2011（H23)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）　教育学部（教育科学理系）、医学部（人間健康科）
総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（一般）

数学（理系）

$\boxed{1}$　(35点)

次の各問に答よ.

(1)　箱の中に，1から9までの番号を1つずつ書いた9枚のカードが入っている．ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする．この箱から2枚のカードを同時に選び，小さい方の数をXとする．これらのカードを箱に戻して，再び2枚のカードを同時に選び，小さい方の数をYとする．$X=Y$である確率を求めよ.

(2)　定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx$を求めよ.

＜解答＞

(1)

１回目の2枚のカードを選ぶという試行で，小さい数がXであるという場合の数は，$(9-X)$

２回目の試行で，小さい数Yが$Y=X$である場合の数は，$(9-X)$

したがって，１回目の試行で小さい数がX，２回目の試行でも小さい数がXであるという場合の数は，$(9-X)^2$で，その総数は$\displaystyle\sum_{X=1}^{8}(9-X)^2=204$

一方，９枚のカードから２枚を選ぶという組み合わせの数は${}_9C_2$だから，２回の試行で組合せの数は$({}_9C_2)^2=36^2$

したがって，１回目の試行で小さい数がX，２回目の試行でも小さい数がXであるという確率は

$$\frac{\displaystyle\sum_{X=1}^{8}(9-X)^2}{({}_9C_2)}=\frac{204}{36^2}=\frac{17}{108}\qquad\text{（答）}$$

(2)

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$とおく。すると，$\sqrt{1-2x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$

また，$x=0$のとき$\theta=0$，$x=\dfrac{1}{2}$のとき$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$$(x+1)\sqrt{1-2x^2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+1\right)\cos\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta,\quad dx=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)d\theta$$

$$\int(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+1\right)\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\cos^2\theta\,d\theta$$

$$\frac{1}{2}\int\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta=-\frac{1}{6}\cos^3\theta$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\int(\cos 2\theta+1)d\theta=\frac{\sqrt{2}}{8}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{2}}{4}\theta$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta=\left[-\frac{1}{6}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{24}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\left[\frac{\sqrt{2}}{8}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{2}}{4}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$$

したがって，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{12}\qquad\text{（答）}$$

＜解説＞

(1)

ある条件で発生する事象の発生確率の問題は，ある条件を満たす場合の数を，無条件の場合の数で除することによって求める。この際，各場合が発生する確率は等しいことを前提とする。

１回目の試行でXが小さい場合の数は，もう１枚が$X+1$から9までの数でなければならないから，$(9-X)$であることは自明である。

２回目の試行で小さい数Yが$Y=X$である場合の数は，同様に$(9-X)$であることは自明である。すると，１，２回の試行で両方とも小さい数がXである場合の数は両者の積，$(9-X)^2$である。Xは1から8まで選べるので，場合の数はXを1から8まで変化させて和をとれば良い。

無条件の場合の数は，１回の試行では，２枚のカードを選ぶ組み合わせの数だから，２回の試行では，その積になることは自明である。

確率の問題は考え方を整理し，できるだけ単純な問題に帰着させることが重要だ。そのためには，数多くの問題をこなし，条件を満たす場合の数を考える直感を磨くことが大事だろう。

(2)

簡単な積分のようで，一工夫必要な積分である。だが，この種の積分は変数変換によって扱うことが教科書に載っている。

別解を紹介しよう。xから$\sin\theta$への変数変換を忘れてしまったような場合，有効だろう。

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx$$

$t=\sqrt{1-2x^2}$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2}(1-2x^2)^{-\frac{1}{2}}(-4x)=\dfrac{-2x}{t}$，$xdx=\dfrac{-tdt}{2}$

$\displaystyle\int x\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int\left(\frac{-t^2}{2}\right)dt=\frac{-t^3}{6}$，$x=0$のとき$t=1$，$x=\dfrac{1}{2}$のとき$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

したがって，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-2x^2}\,dx=\left[\frac{-t^3}{6}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{24}$

$\sqrt{2}\,x=s$とおくと，$\displaystyle\int\sqrt{1-2x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{1-s^2}\,ds$，

$x=0$のとき$s=0$，$x=\dfrac{1}{2}$のとき$s=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-s^2}\,ds$，積分は図１に示す半径１の円が$s=0$から$s=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$まで

s軸と囲む面積だから，$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{\sqrt{2}}{8}$

したがって，　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{24}+\frac{\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{12}$

$x\sqrt{1-2x^2}$は置換積分によって，不定積分を求めることができる。一方，被積分関数の一部$\sqrt{1-2x^2}$を見つめると，円の方程式に変換できることが分かる。こうした工夫のためには，数多くの問題を解いて直感を磨いておくことだろう。

