=\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|dx$ とする。(1)の唯一の解を α とするとき，J を $\sin\alpha$ の式で表せ。

解答

$$J=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\alpha}-f(x)dx+\int_{\alpha}^{\pi}f(x)dx=\Big[2\sin x-x\cos x-x\Big]_0^{\alpha}+\Big[x-2\sin x+x\cos x\Big]_{\alpha}^{\pi}$$

$$=2\alpha^2\sin\alpha-4\alpha+4\sin\alpha \qquad ①$$

$f(\alpha)=1-\cos\alpha-\alpha\sin\alpha=0$，$\cos\alpha=1-\alpha\sin\alpha$　　②

一方，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ だから $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$　　③

$t=\sin\alpha$ とおけば，②，③から，$\alpha=\dfrac{1}{t}+\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$　　④

④を①に代入して整理すると，$J=2t=2\sin\alpha$　　（答）

(3)　(2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。

解答

$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}\pi}{8}>0$，したがって $\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$，すると $\sin\alpha>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となって，

$J>\sqrt{2}$　　（答）

<解説>

(1)は導関数の変化から，$f(x)$ の変化を導く常套手段で証明する。(2)では α を $\sin\alpha$ によって表すことが計算のポイント。後は計算ミスに気をつけて，ていねいに計算すれば，問題なかろう。

(3)では，$\alpha \leqq \frac{3\pi}{4}$ とすれば$J \geqq \sqrt{2}$ となるので，αと$\frac{3\pi}{4}$の大小を考えれば良い。$\frac{\pi}{2} < x < \pi$で$f(x)$は単調増加だから，$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) > f(\alpha) = 0$ならば，$\alpha < \frac{3\pi}{4}$。

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}\,\pi}{8} > 1 + 0.7 - \frac{3 \times 1.42 \times 3.15}{8} > 1.7 - 1.68 > 0$，したがって$\alpha < \frac{3\pi}{4}$だから，$J > \sqrt{2}$ となる。ここでは，右辺の値が小さくなるように$\sqrt{2}$やπの概算値をもって計算することがポイント。所要時間を短くできるように。

$\boxed{2}$ （60点）

aを正の整数とする。正の実数xについての方程式

$$（*）\qquad x = \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)\right]$$

が解を持たないようなaを小さい順に並べたものを$a_1, a_2, a_3, \ldots$とする。ここに[ ]はガウス記号で，実数uに対し，$[u]$はu以下の最大の整数を表す。

(1) $a = 7$, 8, 9の各々について（*）の解があるかどうかを判定し，ある場合は解xを求めよ。

解答

（*）の方程式は，以下の式を満足する正の整数が解である。

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - 1 < x \leqq \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \qquad ①$$

①の左側の不等式は，$x^2 + 2x > a$，$(x+1)^2 > a + 1$　　②

①の右側の不等式は，$x^2 \leqq a$　　③

②，③から$\sqrt{a+1} - 1 < x \leqq \sqrt{a}$　　④

$a = 7$では，$\sqrt{8} - 1 < x \leqq \sqrt{7}$，$x = 2$　　（答）

$a = 8$では，$2 < x \leqq \sqrt{8}$，解はない　　（答）

$a = 9$では，$\sqrt{10} - 1 < x \leqq 3$，$x = 3$　　（答）

(2) a_1，a_2を求めよ。

解答

④において，xが整数解をもたないということは，左辺と右辺の整数部分が等しいということである。すなわち，$[\sqrt{a}\ ] = [\sqrt{a+1} - 1]$，

