2010（H22)年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）

第１問

3辺の長さがaとbとcの直方体を，長さbの1辺を回転軸として90°回転させるとき，直方体が通過する立体をVとする。

（１）Vの体積をa, b, cを用いて表せ。

長さbの1辺に垂直な断面を図１に示す。90°回転するとAはA’，CはC’，DはD’に移動する。この図から分るように，直方体が通過する立体は，厚さがbだから

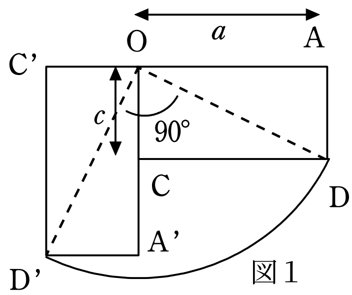

図１

三角形OAD部分の体積は$\dfrac{ac}{2}\times b$

扇形ODD’部分の体積は$\dfrac{\pi(a^2+c^2)}{4}\times b$

三角形OC’D’部分の体積は$\dfrac{ac}{2}\times b$

したがって，$V=abc+\dfrac{\pi b(a^2+c^2)}{4}$　　（答）

（２）$a+b+c=1$のとき，Vの体積のとり得る値の範囲を求めよ。

（１）より，$\lim\limits_{b\to 0}V=0$だから，Vの下限は0である。上限を求める。

$$V=\frac{b}{4}\{4ac+\pi(a^2+c^2)\}=\frac{\pi b}{8}\left\{(a+c)^2+(a-c)^2+\frac{8ac}{\pi}\right\}$$

$a+c=1-b=k_1$，$a-c=k_2$，とおくと，

$$V=\frac{\pi b}{8}\left\{{k_1}^2+{k_2}^2+\frac{2({k_1}^2-{k_2}^2)}{\pi}\right\}=\frac{\pi b}{8}\left\{\left(\frac{\pi+2}{\pi}\right){k_1}^2+\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right){k_2}^2\right\}$$

$\pi-2>0$だから，k_1が一定とすれば，$|k_2|$が大きいほど，Vは大きい。すなわち，aまたはcが0になるほどVは大きい。そこで，$a=1-b$，$c=0$とおくと，

$V=\dfrac{\pi b(1-b)^2}{4}$，$\dfrac{dV}{db}=\dfrac{\pi}{4}(1-b)(1-3b)$だから，$V$は$b=\dfrac{1}{3}$で最大値$\dfrac{\pi}{27}$となる。したがって，

$0<V<\dfrac{\pi}{27}$　　（答）

＜解説＞

立体の問題！と思って身構えてしまわないこと。回転の軸となるbの辺に垂直などの断面も同じ図形だから，その図形によって，どのような立体ができるか，その体積はどうなるかが分る。回転によって，図形が覆う領域の面積を求め，それに長さをかければ体積を求めることができる。（２）では，上限を求めるための計算上の技巧が必要だが，それほど難しいものではない。

第２問

（１）すべての自然数kに対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

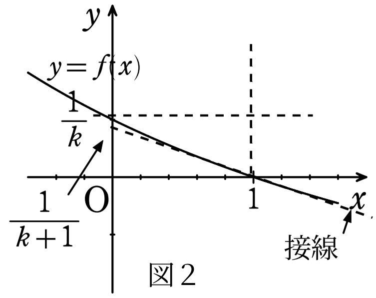

図２

$y=f(x)=\dfrac{1-x}{k+x}$のグラフを図２に示す。

このグラフは下に凸である。すなわち，$f(x)$の任意の2点を結ぶ直線より，2点間の$f(x)$は下にある。

$f(0)=\dfrac{1}{k}$，$f(1)=0$だから，$S_1=\dfrac{1}{k}\times 1$，$S=\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx$とおくと，

図２より明らかに，$S<\dfrac{S_1}{2}=\dfrac{1}{2k}$

また，$f'(x)=\dfrac{-(k+1)}{(k+x)^2}$，$f'(1)=\dfrac{-1}{(k+1)}$だから，点$(1, 0)$における$f(x)$の接線は$y=\dfrac{-(x-1)}{(k+1)}$。

y軸との交点は$y=\dfrac{1}{k+1}$だから，$S_2=\dfrac{1}{k+1}\times 1$とおくと，

図２より明らかに，$\dfrac{S_2}{2}=\dfrac{1}{2(k+1)}<S$

これらは自然数kに関わらず成立するから，すべての自然数kに対して，

$\dfrac{1}{2(k+1)}<\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$が証明された。

（２）$m>n$であるようなすべての自然数mとnに対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

$\log\dfrac{m}{n}=\displaystyle\int_n^m\frac{1}{x}dx$であることに着目すると，

$$\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{m-n}\int_{n+k-1}^{n+k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n+k}\right)dx$$

図３を参照すると，$\displaystyle\int_{n+k-1}^{n+k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n+k}\right)dx<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)$であるから，

$$\sum_{k=1}^{m-n}\int_{n+k-1}^{n+k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n+k}\right)dx<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-n}\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}$$

一方，$y=\dfrac{1}{x}$とおくと$y'=\dfrac{-1}{x^2}$，$y=\dfrac{1}{x}$上の点$\left(n+k,\ \dfrac{1}{n+k}\right)$における接線は，