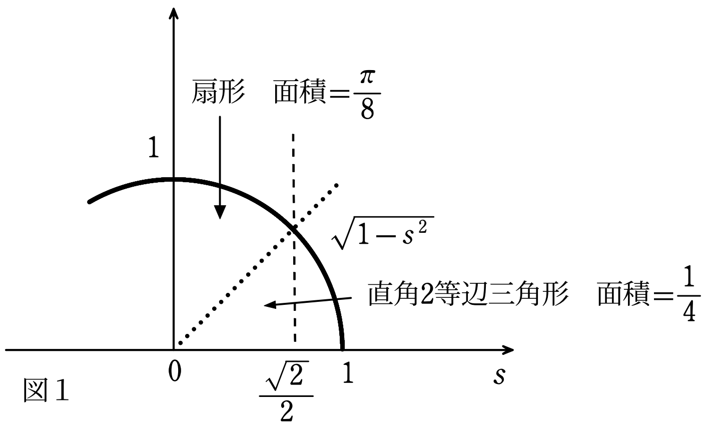

図１

$\boxed{2}$ (35点)

a，b，cを実数とし，Oを原点とする座標平面上において，行列$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$によって表される１次変換を$T$とする．この１次変換$T$が２つの条件

（i）　点(1，2)を点(1，2)に移す

（ii）　点(1，0)と点(0，1)がTによって点A，Bにそれぞれ移るとき，

△OABの面積が$\dfrac{1}{2}$である

を満たすとき，a，b，cを求めよ．

＜解答＞

(ⅰ)によって，$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2 \\ b+2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

したがって$a+2=1$，$b+2c=2$，したがって$a=-1$　①，$b=2-2c$　②

点Aを$(a_1,\ a_2)$，点Bを$(b_1,\ b_2)$とすれば，

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2-2c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2-2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$a_1=-1$，$a_2=2-2c$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2-2c & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，$b_1=1$，$b_2=c$

したがって，点Aは$(-1,\ 2-2c)$，点Bは$(1,\ c)$，ABとy軸の交点Mは$\left(0,\ 1-\dfrac{c}{2}\right)$

すると，△OABの面積は$\left|1-\dfrac{c}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，したがって$c=1$および$c=3$

②から$c=1$のとき$b=0$，$c=3$のとき$b=-4$

$a=-1$，$b=0$，$c=1$　および　$a=-1$，$b=-4$，$c=3$　（答）

＜解説＞

行列による座標の一次変換の問題。計算に複雑さはなく，(ⅰ)，(ⅱ)の条件をていねいに計算すれば，自ずと解に至る。頂点の座標が求まるので，三角形の面積も容易に求まる。交点Mのy座標の正負に応じて，二つの解があることに注意する。

3

(30点)

xy平面上で，$y=x$のグラフと$y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。

＜解答＞

$0\leqq\dfrac{3}{4}x^2-3$，すなわち$2\leqq x$および$x\leqq-2$のとき，$y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2=\dfrac{3}{4}x^2-5$　①

$y=x$との交点は$\dfrac{3}{4}x^2-x-5=0$から，$(-2,\ -2)$，$\left(\dfrac{10}{3},\ \dfrac{10}{3}\right)$

図２によって，$y=x$と①によって囲まれる面積は$\displaystyle\int_2^{\frac{10}{3}}\left(x-\frac{3}{4}x^2+5\right)dx=\frac{80}{27}$

$\dfrac{3}{4}x^2-3<0$，すなわち$-2<x<2$のとき，$y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2=-\dfrac{3}{4}x^2+1$　②

$y=x$との交点は$\dfrac{3}{4}x^2+x-1=0$から，$(-2,\ -2)$，$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

図２によって，$y=x$と②によって囲まれる面積は

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2-x+1\right)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left(x+\frac{3}{4}x^2-1\right)dx=\frac{20}{27}+4=\frac{128}{27}$$

したがって求める面積は$\frac{80}{27}+\frac{128}{27}=\frac{208}{27}$　（答）

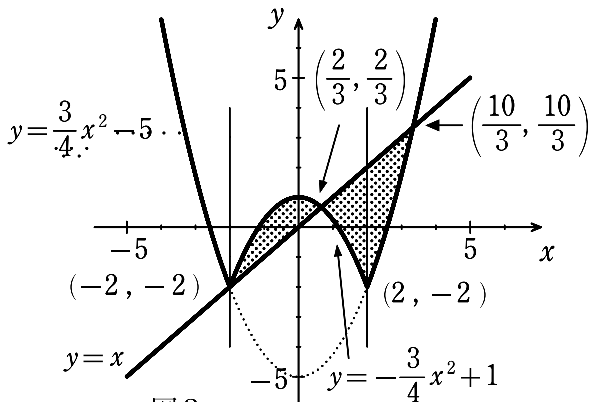

図２

<解説>

$\left(\frac{3}{4}x^2-3\right)$の正負に応じて，被積分関数を変え，$y=x$との交点を考慮して定積分の範囲を考えれば良い。図２を描くことが，積分範囲の確定には便利である。２次式の積分だから，特に難しいところはなかろう。

$\boxed{4}$　(30点)

nは2以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,2,\ .\ .\ .\ .\ ,n)$であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ.