すると正の整数nに対し，

$n \leqq \sqrt{a} < n + 1$，$n \leqq \sqrt{a+1} - 1 < n + 1$，である。したがって，

$n(n+2) \leqq a < (n+1)^2$　　⑤

⑤を満足するaに対して，正の整数xは存在しない。すると，

$n = 1$で$a = 3$，$n = 2$で$a = 8$となるので，

$a_1 = 3$，$a_2 = 8$　　（答）

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$を求めよ。

解答

⑤において，$(n+1)^2-n(n+2)=1$だから，全てのnに対して⑤式を満足する唯一のa_nが存在して，$a_n=n(n+2)$

したがって，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$　（答）

＜解説＞

まずはガウス記号の意味するところを，分かり易い数式に変換すること。（＊）の意味するところは，[　]内の数の整数部分がxに等しいということだから，xの範囲が決まること，すなわちxが不等式によって表現されることに気づくこと。この種の問題では常套的だから，直ぐに閃くかも知れない。

(1)（＊）から④式を導くことは難しくない。すると，$a=7,8,9$に対して，④を満足する正の整数xを求めれば良い。

(2)正の整数xが存在しないaの条件を④式から求める。するとaの存在範囲が正の整数nによって，記述できることが分かる。

(3)さらに，aの条件⑤式をチェックすると，nに対応して唯一のaすなわちa_nが定まることが分かる。数列の和の計算では，各項を分数の差分式に分解すれば，容易に解を求めることができる。

$\boxed{3}$（60点）

1からnまでの数字がもれなく一つずつ書かれたn枚のカードの束から同時に2枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が3の倍数である確率を$p(n)$とする。

(1) $p(8)$を求めよ。

解答

3の倍数は3と6である。小さい数が3の確率と6の確率の和が求める確率である。

小さい方が3である確率＝（2枚のうち1枚が3である確率）×（もう1枚が3より大きい確率）

2枚のうち1枚が3である確率$=\frac{(8-1)}{{}_8C_2}=\frac{1}{4}$，もう1枚が3より大きい確率$=\frac{5}{7}$

したがって小さい方が3である確率$=\frac{5}{28}$

同様に，小さい方が6である確率$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{28}$

したがって，$p(8)=\frac{5}{28}+\frac{2}{28}=\frac{1}{4}$　（答）

(2) 正の整数kに対し，$p(3k+2)$をkで表せ。

解答

q_iを小さい方が$3i\ (i=1,2,\ldots,k)$である確率とする。

すると，$p(3k+2)=\sum_{i=1}^{k} q_i$　　①

$$q_i=\frac{3k+2-1}{{}_{3k+2}C_2}\times\frac{3k+2-3i}{3k+2-1}=\frac{3k!2!(3k+2-3i)}{(3k+2)!}=\frac{2(3k+2-3i)}{(3k+2)(3k+1)}$$

$$=\frac{2}{3k+1}-\frac{6i}{(3k+2)(3k+1)}\qquad ②$$

②を①に代入して，

$$p(3k+2)=\sum_{i=1}^{k} q_i=\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{2}{3k+1}-\frac{6i}{(3k+2)(3k+1)}\right\}=\frac{2k}{3k+1}-\frac{6}{(3k+2)(3k+1)}\times\frac{k(k+1)}{2}$$

$$=\frac{k}{3k+2}\qquad \text{（答）}$$

＜解説＞

(1)

どの数のカードも同じ確からしさで，引かれることを前提とする。

2枚のうち1枚が3である確率＝（2枚のうち1枚が3の場合の数）／（8枚から2枚を引く場合の数）

＝（7通り）／（${}_8C_2$ 通り）

もう1枚が3より大きい確率＝（もう1枚が3より大きい場合の数）／（2枚のうち1枚が3の場合の数）

＝（5通り）／（7通り）

カードが6の場合の確率も同じ考え方で求める。

(2)

3の倍数を一般的に$3i$として扱えば良い。(1)の解説を参照すれば，

小さい数が$3i$である確率＝（もう1枚が$3i$より大きい場合の数）／（$(3k+2)$枚から2枚引く場合の数）

$$=\frac{3k+2-3i}{{}_{3k+2}C_2}$$

これを$i=1$からkまで加算すれば，$p(3k+2)$が求まる。

$\boxed{4}$ （60点）

aを正の定数とする。原点をOとする座標平面上の定点$A=A(a,0)$と，Aと異なる動点$P=P(x,y)$をとる。次の条件

AからPに向けた半直線上の点Qに対し

$\dfrac{AQ}{AP}\leqq 2$　ならば　$\dfrac{QP}{OQ}\leqq\dfrac{AP}{OA}$

を満たすPからなる領域をDとする。Dを図示せよ。

解答

$\dfrac{AQ}{AP}\leqq 2$　①，　$\dfrac{QP}{OQ}\leqq\dfrac{AP}{OA}$　②

図２を参照する。正弦定理により，$\dfrac{AP}{OA}=\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$，$\dfrac{QP}{OQ}=\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_2}$

