2010（H22)年度　東京大学　理科前期　入学試験　物理解説

第１問

Ⅰ

円軌道で運動するジェットコースターにおいて，円軌道に拘束されるための力のつりあいを考える。図１において，ジェットコースターには，重力の軌道垂直方向成分，レールからの抗力，軌道上を円運動することによる遠心力が働き，円軌道の垂直方向につりあっている。

ジェットコースターの位置を垂直真下からの角度αで表すと，速度をvとして，つりあいの式は

$$N+m_1g\cos(\pi-\alpha)=F_c=\frac{m_1v^2}{R} \qquad (1)$$

ジェットコースターがレールから離れないためには$N\geqq 0$だから，

$$N=\frac{m_1v^2}{R}+m_1g\cos\alpha\geqq 0\text{，したがって}\frac{m_1v^2}{R}\geqq -m_1g\cos\alpha \qquad (2)$$

$\alpha=\pi$すなわち円軌道の頂点に来たとき，(2)式の右辺が最大となるから，速度をv_pとして

$$v_p{}^2\geqq gR \qquad (3)$$

一方，エネルギー保存則により，初期の位置エネルギーは軌道頂点での運動エネルギーと位置エネルギーの和に等しいから，

$m_1gh_1=2m_1gR+\dfrac{m_1v_p{}^2}{2}$，(3)式を用いて，$v_p{}^2=2gh_1-4gR\geqq gR$，したがって

$h_1\geqq\dfrac{5}{2}R$　　（答）

Ⅱ

車両Aの軌道最下点での速度をv_bとする。車両Bと衝突して，両者が一体となって速度v_{bc}で動いたとする。運動量保存の法則により，

$$m_1v_b=(m_1+m_2)v_{bc} \qquad (4)$$

一体となった車両の頂点での速度をv_{pc}とすれば，Ⅰで述べたように，レールから離れないためには，$v_{pc}{}^2\geqq gR$　　(5)

一体となった車両の最下点と頂点にエネルギー保存則を適用すると，

$\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v_{bc}{}^2=\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v_{pc}{}^2+2(m_1+m_2)gR$，したがって

$$v_{bc}{}^2=v_{pc}{}^2+4gR \qquad (6)$$

一方，車両Aの初期の位置エネルギーと最下点での運動エネルギーにエネルギー保存則を適用すると，$m_1gh_2=\dfrac{1}{2}m_1v_b{}^2$

したがって，(4)，(6)を用いると，$h_2=\dfrac{v_b{}^2}{2g}=\dfrac{(m_1+m_2)^2}{2m_1{}^2g}v_{bc}{}^2=\dfrac{(m_1+m_2)^2}{2m_1{}^2g}(v_{pc}{}^2+4gR)$

(5)を用いて，$h_2\geqq\dfrac{(m_1+m_2)^2}{2m_1{}^2g}(gR+4gR)=\dfrac{5(m_1+m_2)^2R}{2m_1{}^2}=\dfrac{5}{2}R\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)^2$　　（答）

Ⅲ（1）

弾性衝突後の車両A，Bの速度をv_A，v_Bとする。ただし，右方向を正とする。運動量保存の法則により，$m_1v_b=m_1v_A+m_2v_B$

また弾性衝突のはね返り係数として，$-\dfrac{v_A-v_B}{v_b}=1$

これらの式から，$v_B=\dfrac{2m_1v_b}{m_1+m_2}$　　(7)

車両Bの最下点と頂点のエネルギー保存則により，頂点での速度をv_{pB}として

$\dfrac{1}{2}m_2{v_B}^2=\dfrac{1}{2}m_2{v_{pB}}^2+2m_2gR$，したがって${v_B}^2={v_{pB}}^2+4gR$　　(8)

また車両がレールから離れないためには，Ⅰ，Ⅱの議論と同様に　${v_{pB}}^2\geqq gR$　　(9)

初期の位置エネルギーと最下点での運動エネルギーの保存則から，

$$h_3=\frac{{v_b}^2}{2g}=\frac{(m_1+m_2)^2{v_B}^2}{8{m_1}^2g}=\frac{(m_1+m_2)^2}{8{m_1}^2g}({v_{pB}}^2+4gR)\geqq\frac{(m_1+m_2)^2}{8{m_1}^2g}(gR+4gR) \qquad (10)$$