<解答>

数学的帰納法によって証明する。

$n=2$の場合，左辺$=(1-a_1)(1-a_2)$，右辺$=1-a_1-\frac{a_2}{2}$

左辺−右辺$=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0$，したがって$n=2$の場合，成立する。

$n-1$において成立するとする。

すなわち，$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)$　とする。

右辺に$(1-a_n)$を乗じると，

$$(1-a_n)\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)\right\}$$

$$=1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)-a_n+a_n\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)$$

$$=1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)-\frac{a_n}{2^{n-1}}+a_n\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)+a_n\left(a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)$$

$$=1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)+\alpha$$

$\alpha=a_n\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)+a_n\left(a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)$について評価する。

$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{2}$とおくと，$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=0$$

$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$とおくと，$\alpha=\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)+\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-2}}\right)$

$$=\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1-\frac{1}{2^{n-1}}>0$$

したがって，$\frac{1}{2}<a_j<1\quad(j=1,2,\ .\ .\ .\ ,n)$であれば，$0<\alpha$だから，

$$(1-a_n)\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)\right\}>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)-\frac{a_n}{2^{n-1}}$$

したがって，$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})(1-a_n)>(1-a_n)\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right)\right\}$

$$>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

以上によって，$n-1$で成立すれば，nでも成立する。

＜解説＞

数学的帰納法によって証明する。この方法を採用するかどうかが，問題解決の分かれ道だが，任意の整数nに対して成立することを求めるような，この種の問題には数学的帰納法が有効なことは，多くの読者は充分承知のことだろう。

残る問題は，数式の変形によって，$(n-1)$の場合の関係式からnの場合の関係式を上手に導き出すことである。これもそう難しくはない。等比級数の和の公式は覚えておかねばならない。

$\boxed{5}$ (35点)

xyz空間で，原点O を中心とする半径$\sqrt{6}$の球面Sと3点$(4,0,0)$，$(0,4,0)$，$(0,0,4)$を通る平面αが共有点を持つことを示し，点(x,y,z)がその共有点全体の集合を動くとき，積xyzが取り得る値の範囲を求めよ.

＜解答＞

平面αの式は，$x+y+z=4$ ①

原点O を中心とする半径$\sqrt{6}$の球面の式は，$x^2+y^2+z^2=6$ ②

原点から平面αに下した垂線と平面との交点はMは$\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$だから，原点との距離は，

$\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}<\sqrt{6}$ となる。したがって，②の球面は①の平面αと交わるので，球面Sと平面αは共有点をもつ。

共有点は$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{4}{3}\right)^2=\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(x+y-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$　③

なる平面α上の円の点である。

①から，$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=6+2(xy+yz+zx)=16$

したがって，$xy+yz+zx=5$　④

④から，$yz=5-x(y+z)=5-x(4-x)$，したがって$xyz=5x-x^2(4-x)=x^3-4x^2+5x$

同様に，$xyz=5y-y^2(4-y)=y^3-4y^2+5y$，$xyz=5z-z^2(4-z)=z^3-4z^2+5z$

すなわち，x, y, zは同じ方程式を満たす。しかし，共有点は平面α上の円だから，同一の値をとることはできない。

したがって，$xyz=f(x)=x^3-4x^2+5x=a$とおくと，$f(x)-a=0$が重根を含めて3個の値をとることがaの条件である。

$f'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$，したがって　$x=1$, $\frac{5}{3}$で極値をもち，

$f(1)=2$，$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{50}{27}$

したがって，図３のグラフからも分かるように，

$\frac{50}{27}\leqq a\leqq 2$のとき3個の実数解をもつ。

したがって，$\frac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$である。

x		1		$\frac{5}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

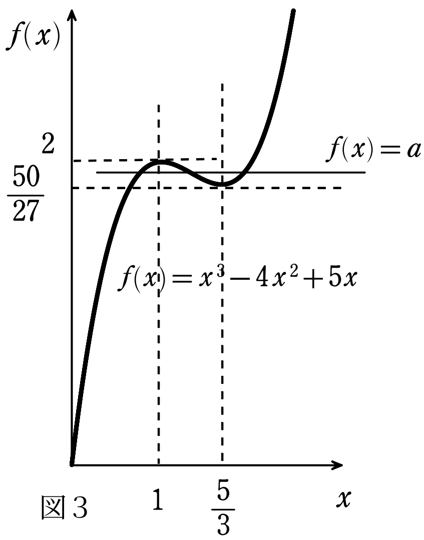

図３

＜解説＞

Sとαが共有点をもつことの証明は問題なかろう。共有点が満たす方程式を求めることも難しくない。球面の方程式と平面の方程式とから，xyzを１変数の式に上手に変換することがポイントである。その上で，3個の実数解をもつようなxyzの範囲を定めることになる。このような考え方は，類似問題の経験がないと思いつかないのではないか。