$y-\dfrac{1}{n+k}=\dfrac{-1}{(n+k)^2}(x-n-k)$だから，$x=n+k-1$との交点は

$\left(n+k-1,\ \dfrac{1}{n+k}+\dfrac{1}{(n+k)^2}\right)$，したがって図３を参照すると，

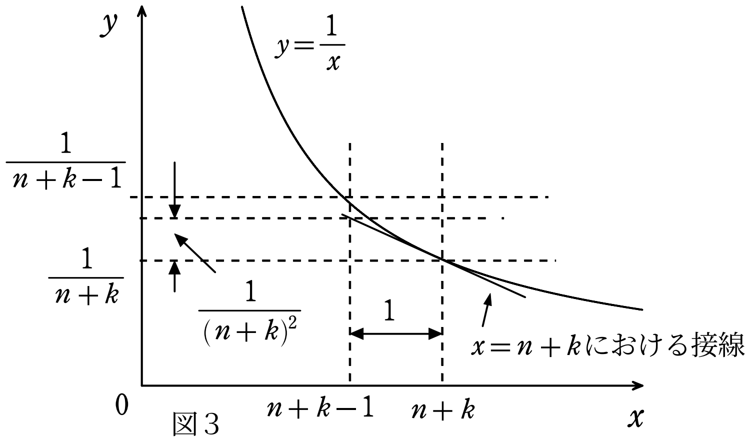

図３

$\dfrac{1}{2(n+k)^2}<\displaystyle\int_{n+k-1}^{n+k}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{n+k}\right)dx$　である。

また，$\dfrac{1}{(n+k)^2}>\dfrac{1}{(n+k)(n+k+1)}=\dfrac{1}{n+k}-\dfrac{1}{n+k+1}$ だから，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-n}\left(\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}\right)<\sum_{k=1}^{m-n}\int_{n+k-1}^{n+k}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{n+k}\right)dx$$

左辺$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{m+1}\right)=\dfrac{m-n}{2(n+1)(m+1)}$

以上によって

$\dfrac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\dfrac{m}{n}-\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}\dfrac{1}{k}<\dfrac{m-n}{2mn}$，であることが証明された。

＜解説＞

証明問題である。一見，簡単そうだが骨がおれる。

（１）積分を実行して，式の処理によって示そうとしても、なかなかうまくゆかない。こういう場合は図を描いて考察する。すると，何かが閃いて簡単に分る場合がある。また，数式の変形も重要である。ここで示した解法では，与えられた関数が下に凸であることが前提となる。厳密には、そのことを証明しておかなければならないが，ここでは，下に凸であることだけを記述しておけば十分である。

（２）も同様である。$\dfrac{1}{x}$の積分が関係していることに迅速に着眼できると良い。ここで示した解法では，数式の変換に若干の技巧を要するが，難しいものではない。（１）との関連であるが，この解法では，同様の図解であること以外に共通性がない。（１）が（２）の誘導問題となるような解法を残念ながら案出することができなかった。私にとって，この問題は少々難しかった。

そこで，ネット上に掲載されていた解答を参考にして，（１）からの誘導的解法を示す。

（１）で証明された結果は，$\dfrac{1}{2(k+1)}<\displaystyle\int_0^1\dfrac{1-x}{k+x}dx<\dfrac{1}{2k}$　　(1)

$$\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx = \int_0^1\left(\frac{k+1}{k+x}-1\right)dx = \Big[(k+1)\log(k+x)-x\Big]_0^1$$

$$=(k+1)\log(k+1)-1-(k+1)\log k \qquad (2)$$

したがって(1)は，$\dfrac{1}{2(k+1)}<(k+1)\log\dfrac{k+1}{k}-1<\dfrac{1}{2k}$，となる。$(k+1)$で割ると，

$\dfrac{1}{2(k+1)^2}<\log\dfrac{k+1}{k}-\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{2k(k+1)}$，さらに$\dfrac{1}{2(k+1)^2}>\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}$だから，

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<\log\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)} \qquad (3)$$

この式を$k=n-1$からmまで加えると

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}=\frac{1}{(m+1)(n+1)} \qquad (4)$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\log\frac{k+1}{k}-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}=\log\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{m-1}{m-2}\cdot\frac{m}{m-1}\right)-\sum_{k=n-1}^{m}\frac{1}{k}$$

$$=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} \qquad (5)$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}=\frac{m-n}{mn} \qquad (6)$$

(3)～(6)によって，

$\dfrac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\dfrac{m}{n}-\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\dfrac{m-n}{2mn}$，であることが証明された。

巧妙で分り易い証明である。しかし、この着想を得るのは容易ではないと思う。(2)を(1)に適用すること，$(k+1)$で割ること，が着想の基である。(2)を(1)に適用すれば，$(k+1)$で割ることは目的に近づくので，着想できるかも知れない。

(3)から(4)にいたるにも新たな着想が必要である。これは，(3)式を証明すべき式と比較しながら凝視すれば思いつくだろう。数学的な着想には，本人の素質とともに，数多くの問題を解くことによる感覚を磨くことが有効だろう。

第３問

２つの箱LとR，ボール30個，コイン投げで表と裏が等確率$\dfrac{1}{2}$で出るコイン1枚を用意する。xを0以上30以下の整数とする。Lにx個，Rに$30-x$個のボールを入れ，次の操作（＃）を繰り返す。

（＃）箱Lに入っているボールの個数をzとする。コインを投げ，表が出れば箱RからLに，裏が出れば箱LからRに，$K(z)$個のボールを移す。ただし，$0\leqq z\leqq 15$のとき$K(z)=z$，$16\leqq z\leqq 30$のとき，$K(z)=30-z$とする。

m回操作の後，箱Lのボールの個数が30である確率を$P_m(x)$とする。たとえば

$P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$となる。以下の問 (1)，(2)，(3)に答えよ。