ただし，ここで(7)，(8)，(9)を用いた。

$$h_3\geqq\frac{5}{8}R\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \qquad (11)（答）$$

（2）

摩擦が全く働かない場合の到達高さをh_4'として，車両Bが摩擦の働くレールまで達するか検討してみる。達するならば，摩擦を考慮して，最高到達点h_4を求めなければならない。

エネルギー保存の法則により，$m_2gh_4'=\dfrac{1}{2}m_2{v_B}^2$，(7)，(10)を用いて

$$h_4'=\frac{{v_B}^2}{2g}=\frac{2{m_1}^2{v_b}^2}{(m_1+m_2)^2g}=\frac{4{m_1}^2h_3}{(m_1+m_2)^2}=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2h_3$$

ここで(11)を用いると，

$$h_4'\geqq\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2\times\frac{5}{8}R\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2=\frac{5}{2}R$$

$h_4'>R$だから，車両Bは摩擦の働くレールを滑ることになる。

車両Bの最下点と最高到達点h_4でのエネルギー保存の法則を考える。

最高到達点での位置エネルギーは　m_2gh_4

摩擦によって失ったエネルギーは

（摩擦力）×（移動距離）$=\mu m_2g\cos\theta\times\dfrac{h_4-R}{\sin\theta}=m_2g(h_4-R)$

ただし，摩擦力$=\mu m_2g\cos\theta$，移動距離$=\dfrac{h_4-R}{\sin\theta}$，$\mu=\tan\theta$

最下点での運動エネルギーは　$\dfrac{1}{2}m_2{v_B}^2=\dfrac{m_2}{2}\left(\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2{v_b}^2=m_2gh_3\left(\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2$

したがって，エネルギー保存則によって，$m_2gh_3\left(\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2=m_2gh_4+m_2g(h_4-R)$

$$h_4=\frac{h_3}{2}\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{R}{2}$$ （答）

h_4に到達した車両Bは，そこでいったん停止する。図２に示すように，車両には重力のレール下方成分 $m_2g\sin\theta$ が働く。一方，静止摩擦係数をμ_0とすれば，レール下方への移動の抗力として，$\mu_0 m_2 g\cos\theta$ が存在する。両者の差は，

$$m_2g\sin\theta-\mu_0 m_2 g\cos\theta=m_2g\cos\theta(\tan\theta-\mu_0)=m_2g\cos\theta(\mu-\mu_0)<0$$

ただし，ここで動摩擦係数μは静止摩擦係数μ_0より小さいことを用いた。

したがって，摩擦力の方が車両Bの重力のレール下方成分より大きいので，車両Bはそのまま静止している。

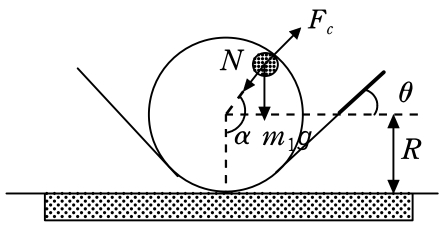

図１

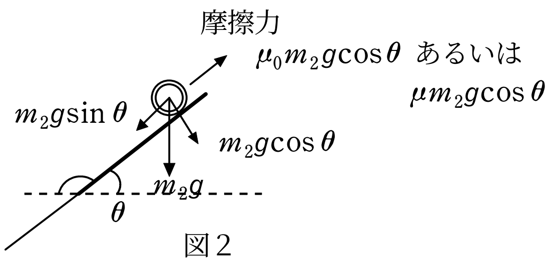

図２

＜解説＞

重力の作用の下での円運動に関する問題。位置エネルギーと運動エネルギーのエネルギー保存則，運動量保存の法則，弾性衝突，非弾性衝突，摩擦などの力学の基礎知識と応用力が問われる。計算量が多いので，計算力も問われる。誘導的に問題が展開されるので，前問の過程を次問で活用する。

Ⅰ　円軌道に車両が拘束されるので，力のつりあいを考える。レールから離れないためには，車両へのレールからの抗力が存在する必要がある。

Ⅱ　運動量保存の法則によって，一体となった車両の速度を求める。

Ⅲ（１）弾性衝突の条件，すなわちはね返り係数が1ということで，衝突後の速度を求める。その他はⅠ，Ⅱでの議論を適用する。

（２）摩擦のあるレールまで車両が上がるかどうかの判断が必要となる。摩擦のあるレールを滑ったとき，どこまで上がるかという式を立てる必要がある。いずれもエネルギー保存の法則を丁寧に適用すれば良い。

