

1 $\triangle OAB$ において、 $OA = 1$ 、 $OB = AB = 2$ とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

実数 t に対して、

$$\overrightarrow{OP} = t\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) $AP = BP$ を満たすとき、 t の値を求めよ。さらに線分 AP の長さを求めよ。

2 数直線上の動点 A がはじめ原点にある。動点 A は 1 秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で指定された長さを移動するものとする。 n 秒後に動点 A が原点に戻る確率を p_n とする。ただし、 n は自然数とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき、 p_1 , p_2 , p_3 , p_4 を求めよ。

(2) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 2 または負の向きに 1 移動するとき、 p_6 を求めよ。

3 xy 平面上の 3 点を $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(3, 3)$ とする。2 点 O , A を通る放物線を $y = -ax^2 + bx$ とする。ただし, $a > 0$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) b を a の式で表せ。

(2) $y = -ax^2 + bx$ と x 軸とで囲まれた図形が, $\triangle OAB$ に含まれるような, a の値の範囲を求めよ。

(3) $y = -ax^2 + bx$ と x 軸とで囲まれた図形の面積が $\triangle OAB$ の面積の $\frac{1}{3}$ となるとき, a の値を求めよ。

4 a, b, c, d を正の実数とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ を示せ。

(2) 不等式 $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt[4]{ab^3} \leq \frac{a+3b}{4}$ を示せ。