（１）$m\geqq 2$のとき，xに対してうまくyを選び，$P_m(x)$を$P_{m-1}(y)$で表せ。

$x=0$の場合，コインの表裏に関わらずコインは移動しない。したがって$P_m(0)=P_{m-1}(0)=0$

$1 \leqq x \leqq 14$では，連続して表が出て$z=30$となる。箱Lの中のボールは$z=x, 2x, 4x, 8x, ... \leqq 15$と推移する。仮に$8x$で15を超えるとすれば，次の試行で表が出れば，$z=30$，裏が出れば，$z=8x-(30-8x)=16x-30$となって，再び繰り返すことになる。このような$z$を書き出してみると，下のような数列となる。

$x, 2x, 4x, 8x, 30$　←コイン表

コイン裏→　$2(8x-15), 4(8x-15), 8(8x-15), 30$

これを良く見ると，$x, 2x, 4x, 8x, ..$は同じ数字列を辿ることが分る。すると，$1 \leqq x \leqq 14$では

$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$であることが分る。

$x=15$の場合，コインが表なら$z=30$，裏なら$z=0$となり，以後のコイン表裏は関係ない。

したがって，　$P_m(15)=P_{m-1}(15)=\frac{1}{2}$

次に$x>15$の場合を考えてみよう。zの推移は，コインの表が出て30，裏が出て表が出続けることにより$z=30$になるから，

$x, 30$　←コイン表

コイン裏→　$(2x-30), 2(2x-30), 4(2x-30), 30$

これを見ると，xは先に$\frac{1}{2}$の確率で$z=30$になった上で，裏になると$(2x-30)$と同じ数列を辿ることが分る。したがって，$x \geqq 15$では，$P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)$であることが分る。

$x=30$では，コインの表裏に関わらずボールは移動しない。したがって$P_m(30)=P_{m-1}(30)=1$

以上をまとめると，

$$
\begin{array}{ll}
P_m(x)=P_{m-1}(x)=0 & x=0 \\
\frac{1}{2}P_{m-1}(2x) & 1 \leqq x \leqq 14 \\
P_{m-1}(x)=\frac{1}{2} & x=15 \\
\frac{1}{2}\{1+P_{m-1}(2x-30)\} & 15 < x \leqq 29 \\
P_{m-1}(x)=1 & x=30
\end{array}
$$

（答）

（２）nを自然数とするとき，$P_{2n}(10)$を求めよ。

（１）の結果を利用すると，

$P_{2n}(10)=\frac{1}{2}P_{2n-1}(20)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\{1+P_{2(n-1)}(10)\}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2=r$，$P_{2n}(10)=a_n$とおけば，$a_n=r(a_{n-1}+1)$のような数列となる。

この種の数列の一般項を求める常套的手法により，$a_n-\frac{r}{1-r}=r\left(a_{n-1}-\frac{r}{1-r}\right)$だから，

$a_n-\frac{r}{1-r}=r^{n-2}\left(a_2-\frac{r}{1-r}\right)$となる。$a_2=P_2(10)=\frac{1}{4}$，$\frac{r}{1-r}=\frac{1}{3}$だから，

$$a_n = P_{2n}(10) = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\} \qquad \text{（答）}$$

（３）nを自然数とするとき，$P_{4n}(6)$を求めよ。

（１）の結果を利用する。

$$P_{4n}(6) = \frac{1}{2}P_{4n-1}(12) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_{4n-2}(24) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\{1 + P_{4n-3}(18)\} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\{1 + P_{4(n-1)}(6)\}$$

（２）と同様に，$a_n = P_{4n}(6)$とおくと，$a_n - \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(a_{n-1} - \frac{1}{5}\right)$だから，

$a_n = P_{4n}(6) = \left(\frac{1}{2}\right)^{4(n-1)}\left(a_1 - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5}$，$a_1 = P_4(6) = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right\} = \frac{3}{16}$だから，

$$P_{4n}(6) = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{4n}\right\} \qquad \text{（答）}$$

＜解説＞

確率の問題。ややこしい問題なので，題意を的確に把握することが重要である。図を描いてこの問題の試行過程を迅速に理解し，全貌をまず頭に描こう。

$m-1$回操作で箱Lのボールの個数が30個なら，$K(z) = 30 - z = 0$だから，以降の試行のコインの表裏に関わらずボールは移動しない。m回操作でも箱Lのボールの個数は30個である。この操作では$z = 0$あるいは30になった時点で，ボールの移動は止まる。

$m-1$回操作で$z \geqq 15$なら，m回操作でコインの表が出れば，$z = 30$。$z < 15$なら，m回操作でコインの表裏に関わらず，$z = 30$にはならない。

$z \geqq 15$まで表が出，次に再び表が出る確率が$P_m(x)$ということになる。

そこでまず，$1 \leqq x \leqq 14$の場合を考える。一度でもコインの裏が出ると，$z = 0$だから，$z = 30$にならない。したがって，$z = 30$になるまでコインが連続して表になる確率を考えなければならない。

この場合，$z \geqq 15$になった次の試行で表が出れば，$z = 30$となって以後そのまま。

（１）上記の考え方に基づいて，$x = 0, 1〜14, 15, 16〜29, 30$の区域ごとに検討する。一般的な解を求めようとしても，なかなか着想できない。こういう場合は，zがどのような推移を辿って，30に至るかを具体的に書き出してみることだ。すると法則性が見えてくる。