第２問

Ⅰ（１）

図３(a)のように，棒は抵抗１と直列に接続され，両端に電圧Vが印加されているので，

$$I_1=\frac{V}{2R}$$ （答）

（２）

図３(b)においてキルヒホッフの第2法則により，(1)が成立する。

$$i_2R+i_3R=i_1R \qquad (1)$$

抵抗１，棒に流れる電流による電圧降下に関して(2)が成立する。

$i_1R+(i_1+i_3)R=V$　　(2)

抵抗２，抵抗４に流れる電流による電圧降下に関して，(3)が成立する。

$i_2R+3(i_2-i_3)R=V$　　(3)

(1)，(2)，(3)から$i_1=\dfrac{4V}{9R}$，$i_2=\dfrac{V}{3R}$，$i_3=\dfrac{V}{9R}$

$I_2=i_1+i_3=\dfrac{5V}{9R}$　　（答）

（３）

フレミングの左手の法則により，(ロ)の方向に力を受ける。　　（答）

受ける力は（電流×磁束密度×棒の長さ）$=I_2Bl=\dfrac{5VBl}{9R}$　　（答）

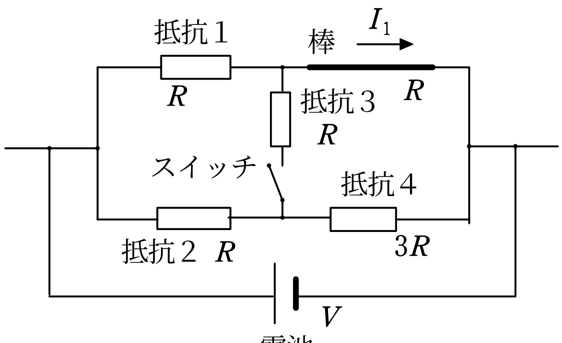

図３(a)

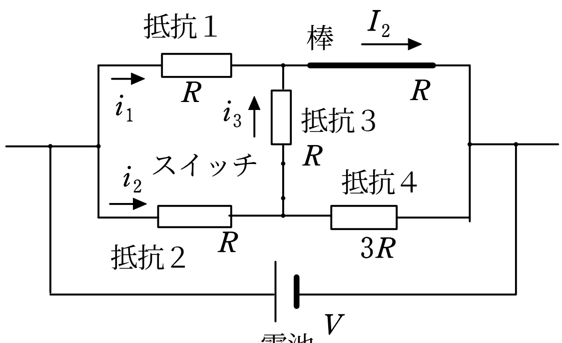

図３(b)

Ⅱ（１）

棒が(ロ)の方向に移動するので，回路を横切る磁束密度が増加する。したがって，電磁誘導により，導体棒中に発生する起電力は

$V_i=\left|-\dfrac{d\phi}{dt}\right|=v_1lB$　　(4)

この起電力は増加する磁束を減少させるように働くから，図４のような回路になる。ここでは仮想的に導体棒中に電池を書いた。この回路にキルヒホッフの法則を適用すると，

$i_1R+I_2R+V_i=2i_1R+V_i=V$

$i_3=0$だから，$i_1R=i_2R$，

また，$i_2(R+3R)=V$

これらによって$V_i=\dfrac{V}{2}$，したがって(4)から，

$v_1=\dfrac{V}{2lB}$　　（答）

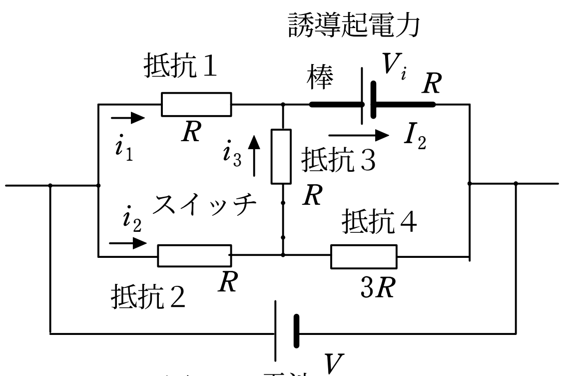

図４

（２）

等速運動をしているということは，棒には力が働かない。ということは棒には電流が流れないということである。図４の回路において$I_2=0$として，キルヒホッフの法則を適用する。