そこで，もっと単純に変数xの変化域でxyzの最大値，最小値を評価する解法を紹介する。

平面αの式は，$x+y+z=4$　①

原点O を中心とする半径$\sqrt{6}$の球面の式は，$x^2+y^2+z^2=6$　②

原点から平面αに下した垂線と平面との交点はMは$\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$だから，原点との距離は，

$\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}<\sqrt{6}$となる。したがって，②の球面は①の平面$\alpha$と交わるので，球面$S$と平面$\alpha$は共有点をもつ。その共有点は平面$\alpha$上で円を描くはずで，その半径の2乗は，

$$(\sqrt{6})^2-\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2=\frac{2}{3}$$

共有点は$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$　③　なる円の方程式を満たす点である。

①から，$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=6+2(xy+yz+zx)=16$

したがって，$xy+yz+zx=5$　④

④から，$yz=5-x(y+z)=5-x(4-x)$，したがって$xyz=5x-x^2(4-x)=x^3-4x^2+5x$

xが取り得る値の範囲を検討すると，③で$z=\frac{4}{3}$のとき，$\left|x-\frac{4}{3}\right|$が最大になるから，

$y=4-z-x=\frac{8}{3}-x$を用いて，③は$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$となり，$x$の最大値，最小値はそれぞれ

$x=\frac{4+\sqrt{3}}{3}$，$\frac{4-\sqrt{3}}{3}$となり，xの変化域は$\frac{4-\sqrt{3}}{3}\leqq x\leqq\frac{4+\sqrt{3}}{3}$　⑤である。

$f(x)=x^3-4x^2+5x$とおくと，$f'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$

したがって，$f(x)$は，$x=1$，$\frac{5}{3}$で極値をとり，これらは⑤に含まれる。

$f(x)$のグラフは図３’のようになる。

$f\left(\frac{4-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{52}{27}$，$f(1)=2$，$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{50}{27}$，

$f\left(\frac{4+\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{52}{27}$，だから$\frac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$となる。

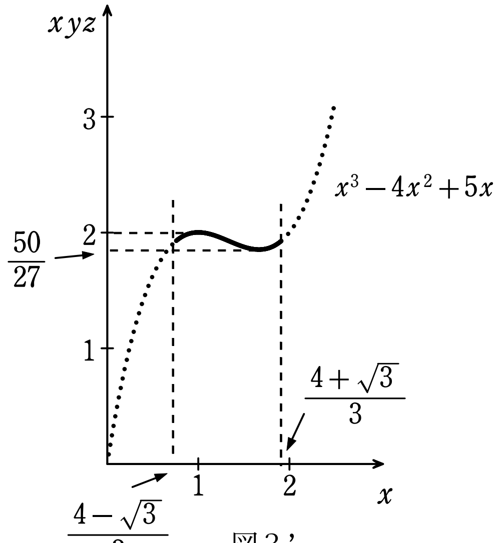

図３’

$\boxed{6}$　空間内に四面体ABCDを考える．このとき，４つの頂点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを同時に通る球面が存在することを示せ．

＜解答＞

図４を参照する。

△ABCの外心をG_1とする。G_1は面ABC内にあって，直線ABの垂直2等分線s_1上にある。

△ABDの外心をG_2とする。G_2は面ABD内にあって，直線ABの垂直2等分線s_2上にある。

G_1を通り面ABCに垂直な直線l_1上の点は頂点A，B，Cを球面上にもつ球の中心となる。

同様にG_2を通り面ABDに垂直な直線l_2上の点は頂点A，B，Dを球面上にもつ球の中心となる。l_1とl_2が交われば，その交点が四面体ABCDの頂点を球面上にもつ球の中心となる。l_1とl_2が交わるためには，両直線が同一平面上にあれば良い。

s_1とl_1がつくる面は直線ABの中点Mを通りABに垂直である。同様にs_2とl_2がつくる面はMを通りABに垂直である。したがって，s_1とl_1がつくる面とs_2とl_2がつくる面は同一の平面である。同じ平面にある直線は平行でない限り，交わる。l_1とl_2は平行ではない。なぜなら，l_1は面ABCに垂直，l_2は面ABDに垂直だから。