（２）問題が誘導的に展開されていることに気づくこと。（１）の結果を利用する。実は（１）を利用しなくても，$x = 10$の場合のzの推移を見れば，解答できる。

$x = 10$の場合のzの推移を書き出して，zの推移を検討する。$z = 30$まで表が出続けることが必要で，$m = 2n$ごとに$z = 30$となるから，zの推移は下のようになる。

m　1　2　3　4　5　6

10, 20, 30　←　コイン表

裏　→　10, 20, 30　←表

裏　→　10, 20, 30

したがって，初項$\left(\frac{1}{2}\right)^2$，公比$\left(\frac{1}{2}\right)^2$の等比級数となるから，

$$P_{2n}(10)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}$$ （答）

（３）同様に（１）を利用しない方法を考えよう。

zの推移を検討する。$z=30$まで表が出続けることが必要で，$m=4n$ごとに$z=30$となるから，zの推移は下のようになる。

m　1　2　3　4　5　6 7　8

6, 12, 24, 30　←　コイン表

裏　→ 18 , 30　←表

裏　→ 6, 12, 24, 30 ←　表

18, 30

$m=4$まで（すなわち$n=1$）で，$z=30$になる確率は$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}$である。これが，$n$が増えるごとに$\left(\frac{1}{2}\right)^4$倍されて，増加する。したがって，初項が$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}$，公比が$\left(\frac{1}{2}\right)^4$の等比級数となるから，

$$P_{4n}(6)=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^{4(n-1)}\right\}=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}\right\}$$ （答）

第４問

Oを原点とする座標平面上の曲線

$$C: y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

と，その上の相異なる2点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$を考える。

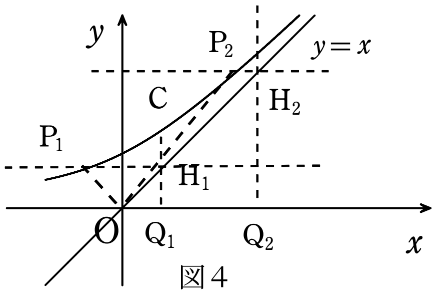

図４

（１）$P_i(i=1,2)$を通るx軸に平行な直線と，直線$y=x$との交点を，それぞれ$H_i(i=1,2)$とする。このとき，$\triangle OP_1H_1$と$\triangle OP_2H_2$の面積は等しいことを示せ。

図４を参照しながら考える。

$$\triangle OP_1H_1=\triangle Q_1P_1H_1=\frac{1}{2}P_1H_1\times H_1Q_1$$

$$=\frac{1}{2}y_1(y_1-x_1)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}x_1+\sqrt{\frac{1}{4}{x_1}^2+2}\right)\left(\frac{-1}{2}x_1+\sqrt{\frac{1}{4}{x_1}^2+2}\right)\right\}=1$$

$\triangle OP_2H_2$の場合は上式において，(x_1, y_1)を(x_2, y_2)に置き換えれば良いので，$\triangle OP_2H_2=1$
したがって，$\triangle OP_1H_1$と$\triangle OP_2H_2$の面積は等しい。

（2）$x_1<x_2$とする。このときCの$x_1\leqq x\leqq x_2$の範囲にある部分と，線分P_1O，P_2Oとで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2を用いて表せ。

直線OP_1の式は$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，直線OP_2の式は$y=\dfrac{y_2}{x_2}x$

したがって，求める図形の面積は

$$\int_{x_1}^{0}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}-\frac{y_1}{x_1}x\right)dx+\int_{0}^{x_2}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}-\frac{y_2}{x_2}x\right)dx$$

ここで，$y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2+2}$ だから，$x=\left(y-\dfrac{2}{y}\right)$となるから，

$$dx=\left(1+\frac{2}{y^2}\right)dy,\ \text{したがって，}\int\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2}\right)dx=\int y\left(1+\frac{2}{y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+2\log y$$

$$\int_{x_1}^{0}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}-\frac{y_1}{x_1}x\right)dx+\int_{0}^{x_2}\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}-\frac{y_2}{x_2}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{y^2}{2}+2\log t\right]_{y_1}^{\sqrt{2}}-\left[\frac{y_1x^2}{2x_1}\right]_{x_1}^{0}+\left[\frac{y^2}{2}+2\log y\right]_{\sqrt{2}}^{y_2}-\left[\frac{y_2x^2}{2x_2}\right]_{0}^{x_2}$$

$$=1+\log 2-\frac{{y_1}^2}{2}-2\log y_1+\frac{x_1y_1}{2}+\frac{{y_2}^2}{2}+2\log y_2-1-\log 2-\frac{x_2y_2}{2}$$

$$=\frac{{y_2}^2}{2}-\frac{{y_1}^2}{2}+2\log\frac{y_2}{y_1}+\frac{x_1y_1}{2}-\frac{x_2y_2}{2}=2\log\frac{y_2}{y_1}$$ （答），ただしここで下記を用いた。

$$\frac{x_1y_1}{2}-\frac{{y_1}^2}{2}=\frac{y_1}{2}(x_1-y_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}{x_1}^2+2}\right)\left(\frac{x_1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}{x_1}^2+2}\right)=-1$$

$$\frac{{y_2}^2}{2}-\frac{x_2y_2}{2}=\frac{y_2}{2}(y_2-x_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}{x_2}^2+2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}{x_1}^2+2}-\frac{x_2}{2}\right)=1$$

<解説>

素直で簡明な積分の問題。こういう問題を考案できることに，感心する。

（1）図を書いて題意を考察すれば，三角形の面積をx_1, y_1, x_2, y_2によって表すことができる。簡明な結果が得られる。

（2）定積分の式を書き出すことは容易である。被積分関数の不定積分を求めることが課題となる。この問題では幸い，与えられた関数の不定積分が容易な形式になっている。各項ごとに積分可能になる。計算をていねいに実行する。見通しをつけて，簡明な結果を得るようにする。

第５問

Cを半径1の円周とし，AをC上の1点とする。3点P，Q，RがAを時刻$t=0$に出発し，C上を各々一定の速さで，P，Qは反時計回りに，Rは時計回りに，時刻$t=2\pi$まで動く。P，Q，Rの速さは，それぞれm，1，2であるとする。（したがって，QはCをちょうど一周する。）ただし，mは$1\leqq m\leqq 10$を満