②は$\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_2}\leqq\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$　③となり，$\sin\alpha_2>0$だから，

$\alpha_1 \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき$\beta_1 \leqq \alpha_1$　④

$\alpha_1 > \dfrac{\pi}{2}$のとき$\beta_1 \leqq \alpha_1{}' < \dfrac{\pi}{2}$　④', ただし$\alpha_1{}' = \pi - \alpha_1$

ところが，点Qが点Aに近づき，$AQ=0$では$\beta_1 = \dfrac{\pi}{2}$となり，④'を満足しない。したがって，

$\alpha_1 \leqq \dfrac{\pi}{2}$　⑤である。

$AQ=AP+QP$または$AQ=AP-QP$だから，①は$QP \leqq AP$　①'
$QP=AP$のとき②を満たすためには，$OA \leqq OQ$　⑥
ところが，$AQ>0$で$QP=AP$のとき④，⑥両方を満たすためには，$\alpha_1=\beta_1$，$OA=OQ$だから，

$\triangle OAP \equiv \triangle OQP$となり，$\alpha_2 = \beta_2 = \dfrac{\pi}{2}$

したがって$QP=AP$のとき，Pは直角三角形の直角の頂点となる。そのような点は直線OAを直径とする円周上の点となる。Pが円周の外の点であれば①'を満たすQに対し④を満足し，①，②を満たす。したがってDは図2のように，直線AOを直径とする円の円周を含む外側で，⑤を満たす$x \geqq 0$の点である。ただし，点Aは含まない。

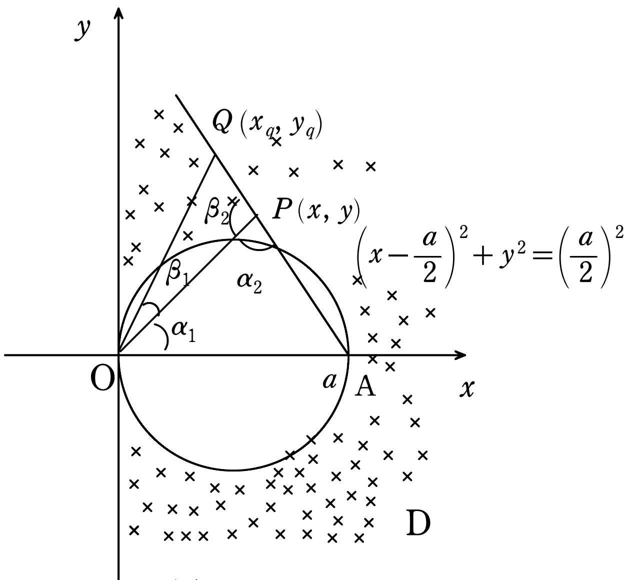

図2

＜解説＞

先ずは図を描いて題意を考える。そして解法の方針を考える。題意はQがAP上を①を満たすように動いたとき，②を満たすPの領域を求めることだと明確にする。

QがAP上か延長上かによって，図形が変わってくる。与えられた条件が図形の変化とどのように関係するかも把握する。条件を別の形式で表現して，見通しをつけ易くする。すると，②が④となり，加えて⑤の条件が付加されることが分かる。ここで，③から④と④'の二つが導かれることに注意する。そして④'には成立しないQがあることに気付く。

領域を求める場合，境界線を求めることができれば，境界線のいずれかの側が領域となるので，分かり易い。そこで，$QP=AP$の場合を考察すると，OAを直径とする円が境界線となっていることが