すると，l_1とl_2は交点をもち，その交点は四面体の頂点A，B，C，Dを球面上にもつ球の中心となる。すなわち，頂点A，B，C，Dを同時に通る球面が存在する。

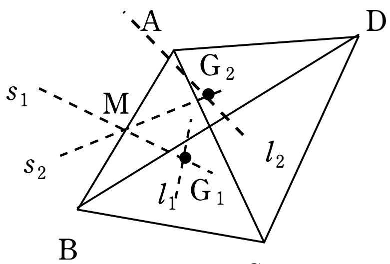

図４

＜解説＞

いろいろな解法がありそうだ。解答のような記載で十分なのだが，物足りないと思う生徒もいるかも知れない。おそらく，数式を全く使用していないからだろう。しかし，展開した論理は，数式を用いることなく，妥当なものになっている。

さて，この解答で，数式によって明らかにしたいとところは，「s_1とl_1がつくる面とs_2とl_2がつくる面は同一の平面」というところだろう。これを数式を用いて表現すれば，

MG1$(=s_1)\perp$AB，$l_1\perp$面ABC ，したがって，MG1$(=s_1)$とl_1がつくる平面$\perp$AB

同様に，MG2$(=s_2)\perp$AB，$l_2\perp$面ABC ，したがって，MG2$(=s_2)$とl_2がつくる平面$\perp$AB

したがって，MG1$(=s_1)$とl_1がつくる平面とMG2$(=s_2)$とl_2がつくる平面は同一平面である。

したがって，同一平面にある2直線l_1とl_2は交わる。もし交わらなければ，l_1とl_2は平行になるが，すると面ABC と面ABDは同一平面になる。しかし，これでは四面体にならないから題意と矛盾する。

さらに別解を紹介する。

図５を参照する。△ABCの外心をGとする。Gは３辺AB，BC，CAの垂直2等分線の交点である。Gを通る面ABCに垂直な直線l上の点Mは頂点A，B，Cから等距離だから頂点A，B，Cを球面上の点とする球の中心となる。

ここで，GA(＝GB＝GC)＜MA(＝MB＝MC)である。すなわち，Gは頂点A，B，Cを球面上の点とする最小の球の中心となる。Dから直線lに垂線を下し，その足をHとする。HDは直線l上の点とDとを結ぶ直線の中で最も短い。

いま，HA＜HDとすれば，頂点DはHを中心として頂点A，B，Cを面上の点とする球の外部にあ

る。DとHは面ABCに関して同じ側にあるから，直線l上の点PをHからGと反対方向に動かすと，PA(＝PB＝PC)は次第に長くなり，やがてPA＝PDとなる。なぜなら，Dは面ABCに関してPと同じ側にあるので，PAが大きくなれば，PDも大きくなるものの，いつかはPD≦PAとなるからである。

一方，HD＜HAとすれば，DはHを中心として頂点A，B，Cを球面上に含む球の内側にある。したがって，点PをHからGに向かって移動させれば，PDは増加し，PA(＝PB＝PC)は減少して，やがて，PA＝PDとなる。もしPがGに一致するまでにPA＝PDにならなければ，Pは面ABCを突き抜け，PとDは面ABCに関して逆側になる。すると，PA もPDも増加するが，やがてPA＝PDとなる。

以上のように，△ABCの外心Gを通り面ABCに垂直な線上に四面体の頂点A，B，C，Dを球面上にもつ球の中心をとることができるから，４つの頂点A，B，C，Dを同時に通る球面が存在することが証明できた。

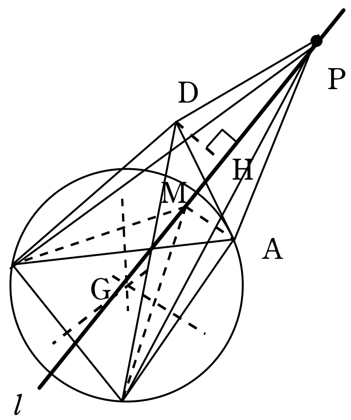

図５

＜理系総評＞

難易取り混ぜた問題が揃っているが，例年に比べ難しくはないように思う。$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$は完答したい。$\boxed{5}$，$\boxed{6}$は食らいついて部分点でも得たい。すると75%の得点が見えてくる。

$\boxed{1}$ (1)素直な確率の問題。難易度C

(2)一工夫必要な定積分の問題。難易度B

$\boxed{2}$ 行列による座標変換の問題。行列計算を理解していれば，困難はないだろう。三角形の面積は容易に求まることに注意。難易度B

$\boxed{3}$ ２次関数の定積分の問題。絶対値の中の関数の正負に応じて被積分関数を区分すれば，特段難しいところはない。難易度C。

$\boxed{4}$ 数列の証明問題である。数学的帰納法によって証明する。難易度A－。

$\boxed{5}$ 立体図形の問題だが，3元2次方程式の問題でもある。題意は簡明で紛れがないので考え易いが意外に難しい。難易度A。

$\boxed{6}$ 当たり前の問題なのだが，なるほどという証明をするのは存外難しいことを感じるだろう。数学力，論理力を計るのに良い問題である。ただし，証明方法もいろいろあるだろうし，その完成度合いもいろいろなレベルがあるだろうから，採点が難しい。難易度A－。