たす整数である。△PQRがPRを斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さmと時刻tの組をすべて求めよ。

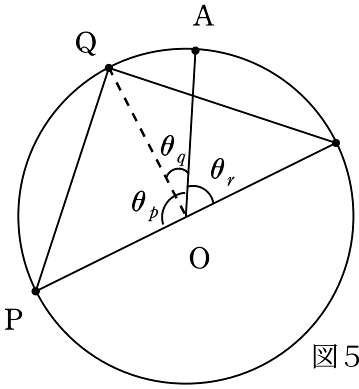

図５

図５を参照しながら考える。点Aからの回転角をそれぞれθ_p，θ_q，θ_rとする。すると$\theta_p = mt$，$\theta_q = t$，$\theta_r = -2t$，ただし反時計回りを正とする。△PQRがPRを斜辺とする直角二等辺三角形であるためには，

$\theta_p - \theta_r = (m+2)t = \pi + 2n_1\pi$　(1)，ただしn_1は0を含む自然数

$\theta_p - \theta_q = (m-1)t = \dfrac{\pi}{2} + n_2\pi$　(2)，ただしn_2は0を含む自然数

$\theta_q - \theta_r = 3t = \dfrac{\pi}{2} + n_3\pi$　(3)，ただしn_3は0を含む自然数

ただし(3)は(1)，(2)から導出されるので，不要である。

(1)，(2)からtを消去すると，$(m+2)\left(\dfrac{1}{2} + n_2\right) = (m-1)(1+2n_1)$　(4)

これより，mは偶数である。すると右辺は奇数だから，$m+2 = 2\times$奇数である。

すると$1 \leqq m \leqq 10$だから，$m=4$あるいは8である。

$m=4$では，(4)から$3+6n_2 = 3+6n_1$，したがって$n_2 = n_1$

(1)から$6t = \pi + 2n_1\pi$，$t \leqq 2\pi$だから，$n_1 \leqq 5$

すると，$t = \dfrac{(1+2n_1)\pi}{6}$，$n_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$　(5)

$m=8$では(4)から，$5(1+2n_2) = 7(1+2n_1)$，(1)から$10t = \pi + 2n_1\pi$，$t \leqq 2\pi$だから，$n_1 \leqq 9$，

すると，$1+2n_1 = 5$あるいは15　ゆえに$n_1 = 2, 7$

(1)から$t = \dfrac{(1+2n_1)\pi}{10}$，$n_1 = 2, 7$　(6)

(5)，(6)から(m, t)の組み合わせは

$$\left(4, \frac{\pi}{6}\right), \left(4, \frac{\pi}{2}\right), \left(4, \frac{5\pi}{6}\right), \left(4, \frac{7\pi}{6}\right), \left(4, \frac{3\pi}{2}\right), \left(4, \frac{11\pi}{6}\right), \left(8, \frac{\pi}{2}\right), \left(8, \frac{3\pi}{2}\right)$$
（答）

＜解説＞

題意は簡明だが，組み合わせを網羅するにはどうしたら良いか，やや悩まされる。まずは図を書いて，どのような場合に直角二等辺三角形ができるか，概容を把握する。その上で，その条件を一般的に書き下し，使用する整数の条件を考察すれば，思いのほか簡明に求めることができる。(4)式を求め，この式の意味するところを考えることがポイントである。得られた組み合わせについて，図上で確認することができれば，安心である。

第６問

四面体OABCにおいて，4つの面はすべて合同であり，OA=3，OB=$\sqrt{7}$，AB=2であるとする。また，3点O, A, Bを含む平面をLとする。

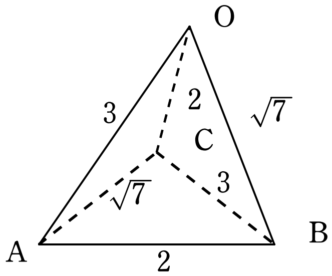

図６(1)

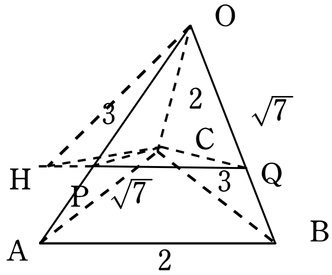

図６(2)

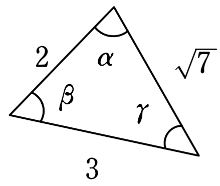

図６(3)

（１）点Cから平面Lにおろした垂線の足をHとおく。$\overrightarrow{OH}$を$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ。

図６を参照しながら考える。

$\overrightarrow{OH}=c_a\overrightarrow{OA}+c_b\overrightarrow{OB}$とする。$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}$だから，$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CH}$と$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$は直交するから，

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC})\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\left(c_a\overrightarrow{OA}+c_b\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OA}-6\cos\beta$$

$$=9c_a+3\sqrt{7}\,c_b\cos\gamma-6\cos\beta=0 \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC})\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(c_a\overrightarrow{OA}+c_b\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OB}-2\sqrt{7}\cos\alpha$$

$$=3\sqrt{7}\,c_a\cos\gamma+7c_b-2\sqrt{7}\cos\alpha=0 \qquad (2)$$

(1)×7すると，$63c_a+21\sqrt{7}\,c_b\cos\gamma-42\cos\beta=0$

(2)×$3\sqrt{7}\cos\gamma$すると，$63c_a(\cos\gamma)^2+21\sqrt{7}\,c_b\cos\gamma-42\cos\alpha\cos\gamma=0$

したがって，$3c_a(1-\cos^2\gamma)-2(\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma)=0$，$c_a=\dfrac{2(\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma)}{3(1-\cos^2\gamma)}$