$i_1R+V_i=V$

$i_1(R+R)=i_2R$

$i_2R+3(i_1+i_2)R=V$

これより，$V_i=\dfrac{10V}{11}$，(4)においてv_1をv_2に変えて，$v_2lB=\dfrac{10V}{11}$だから

$v_2=\dfrac{10V}{11lB}$　　（答）

＜解説＞

磁場中の回路に働く力と誘導起電力に関する問題である。教科書に記載してある事項を理解していれば，対応できる。Ⅱでは，結論を得るに至る思考過程が問われる良問である。

Ⅰ（１）見慣れた回路に書き直して考える。単純な抵抗の直列，並列回路である。

（２）キルヒホッフの法則を適用すれば良い。

（３）電流の向きを間違えないこと。電流に働く磁場による力の公式を覚えておくこと。力の向きはフレミングの左手の法則による。

Ⅱ（１）棒に働く力によって，棒はレール上を移動する。すると，回路中の磁束が増加するので，起電力が発生する。この起電力は磁束変化を妨げるように発生するので，移動方向とは逆の力が発生するように電流が流れる。このことを考慮して，棒に起電力に相当する電池を置いた回路によって考える。起電力の電圧を回路によって求める。起電力は棒の速度に関係するから，速度を求めることができる。

（２)等速運動をしているということは，棒に力が働いていないということである。力が働かないということは棒に電流が流れないということである。棒に電流が流れない起電力の電圧を求める。

第３問

Ⅰ（１）

両端が開いているときは，両端が共鳴している波の腹になる。したがって，波長λと管長Lには

$\dfrac{m\lambda}{2}=L$，すなわち$\lambda=\dfrac{2L}{m}$　　($m=1, 2, 3,$・・・・）　の関係がある（図５(a)）。

振動数f，波長λ，音速Vの間には，$f\lambda=V$の関係があるから，

$f=\dfrac{V}{\lambda}=\dfrac{mV}{2L}$

したがって，$m=1, 2, 3$に対応して，振動数の小さい順に

$\dfrac{V}{2L}, \dfrac{V}{L}, \dfrac{3V}{2L}$　　（答）

（２）

開口端は腹、閉口端は節の波となるので，波長と管長には

$\dfrac{(2m-1)\lambda}{4}=L$　　($m=1, 2, 3,$・・・・）　の関係がある（図５(b)）。

したがって　$f=\dfrac{V}{\lambda}=\dfrac{(2m-1)V}{4L}$，したがって$m=1, 2, 3$に対応して，振動数の小さい順に

$\dfrac{V}{4L}$, $\dfrac{3V}{4L}$, $\dfrac{5V}{4L}$　　(答)

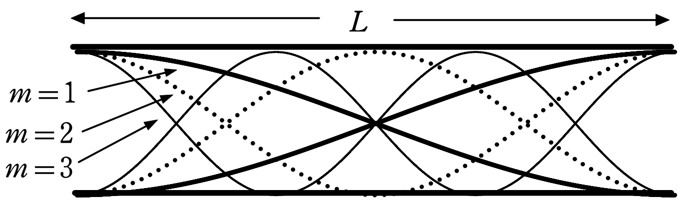

図５(a)　両開口端の管に共鳴する音波

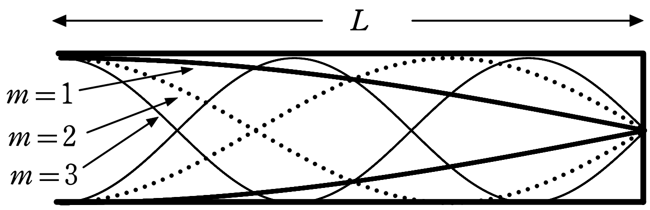

図５(b)　開口端と閉口端の管に共鳴する音波

Ⅱ（１）

両端とも閉口と考えると，$L=\dfrac{m\lambda}{2}$の定常波が発生する。$f=\dfrac{mV}{2L}$だから，

$692=\dfrac{mV}{2L}$，$519=\dfrac{(m-1)V}{2L}$とすれば，$m=4$，$\lambda=\dfrac{L}{2}$

波の節は$\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{L}{4}$ごとに位置するから，節の位置は管の右から