111003

文系数学

$\boxed{1}$ (30点)

次の各問に答えよ。

(1) 辺AB，辺BC，辺CA の長さがそれぞれ12，11，10の三角形ABCを考える．∠Aの2等分線と辺BCの交点をDとするとき，線分ADの長さを求めよ．

(2) 理系 $\boxed{1}$ (1)に同じ．

＜解答＞

(1)

図１を参照する。

∠Aの2等分線は対辺BCをAB:ACに内分する。したがって，BD=6，DC=5である。

三角形ABDに余弦定理を適用すると，

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\angle B=144+36-144\cos\angle B$ ①

三角形ABCに余弦定理を適用すると，

$\cos\angle B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{144+121-100}{264}=\dfrac{165}{264}$ ②

②を①に代入すると，$AD^2=90$，$AD=3\sqrt{10}$ （答）

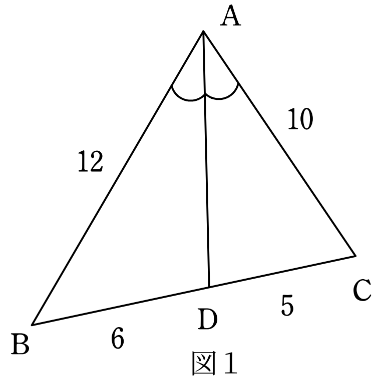

図１

＜解説＞

数学Aおよび数学Ｉの範囲の問題。三角形の頂角の2等分線は対辺を頂角をなす辺の比に内分することを知っていなければならない。仮に覚えていなくても，スムーズにそのことを導き出すことが必要である。その導出は難しくない。教科書には類似問題が出ている。

その上で，余弦定理を用いる。余弦定理を覚えてなくても解ける。その解法を紹介する。

図２を参照する。

DからABおよびACに下した垂線の足をEおよびFとする。

△AED≡△AFDだから，

$12-p=10-q$，したがって$p-q=2$ ①

$h^2+p^2=36$，$h^2+q^2=25$，したがって$p^2-q^2=11$ ②

①，②から$p+q=\dfrac{11}{2}$，したがって$p=\dfrac{15}{4}$，$q=\dfrac{7}{4}$

$AD^2=(12-p)^2+h^2=144-24p+p^2+h^2=180-90=90$

したがって，$AD=3\sqrt{10}$

余弦法則を用いるよりも，こちらの方が容易である。

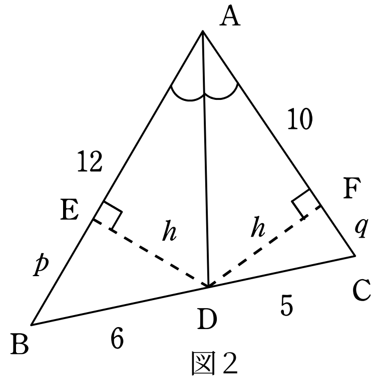

図２

$\boxed{2}$ (30点)

四面体OABCにおいて，点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線とその平面の交点をHとする。$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$，$|\overrightarrow{OA}|=2$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{OH}|$ を求めよ。

＜解答＞

図3－1を参照する。

AHの延長線とBCの交点をDとする。

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}$，しかるに$\overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{BC}$だから，$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

したがって，面OADは面ABCに直交する。したがって，$\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{BC}$

△OBCは直角2等辺三角形だから，BD$=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

△OBDは直角三角形だから，OD$=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

△ABDは直角三角形だから，AD$=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

図3－2において，余弦法則により，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

したがって，OH$=$OD$\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

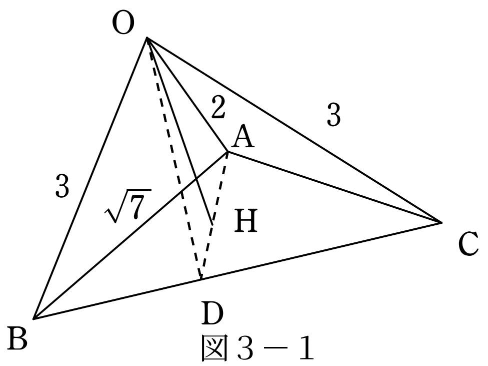

図３－１

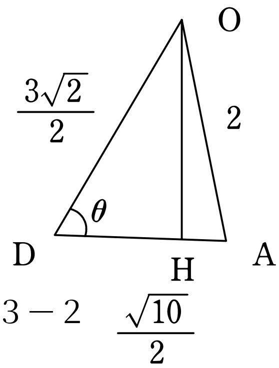

図３－２

＜解説＞

このような立体図形の問題は，題意をできるだけ正確に示す図を描くことが，解答に至る早道である。すると，解答への道筋が概ね見えてくる。正確さを欠くと，逆に誤った方向に導かれるので，注意が必要である。