(1)×$\sqrt{7}\cos\gamma$すると，$9\sqrt{7}\,c_a\cos\gamma+21c_b\cos^2\gamma-6\sqrt{7}\cos\beta\cos\gamma=0$

(2)×3すると，$9\sqrt{7}\,c_a\cos\gamma+21c_b-6\sqrt{7}\cos\alpha=0$

$21c_b(\cos^2\gamma-1)-6\sqrt{7}(\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha)=0$，$c_b=\dfrac{2\sqrt{7}(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)}{7(1-\cos^2\gamma)}$

ここで，図６(3)を参照すると，余弦定理により

$$\cos\alpha=\frac{4+7-9}{4\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}},\quad \cos\beta=\frac{4+9-7}{12}=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=\frac{9+7-4}{6\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$c_a=\frac{1-\dfrac{2}{7}}{\dfrac{9}{7}}=\frac{5}{9},\quad c_b=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$$

したがって，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ （答）

（２）$0<t<1$をみたす実数tに対して，線分OA，OB各々を$t:1-t$に内分する点をそれぞれP_t，Q_tとおく。2点P_t，Q_tを通り，平面Lに垂直な面をMとするとき，平面Mによる四面体OABCの切りの面積$S(t)$を求めよ。

図６(2)を参照しながら考える。平面MがOCを横切るとき，四面体OABCの切り口は三角形になる。まず，平面Mが点Cを通る時の$t=t_c$と三角形の面積を求める。切り口の三角形は点Cを通るときの三角形と相似であり，面積比は$\left(\dfrac{t}{t_c}\right)^2$となる。$M$がOA，OBと交わる点をP，Qとする。PQはABと平行であり，点Hを通る。

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{OH}+k\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OH}+k\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}\right)$

$\overrightarrow{OP}=t_c\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=t_c\overrightarrow{OB}$だから，$t_c\overrightarrow{OA}=c_a\overrightarrow{OA}+c_b\overrightarrow{OB}+k\left(t_c\overrightarrow{OB}-t_c\overrightarrow{OA}\right)$

$(c_a-t_c-kt_c)\overrightarrow{OA}+(c_b+kt_c)\overrightarrow{OB}=0$

したがって，$c_a-t_c-kt_c=\dfrac{5}{9}-t_c-kt_c=0$，$c_b+kt_c=-\dfrac{1}{3}+kt_c=0$

これを解くと，$t_c=\dfrac{2}{9}$，$k=\dfrac{3}{2}$，したがってPQ$=\dfrac{2}{9}$AB$=\dfrac{4}{9}$

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}$，$\left(\overrightarrow{CH}\right)^2=\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}\right)^2=\left(c_a\overrightarrow{OA}+c_b\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)^2$

$=9{c_a}^2+7{c_b}^2+4+6\sqrt{7}\,c_ac_b\cos\gamma-12c_a\cos\beta-4\sqrt{7}\,c_b\cos\alpha$

$=\dfrac{25}{9}+\dfrac{7}{9}+4-\dfrac{20}{9}-\dfrac{10}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{24}{9}$，したがって，CH$=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$S(t_c)=S\left(\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{PQ\times CH}{2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{27}$，したがって$S(t)=\left(\dfrac{t}{t_c}\right)^2S\left(\dfrac{2}{9}\right)=\left(\dfrac{9t}{2}\right)^2\dfrac{4\sqrt{6}}{27}=3\sqrt{6}\,t^2$

図７を参照しながら，$t>\dfrac{2}{9}$の場合について考えてみる。図７(1)で，平面MとCA，CBとの交点をP’，Q’とする。図７(2)(3)に示すように，切り口は四辺形P’P_t Q_t Q’で台形である。なぜなら，AB∥P_tQ_t，AB∥P’Q’だから，P_tQ_t∥PQである。

OCを含み平面Lに垂直な面を図７(3)に示す。ここで，Iは直線ABとOHの交点。

するとHI:H_tI$=\dfrac{7}{9}:(1-t)$だから，CA:CP’$=\dfrac{7}{9}:\left(t-\dfrac{2}{9}\right)$，したがって

AB:P’Q’$=\dfrac{7}{9}:\left(t-\dfrac{2}{9}\right)$，P’Q’$=\dfrac{9}{7}\left(t-\dfrac{2}{9}\right)AB=\dfrac{2}{7}(9t-2)$

一方，CH:$C_tH_t=\dfrac{7}{9}:(1-t)$だから，$C_tH_t=\dfrac{9}{7}(1-t)CH=\dfrac{6\sqrt{6}}{7}(1-t)$

したがって、台形P’P_t Q_t Q’の面積は（P_t Q_t ＋P’Q’）×$C_tH_t\times\dfrac{1}{2}$であるから，

$S(t)=\left\{2t+\dfrac{2}{7}(9t-2)\right\}\times\dfrac{3\sqrt{6}}{7}(1-t)=\dfrac{6\sqrt{6}}{49}(16t-2)(1-t)$

以上によって，

$S(t)=3\sqrt{6}\,t^2\qquad\left(0<t\leqq\dfrac{2}{9}\right)$

$\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t-1)(1-t)\qquad\left(\dfrac{2}{9}<t<1\right)$　　（答）

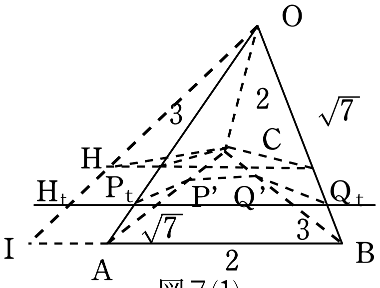

図７(1)