$\dfrac{nL}{4}$　($n=0, 1, 2, 3, 4$)　だから，0，0.25，0.5，0.75，1［m］　(答)

（２）

$V=692\times\dfrac{2L}{m}=346$　[m/s]　　(答)

Ⅲ（１）

右端が開口になるのだから，左端が節，右端が腹となる定常波が発生する。Ⅰ（２）から，

$f=\dfrac{(2m-1)V}{4L}$，$400\leqq f\leqq 700$，$400\leqq\dfrac{(2m-1)\times 346}{4}\leqq 700$，これを満足する整数$m$は，

$m=3$，4なので，

$f_1=\dfrac{5\times 346}{4}=432.5$　[Hz]，　$f_2=\dfrac{7\times 346}{4}=605.5$　[Hz]

Ⅳ（１）

音源が移動しているので，Cを経由して聞く音波も，直接聞く音波もドップラー効果により，振動数が変化している。その変化がうなりの原因となる。

Cで聞く音波の振動数は音源が速度vで接近しているので，$f_{1C}=\dfrac{Vf_1}{V-v}$

直接Dに到達する音波の振動数は，音源が$v\cos 60°=0.5v$で接近しているから，ドップラー効果により，振動数は，$f_{1D}=\dfrac{Vf_1}{V-0.5v}$

うなりの振動数は$f_{1C}-f_{1D}=\left(\dfrac{1}{V-v}-\dfrac{1}{V-0.5v}\right)Vf_1=\dfrac{0.5vVf_1}{(V-v)(V-0.5v)}$

（2）

$\dfrac{0.5vVf_1}{(V-v)(V-0.5v)}=2$とおいて，$v$を求める。$x=\dfrac{v}{V}$とおき，$f_1=432.5$だから，

$x^2-219.25x+2=0$，これを解くと，$x<1$として，$x=0.009$なので，

$v=0.009\times346=3.11\fallingdotseq3$ ［m/s］（有効数字1桁）　　（答）

＜解説＞

音波に関する問題である。

Ⅰ（1）管と共鳴している波を具体的に書いて見る。波長と振動数は反比例する。

（2）同上

Ⅱ（1）右端は閉口であることは明らかである。音波を発生する左端の膜は微小に振動するのだから，節になるのかどうか，迷うところである。この問題としては，閉口端として扱うように設定されている（誤解を招く書き方だが，筆者は相当に考え込んだ）。

（2）（1）が分れば，求まる。

Ⅲ　右端が開口，左端が閉口であるから，右端が腹，左端が節の定常波が発生するとして，共鳴の条件から求める。これは既にⅠ（2）で求めているから，それを使う。

Ⅳ（1）うなりの発生は，観測する音波の振動数がずれているためである。そのずれは，音源が移動するためで，移動速度による観測音波の振動数の変化はドップラー効果として知っていなければならない。うなりは両者の振動数の差によるものである。

（2）（1）で求めた式に数値を代入して計算するだけの問題である。2次方程式の解を求めるのだが，係数が大きくなるので，少々工夫した方が良い。

＜総評＞

第1問は力学分野。エネルギー保存則，遠心力，運動量保存の法則，非弾性衝突，弾性衝突，摩擦など，力学分野の主要な概念の理解と思考過程が総合的に問われる良問である。円軌道で宙返りする条件の問題は演習問題で扱うことが多いだろう。計算量が多いので，丁寧に根気強く式を書いていく必要がある。こういうときに案外重要なのは，変数の表示のしかたである。特に，添え字の使い方である。例えば，速度をvとしても，いろいろな箇所での速度があるから，添え字によって区別する。どこの速度かが分り易く，混同し難い添え字を付けることも大事である。

第2問は電磁気と電気回路の問題。磁場中を移動する棒という設定はよくある問題。磁場が電流に力を及ぼすことから，力学と電磁気学が結びついて，このような問題ができる。力と起電力が発生するから，試験問題にし易い。

第3問は音波の問題。気柱で共鳴する音波，すなわち定常波についての基本的な問題である。定常波については，的確に理解しておきたい。解説中にも述べたように，筆者には，やや首をかしげる問題を含んでいる。もう少し検討してみたい。

100320