

1

(35 点)

次の各問に答えよ.

- (1) 箱の中に、1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし、異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び、小さいほうの数を X とする。これらのカードを箱に戻して、再び 2 枚のカードを同時に選び、小さいほうの数を Y とする。 $X = Y$ である確率を求めよ。
- (2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2} dx$ を求めよ。

2

(35 点)

a, b, c を実数とし、 O を原点とする座標平面上において、行列 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ に

よって表される 1 次変換を T とする。この 1 次変換 T が 2 つの条件

- (i) 点 $(1, 2)$ を点 $(1, 2)$ に移す
 (ii) 点 $(1, 0)$ と点 $(0, 1)$ が T によって点 A, B にそれぞれ移るとき、
 $\triangle OAB$ の面積が $\frac{1}{2}$ である
 を満たすとき、 a, b, c を求めよ。

3

(30 点)

xy 平面上で、 $y = x$ のグラフと $y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。

4

(30 点)

n は 2 以上の整数であり, $\frac{1}{2} < a_j < 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) であるとき, 不等式

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \right)$$

が成立することを示せ.

5

(35 点)

xyz 空間で, 原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し, 点 (x, y, z) がその共有点全体の集合を動くとき, 積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ.

6

(35 点)

空間内に四面体 $ABCD$ を考える. このとき, 4 つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在することを示せ.

問題は, このページで終わりである.