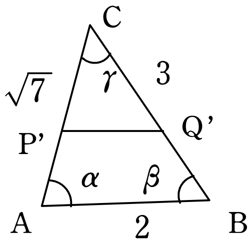

図７(2)

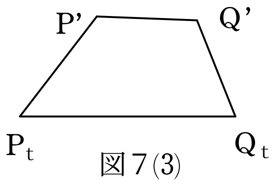

図７(3)

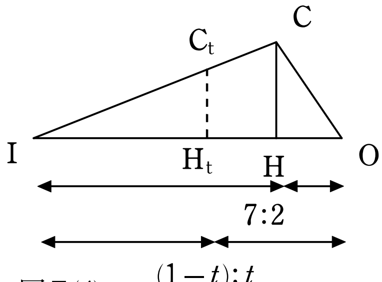

図７(4)

（３）tが$0<t<1$の範囲を動くとき，$S(t)$の最大値を求めよ。

図８に$S(t)$のグラフを示す。

$$(8t-1)(1-t)=-8\left(t-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{49}{32}$$

したがって，$t=\dfrac{9}{16}$のとき，最大値

$$S\left(\frac{9}{16}\right)=\frac{3\sqrt{6}}{8}$$　　（答）

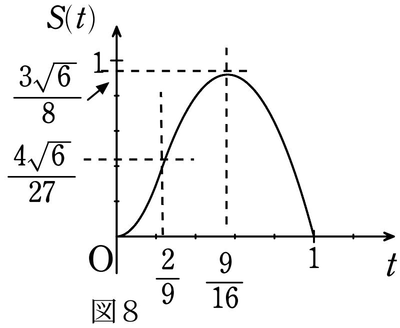

図８

＜解説＞

立体図形の問題をベクトルによって扱う問題で，題意は簡明だが，この種の問題に習熟してないと，混乱する。加えて数式の処理と計算が多いので，時間がかかる。

（１）点Hが平面L内にあり，かつLと直交する直線上にあるという二つの条件から求める。この種の問題では常套的方法である。直交する条件はベクトルの内積が0となることである。数式の変形と計算が長いので，丁寧に行うこと。

（２）平面Mが点Cを通るときのtと切り口（三角形）の面積を求めることがポイント。（１）の結果を上手に使うことも必要。立体図形の問題であるが，ベクトルの長さとその間の角度の余弦が既知なので，解き易い。$t>\dfrac{2}{9}$のときには，台形の高さを求めることがポイント。図を書いて考えて見る。

（３）（２）で切り口の面積の式が求まれば，最大値を求めることは容易。

＜総評＞

題意の複雑さ，思考の質と量，計算の質と量など，なかなか骨のおれる問題が揃っている。限られた時間の中で解答するには，題意を的確に把握し，解答に至る思考過程を見通していくことだろう。このことによって，問題の難易を判断し，容易な問題から着手し，解答量を増やしていきたい。

第1問

2つの変数をもつ立体の体積の範囲を求める問題。微分によって最大値を求める。立体とはいえ，実

質平面図形の扱いと変わらないので，難易度はB−。
第２問
　数式の変換，積分と数列などが絡み，着眼が重要となる証明問題。まともに積分に取り組むと，困難に逢着する。難易度はA。
第３問
　確率の問題で，過程の全貌を理解し，題意を把握するのに手間取る問題である。一般的に扱おうと思考を巡らせても，なかなか着想に至らない。具体的に数字を書き出してみて，法則性を求めることが有効だろう。加えて級数計算が必要となるので，数列の理解も重要だ。難易度はA＋。
第４問
　題意は簡明だから，思考過程も複雑ではない。まずは，こういう問題を完答して，落着いて他の問題に取り組みたいものだ。難易度はB。
第５問
　題意は簡明であり，一般的に扱って迅速に解答したいものだ。難易度はB。
第６問
　題意は簡明だが，立体図形のイメージを頭の中に描くことが不得手の生徒には，辛い問題だ。頭の中に描いた図を紙上に描いて，参照しながら考察することが有効だ。ベクトルの演算は難しくはないが，定式化には工夫が必要だ。難易度はA。

　全体として，難易が程よく組み合わされているが，一筋縄ではいかない問題が多い。第１問，４問，５問は完答し，２問，６問，３問に食らいついて行きたい。私が取り組んだ経験では，第３問，第６問，第２問の順に手間取った。受験生それぞれにとって，難易度は得意分野や分野ごとの勉強量によって，異なるだろう。しかし，理系を志す受験生にとって，全く歯が立たないということはないだろう。食らいついて，部分的でも解答していくという強い姿勢が必要である。

数学（文科）
第１問
　Oを原点とする座標平面上に点A$(-3, 0)$をとり，$0° < \theta < 120°$の範囲にあるθに対して，次の条件(ｉ)，(ii)をみたす2点B，Cを考える。
(ｉ) Bは$y>0$の部分にあり，OB=2かつ∠AOB=$180°-\theta$である。
(ii) Cは$y<0$の部分にあり，OC=1かつ∠BOC=120°である。ただし△ABCはOを含むものとする。
　以下の問（１），（２）に答よ。

（１）△OABと△OACの面積が等しいとき，θの値を求めよ。
　図１を参照しながら考える。
　三角形の底辺OAが共通だから，高さが等しいので，$\mathrm{OB}\sin\theta=\mathrm{OC}\sin(120°-\theta)$，したがって
$$2\sin\theta=\sin(120°-\theta)=\sin 120°\cos\theta-\cos 120°\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{3}{2}\sin\theta=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=\sqrt{3}(\sin 30°\cos\theta-\cos 30°\sin\theta)$$

$= \sqrt{3}\sin(30° - \theta) = 0$

したがって，$|30° - \theta| = 0°$ あるいは180°。$0° < \theta < 120°$ だから，$\theta = 30°$　　（答）

