

第 1 問

3 辺の長さが a と b と c の直方体を、長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき、直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

- (1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。
- (2) $a + b + c = 1$ のとき、 V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

第 2 問

(1) すべての自然数 k に対して, 次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して, 次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

第 3 問

2つの箱LとR, ボール30個, コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン1枚を用意する。 x を0以上30以下の整数とする。Lに x 個, Rに $30-x$ 個のボールを入れ, 次の操作(#)を繰り返す。

(#) 箱Lに入っているボールの個数を z とする。コインを投げ, 表が出れば箱Rから箱Lに, 裏が出れば箱Lから箱Rに, $K(z)$ 個のボールを移す。ただし, $0 \leq z \leq 15$ のとき $K(z) = z$, $16 \leq z \leq 30$ のとき $K(z) = 30 - z$ とする。

m 回の操作の後, 箱Lのボールの個数が30である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15) = P_2(15) = \frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2), (3)に答えよ。

- (1) $m \geq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。
- (2) n を自然数とするととき, $P_{2n}(10)$ を求めよ。
- (3) n を自然数とするととき, $P_{4n}(6)$ を求めよ。

第 4 問

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C: y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 2}$$

と、その上の相異なる 2 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を考える。

- (1) P_i ($i = 1, 2$) を通る x 軸に平行な直線と、直線 $y = x$ との交点を、それぞれ H_i ($i = 1, 2$) とする。このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ。
- (2) $x_1 < x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leq x \leq x_2$ の範囲にある部分と、線分 P_1O , P_2O とで囲まれる図形の面積を、 y_1, y_2 を用いて表せ。

第 5 問

C を半径 1 の円周とし、 A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t = 0$ に出発し、 C 上を各々一定の速さで、 P, Q は反時計回りに、 R は時計回りに、時刻 $t = 2\pi$ まで動く。 P, Q, R の速さは、それぞれ $m, 1, 2$ であるとする。(したがって、 Q は C をちょうど一周する。) ただし、 m は $1 \leq m \leq 10$ をみたす整数である。 $\triangle PQR$ が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

第 6 問

四面体 $OABC$ において、4つの面はすべて合同であり、 $OA = 3$ 、 $OB = \sqrt{7}$ 、 $AB = 2$ であるとする。また、3点 O 、 A 、 B を含む平面を L とする。

- (1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。 \vec{OH} を \vec{OA} と \vec{OB} を用いて表せ。
- (2) $0 < t < 1$ をみたす実数 t に対して、線分 OA 、 OB 各々を $t : 1 - t$ に内分する点をそれぞれ P_t 、 Q_t とおく。2点 P_t 、 Q_t を通り、平面 L に垂直な平面を M とするとき、平面 M による四面体 $OABC$ の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $S(t)$ の最大値を求めよ。