分かる。以上は図形に対して，与えられた条件を視覚的に考察しながら，領域を求めた。図形を式によって表し，数式処理によって，領域Dを求めてみよう。

別解

点$P=(x, y)$，点$Q=(x_q, y_q)$とする。$\dfrac{AQ}{AP}=k$とすれば，①から　$0 \leqq k \leqq 2$　⑦

$y_q=ky$　⑧，$a-x_q=k(a-x)$　⑨　とおける。

②は$\dfrac{\sqrt{(x-x_q)^2+(y-y_q)^2}}{\sqrt{{x_q}^2+{y_q}^2}} \leqq \dfrac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{a}$　⑩

⑧，⑨により$\sqrt{(x-x_q)^2+(y-y_q)^2}=\sqrt{(1-k)^2(x-a)^2+(1-k)^2y^2}=|k-1|\sqrt{(x-a)^2+y^2}$

したがって⑩は，$a|k-1| \leqq \sqrt{{x_q}^2+{y_q}^2}=\sqrt{\{a-k(a-x)\}^2+(ky)^2}$　⑪

⑪を整理すると，$k^2x^2+k^2y^2-2k^2ax+2kax \geqq 0$　⑫

$k=0$なら⑫は常に成立する。すなわち，点Pは点A以外のどこでも良い。$0<k \leqq 2$ならば，⑫は

$(x^2+y^2-2ax)k+2ax \geqq 0$　⑬

⑬はkの一次式だから，⑬で$k \to 0$として，$ax \geqq 0$すなわち$x \geqq 0$　⑭

⑬で$k=2$として，$x^2+y^2-2ax=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2-a^2 \geqq 0$，したがって$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2 \geqq a^2$　⑮

結局，⑭，⑮の領域，すなわち図2のDが求める領域である。

解答よりも別解の方がずっとスマートである。残念ながら，この解法を筆者は考えつかなかった。別解では，パラメータkを導入することに着想がある。こうすれば，点Qの座標を点Pの座標で表現でき，②の数式表現が簡明になる。その上で，kの変化範囲で②が成立する条件を考えれば良い。言われてみれば，容易な考え方である。試験本番で，短時間でこのような着想を得ることが望ましい。そうでない場合は，解答のような方法もあり得るし，部分的な得点を得ることも可能であろう。

＜総評＞

$\boxed{1}$

題意の簡明な微分積分の問題。計算を容易にするような着想が必要。計算ミスをしないようにていねいに。難易度は標準レベルよりやや容易なのでＢ－。

$\boxed{2}$

数列の問題。一見分かりにくそうな問題なので，問題文を良く読んで，題意を的確に掴むこと。その上でガウス記号を含む方程式を不等式に変換すれば，思いのほか簡単に解答への道筋を見いだせよう。続いて，正の整数xが存在しないaの条件を求めることがテーマであることに気づくことが重要だ。すると，ここでも思いのほか単純な数式によってaの条件が求まる。aの条件が整数nによって表現され，そのnに対して唯一のaが定まるように問題ができている。数列の和の計算も簡単である。計算処理は簡単だが，題意の把握と考え方に着想が必要なので，難易度はＡ－。

$\boxed{3}$

題意の簡明な確率の問題。(1)で具体例について解き，頭を馴らしてから，一般解を扱うようになっ

ている。計算も煩雑ではない。難易度は標準レベルよりやや容易なのでＢ－。

4

　戸惑いを感じる問題である。問題設定が漠としている。先ずは，題意を的確に捉えて，どのように解くべきか，方針を考える。こういう問題は題意を満足する特例について解いてみて，解答を概略把握すると良い。その上で，特例の解法を一般化して一般解を考えるのも良い。

　大別して，解法には2通りあろう。解答で示した図形視察的方法と解説の別解の計算的方法である。得意な方法で扱えば良いが，別解の計算的方法はスマートだが見通しがつけ難い。問題を理解し，解法を着想するのに難しさがあるので，難易度はＡ－。

110111