（２）θ を $0° < \theta < 120°$ の範囲で動かすとき，△OABと△OACの面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

△OAB$= 3\sin\theta$

△OAC$= \dfrac{3}{2}\sin(120° - \theta) = \dfrac{3}{2}$

△OAC＋△OAC$= S = \dfrac{3}{2}\{2\sin\theta + \sin(120° - \theta)\} = \dfrac{3}{4}(5\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)$

$$= \frac{3\sqrt{7}}{2}\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cos\theta\right) = \frac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta + \alpha)$$

ここで，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，$\cos\alpha = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，したがって $0° < \alpha < 30°$ だから，

$0° < \theta + \alpha < 180°$ だから，S が最大値をとるのは，

$\theta + \alpha = 90°$ すなわち $\sin(\theta + \alpha) = 1$ のときで，$S = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$　　（答）

$\sin\theta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$　　（答）

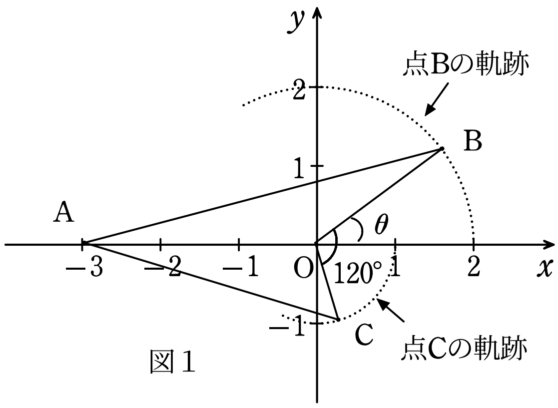

図１

＜解説＞

三角関数を用いて、三角形の面積を求める。題意も平明で，紛れも少ない。図を描いて，題意を的確に迅速に把握する。三角関数の加法定理など基礎的知識と計算で十分対応できる。

第２問

2次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して

$$f(x+1) = c\int_0^1 (3x^2 + 4xt) f'(t)\,dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a，b，c の組すべてを求めよ。

$f'(t) = 2t + a$ だから，$(3x^2 + 4xt)f'(t) = 8xt^2 + (6x^2 + 4ax)t + 3ax^2$

$$c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)dt=c\int_0^1\{8xt^2+(6x^2+4ax)t+3ax^2\}dt=c\left[\frac{8xt^3}{3}+\frac{6x^2+4ax}{2}t^2+3ax^2t\right]_0^1$$

$$=c\left(\frac{8x}{3}+3x^2+2ax+3ax^2\right)=c\left\{3(1+a)x^2+2\left(\frac{4}{3}+a\right)x\right\}$$

$f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b=x^2+(2+a)x+(1+a+b)$

しがたって

$3c(1+a)=1$，$2c\left(\frac{4}{3}+a\right)=(2+a)$，$1+a+b=0$

これを解くと，$a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{1}{3},\ c=1$　　（答）

$a=-\frac{5}{3},\ b=\frac{2}{3},\ c=-\frac{1}{2}$　　（答）

＜解説＞

積分の平易な問題である。素直に計算していけば良い。左辺右辺の式が恒等式になるということは，xの各次数の項の係数が等しいということである。

第３問（理科の第３問 (1) (2)に同じ。解答と解説は理科を参照のこと）

２つの箱LとR，ボール30個，コイン投げで表と裏が等確率$\frac{1}{2}$で出るコイン1枚を用意する。xを0以上30以下の整数とする。Lにx個，Rに$30-x$個のボールを入れ，次の操作（＃）を繰り返す。

（＃）箱Lに入っているボールの個数をzとする。コインを投げ，表が出れば箱RからLに，裏が出れば箱LからRに，$K(z)$個のボールを移す。ただし，$0\leqq z\leqq 15$のとき$K(z)=z$，$16\leqq z\leqq 30$のとき，$K(z)=30-z$とする。

m回操作の後，箱Lのボールの個数が30である確率を$P_m(x)$とする。たとえば

$P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$となる。以下の問 (1)，(2)，(3)に答えよ。

（１）$m\geqq 2$のとき，xに対してうまくyを選び，$P_m(x)$を$P_{m-1}(y)$で表せ。

（２）nを自然数とするとき，$P_{2n}(10)$を求めよ。

第４問（理科の第５問に同じ。解答と解説は理科を参照のこと）

Cを半径1の円周とし，AをC上の1点とする。3点P，Q，RがAを時刻$t=0$に出発し，C上を各々一定の速さで，P，Qは反時計回りに，Rは時計回りに，時刻$t=2\pi$まで動く。P，Q，Rの速さは，それぞれm，1，2であるとする。（したがって，QはCをちょうど一周する。）ただし，mは$1\leqq m\leqq 10$を満たす整数である。△PQRがPRを斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さmと時刻tの組をすべて求めよ。

＜総評＞

理科と共通問題は少々骨が折れるだろう。文科のみの第１問，２問を確実に解答したい。

第１問

難易度はB−だから，完答したいところだ。

第２問

微分積分の基礎的理解があれば十分で，これも難易度B−だから，完答したい。

第３問

確率過程の全貌を頭に入れて，解答したい。しかしやや錯綜しているので，落着いて考えること。一般的に扱おうとしても，なかなか着想できない。具体的な数字で，試行がどのように進むか，図解してみる。（１）が分らなくても（２）はできる。難易度はA＋

第４問

文系といえども，この程度の問題は扱えるようでありたい。難易度はB

理科と文科では数学の比重が違うから，問題の質量にかなりの差異が出るのはやむをえない。ただし，文科の経済学部や文学部の一部は数学をかなり必要とすることに注意すること。

100429