図3－1はある程度正確に描いたつもりだが，それほどでもない。図を眺めてみると，ADはBCに直交するように見える。すると，ODもBCに直交する。すると，OD，AD

は簡単に求まる。先ずは，ADはBCに直交することを明らかにすることだ，ということが分かる。$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{BC}$だから，直ちにADはBCに直交することが分かる。このような解法はほぼ数学Ⅰの範囲内である。

$\boxed{3}$ (30点)

実数aが変化するとき，3次関数$y=x^3-4x^2+6x$と直線$y=x+a$のグラフの交点の個数はどのように変化するか．aの値によって分類せよ．

<解答>

$f(x)=x^3-4x^2+6x-(x+a)=x^3-4x^2+5x-a$とおく。すると，$y=x^3-4x^2+6x$と$y=x+a$の交点の$x$座標は$f(x)=0$の解である。すると，$x^3-4x^2+5x=a$だから，$g(x)=x^3-4x^2+5x$とすれば，$g(x)$と$y=a$の交点の数が$f(x)=0$の解の数となり，求める交点の数となる。

$g'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$，したがって$x=1$と$\frac{50}{27}$において，$g(x)$は極値をもつ。

$g(1)=2$，$g\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{50}{27}$

$g(x)$は図４のようになる。

$a<\frac{50}{27}$のとき交点の個数は１

$a=\frac{50}{27}$のとき交点の個数は２

$\frac{50}{27}<a<2$のとき交点の個数は３

$a=2$のとき交点の個数は２

$2<a$とき交点の個数は１

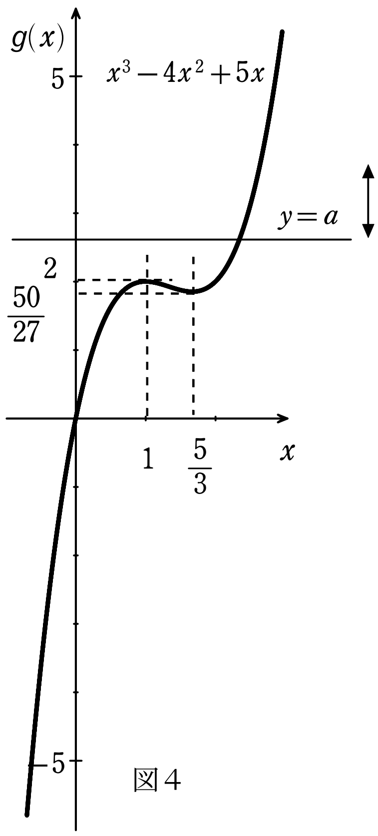

図４

<解説>

数学Ⅱの範囲の関数の微分の応用問題。3次関数と直線の交点の数の問題だが，二つのグラフから交点の数を求めようとしても，うまくはいかない。両関数を等しいとおいて，xの解の個数と交点の数が等しいことに着目する。すると，$y=a$と$y=x^3-4x^2+5x$の交点の数を求めることに帰着する。

$y=x^3-4x^2+5x$の極値を求め，グラフを描いて，大要を把握する。二つの極値の差が小さいので注

意する。

$\boxed{4}$

(30点)

xy平面上で，連立不等式

$$\begin{cases} x \leqq 2\,, \\ y \geqq x\,, \\ y \leqq \left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2 \end{cases}$$

を満たす領域の面積を求めよ。　　＊板書修正　（誤）$x \leqq 2$　→　（正）$|x| \leqq 2$

＜解答＞

3番目の不等式について場合分けをする。

$\dfrac{3}{4}x^2-3 \geqq 0$，すなわち$x \geqq 2$および$x \leqq -2$のとき，$y \leqq \dfrac{3}{4}x^2-3-2=\dfrac{3}{4}x^2-5$

$\dfrac{3}{4}x^2-3<0$，すなわち$-2<x<2$のとき，$y \leqq -\dfrac{3}{4}x^2+3-2=-\dfrac{3}{4}x^2+1$

図５のようにグラフを描いて，積分範囲を確認する。$y=x$と$y=-\dfrac{3}{4}x^2+1$の交点は,

$(-2\,,\,-2)$，$\left(\dfrac{2}{3}\,,\dfrac{2}{3}\right)$だから，求める面積は,

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2-x+1\right)dx=\left[-\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{\frac{2}{3}}=\frac{64}{27}$$

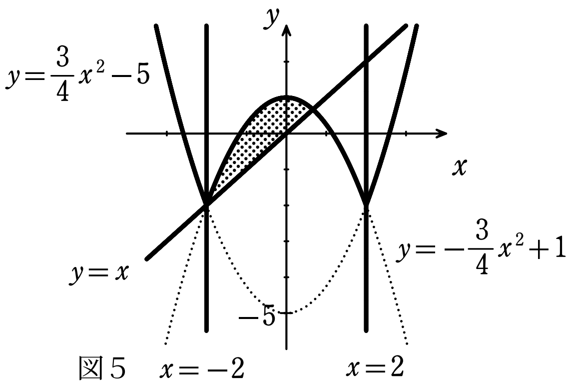

図５

＜解説＞

理系の$\boxed{3}$の問題とほぼ同様の問題である。先ずはグラフを描いて，積分領域を確認することだ。そのためには，2次関数を区分けして，正しく描く。

$\boxed{5}$

(30点)

0以上の整数を10進法で表すとき，次の問いに答よ．ただし，0は0桁の数と考えることにする。またnは正の整数とする.

(1)　各桁の数が1または2であるn桁の整数を考える．それらすべての整数の総和をT_nとする．T_nをnを用いて表せ．

(2)　各桁の数が0，1，2のいずれかであるn桁以下の整数を考える．それらすべての整数の総和をS_nとする．S_nがT_nの15倍以上になるのは，nがいくつ以上のときか．

必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$および$0.477<\log_{10}3<0.478$を用いてもよい．

＜解答＞

(1)

すべての整数の数は2^n個ある。したがって，各桁の1と2の数はそれぞれ2^{n-1}個である。したがって，すべての整数におけるk桁目の和は，$t_k=2^{n-1}(10^{k-1}+2\times10^{k-1})=2^{n-1}\times3\times10^{k-1}$

したがって，$T_n=\sum_{k=1}^{n}t_k=3\times2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}10^{k-1}=3\times2^{n-1}\times\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)=\dfrac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}$

(2)

先頭から0の続くn桁の数はn桁未満の数であるが，それらを含むすべてのn桁以下の整数の数は3^n個ある。したがって，各桁の0，1，2の数はそれぞれ3^{n-1}個である。

したがって，すべての整数におけるk桁目の和は，$s_k=3^{n-1}(10^{k-1}+2\times10^{k-1})=3^{n-1}\times3\times10^{k-1}$

したがって，$S_n=\sum_{k=1}^{n}s_k=3^n\sum_{k=1}^{n}10^{k-1}=3^n\times\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)=3^{n-2}(10^n-1)$

$15T_n\leqq S_n$とすれば，$5\times2^{n-1}(10^n-1)\leqq3^{n-2}(10^n-1)$だから，$5\times2^{n-1}\leqq3^{n-2}$，

したがって，$15\leqq\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}}$，両辺の対数をとると，$\log_{10}15\leqq(n-1)(\log_{10}3-\log_{10}2)$，

$\log_{10}15=\log_{10}3+\log_{10}5=\log_{10}3+\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}3+(1-\log_{10}2)$

したがって，$1+\dfrac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}\leqq n-1$

$\dfrac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}$は，$\dfrac{1}{0.478-0.301}=\dfrac{1}{0.177}\fallingdotseq5.6$よりは大きく，$\dfrac{1}{0.477-0.302}=\dfrac{1}{0.175}\fallingdotseq5.7$よりは小さい。$2+5.6\leqq n$となり，$n$は7.6より大きい整数であれば良いから，8以上である。

＜解説＞

一見難しそうな問題であるが，すべての整数の個数を考え，各桁には1, 2が等しい数だけ現れることに思いが至れば，難しい問題ではないことが分かる。計算に際して必要なのは，等比級数の公式と対数の演算である。

＜文系総評＞

$\boxed{5}$を除けば難問ではないので，着実にできるようにしたい。問題の難易から考えると，$\boxed{1}$の(2)，$\boxed{5}$を除き完答して，75%程度の得点を得たいものだ。

$\boxed{1}$　(1)は三角形の頂角の2等分線の長さを求める問題。余弦定理を活用する。難易度はC。

(2)は理系の$\boxed{1}$(1)に同じ。文系問題として難易度はB。

$\boxed{2}$　立体図形の問題だが，分かり易い図形の問題である。難易度Ｂ。

$\boxed{3}$　数学Ⅱの範囲の問題。3次関数と直線との交点の数を求めるとき，少々工夫が必要だ。考え方，計算とも難しいところはない。難易度Ｂ。

$\boxed{4}$　2次関数の積分の問題。グラフをある程度正確に描けば，積分領域が分かるから，容易に解答できる。難易度はＣ。

$\boxed{5}$　数列の問題。着眼点が分からないと，難しく感じてしまうかも知れない。着眼に至る思考力が必要なので，難易度はＡ－。

101013