

2011 (H23) 年度 新潟大学 前期 入学試験 数学解説

< 理・医・歯・工学部 >

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答よ。

- (1) A^2, A^3 を求めよ。
- (2) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の自然数 n を求めよ。
- (3) $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}$ を求めよ。

< 解答 >

(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

$$A^3 = A A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

(2)

$$A^4 = A A^3 = -A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A, \quad A^5 = -A^2, \quad A^6 = -A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって、 $n=6$ (答)

(3)

(2)の結果から、 $A^r = A^{6p+r}$ 、(p は正の整数、 $r=1, 2, 3, 4, 5, 6$)

したがって、

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100} = 16(A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6) + A^{97} + A^{98} + A^{99} + A^{100}$$

しかるに(2)から、 $A + A^2 + \dots + A^6 = 0$ 、

また、 $A^{97} = A$ 、 $A^{98} = A^2$ 、 $A^{99} = A^3$ 、 $A^{100} = A^4 = -A$ だから

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100} = A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

行列の計算の問題で題意は簡明である。(1)は単純に計算すれば良い。 A^3 を計算すると、 $-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ になるので、存外簡単な問題になりそうな予感がする。この段階で(2)の解答はほぼ得られたようなものだ。 $A^6 = A^3 A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ だから $n=6$ は明らかであろう。行列のべき乗で単位行列が出ると、その後は、同じ行列の繰り返しになる。ここでは6項ごとに同じ行列が繰り返される。

2 数直線上の動点Aがはじめ原点にある。動点Aは1秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きに

それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で指定された長さを移動するものとする。 n 秒後に動点Aが原点に戻る確率を p_n とする。ただし、 n は自然数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 動点Aが1秒ごとに正の向きに1または負の向きに1移動するとき、 p_1, p_2 を求めよ。
- (2) 動点Aが1秒ごとに正の向きに1または負の向きに1移動するとき、 p_n を求めよ。
- (3) 動点Aが1秒ごとに正の向きに3または負の向きに1移動するとき、 p_n を求めよ。

<解答>

(1)

1秒後に動点Aが原点に戻る確率 $p_1=0$ (答)

2秒後に動点Aが原点に戻る確率 $p_2=\frac{{}_2C_1}{2^2}=\frac{1}{2}$ (答)

(2)

原点に戻るためには、正と負の移動の回数が同じでなければならない。したがって、 n が奇数のとき、すなわち $n=2k-1$ のとき、 $p_{2k-1}=0$ (答)、ただし k は正の整数。

n が偶数のとき、すなわち $n=2k$ のとき、 $p_{2k}=\frac{{}_{2k}C_k}{2^{2k}}=\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$ (答)

(3)

原点に戻るためには、正の移動1回と負の移動3回という組み合わせでなければならない。

したがって、 $4k$ 回の移動以外の移動回数では原点に戻らない。ただし、 k は正の整数。

したがって、 $n=4k-3, 4k-2, 4k-1$ すなわち n が4の倍数ではないとき、

$p_{4k-3}=p_{4k-2}=p_{4k-1}=0$ (答)

$n=4k$ すなわち n が4の倍数のとき、 k 回が正の移動、 $3k$ 回が負の移動のときに原点に戻るから

$p_{4k}=\frac{{}_{4k}C_k}{2^{4k}}=\frac{(4k)!}{2^{4k}(3k)!k!}$ (答)

<解説>

正と負の移動の発生確率が同じ $\frac{1}{2}$ なので、扱いやすい。正負の移動量が同じ場合には、正負の移動回数が同じであることが、原点に戻るためには必要である。したがって、奇数秒後に原点に戻る確率は0ということである。(1)では、1秒後ということは1回の移動ということだから、原点に戻ることはないのは自明である。2秒後は、正負の移動の組合せの場合は4つ(正正、正負、負正、負負)、このうち原点に戻るのは、正負と負正である。一般的には、正負の移動の組み合わせの数が 2^n 、正の移動回数が k 回の場合の数は ${}_nC_k$ だから、 n 秒後に k 回の正移動で原点に戻る確率は $\frac{{}_nC_k}{2^n}$ である。

(2)は n 秒後という一般的な場合の原点に戻る確率である。 n が奇数の場合は、原点に戻ることはないから、確率は0になる。偶数の場合で、正負の移動回数が同数の場合に原点に戻る。したがって、原点に戻る確率は(正負の移動回数が同じ場合の数 $={}_nC_k$)÷(正負の移動の組み合わせの数 $=2^n$)ということになる。

(3)は正の向きの移動が3になったということは、原点に戻る正負の移動の回数の組み合わせが変わっ

たということ。正の移動1回に対し、負の移動3回の組合せでなければならない。したがって、 $4k$ 回の移動では、正の移動が k 回、負の移動が $3k$ 回という場合に原点に戻る。この場合の数は $4k$ 回の移動のうち k 回が正の場合だから、 ${}_{4k}C_k$ である。

〔3〕 $\triangle OAB$ において、 $OA=1$ 、 $OB=AB=2$ とし、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。

このとき、次の問いに答よ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) $\angle AOB$ の二等分線上の点Pが $AP=BP$ を満たすとき、線分APの長さを求めよ。

< 解答 >

(1)

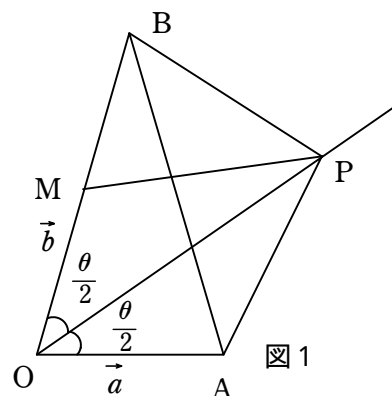
図1を参照する。

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ 、したがって

$$(\vec{b}-\vec{a})^2=\vec{b}^2-2\vec{a} \cdot \vec{b}+\vec{a}^2=\overrightarrow{AB}^2$$

$|\vec{a}|=1$ 、 $|\vec{b}|=2$ 、 $|\overrightarrow{AB}|=2$ だから、

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=\frac{1}{2} \quad (\text{答})$$



(2)

OBの中点をMとする。点Pが $\angle AOB$ の二等分線上にあるので、 t を実数として、

$\overrightarrow{OP}=t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM})=t\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$ とおくことができる。

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{AP}^2=\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2$ 、したがって

$$\overrightarrow{AP}^2=t^2\left(\vec{a}^2+\vec{a} \cdot \vec{b}+\frac{\vec{b}^2}{4}\right)-2t\left(\vec{a}^2+\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{2}\right)+\vec{a}^2=t^2\left(1+\frac{1}{2}+1\right)+1-2t\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5t^2}{2}-\frac{5}{2}t+1$$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{BP}^2=\overrightarrow{OP}^2-2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2$ 、したがって

$$\overrightarrow{BP}^2=t^2\left(\vec{a}^2+\vec{a} \cdot \vec{b}+\frac{\vec{b}^2}{4}\right)-2t\left(\vec{a} \cdot \vec{b}+\frac{\vec{b}^2}{2}\right)+\vec{b}^2=t^2\left(1+\frac{1}{2}+1\right)+4-2t\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{5t^2}{2}-5t+4$$

今、 $\overrightarrow{AP}^2=\overrightarrow{BP}^2$ となるのは、 $\frac{5t^2}{2}-\frac{5}{2}t+1=\frac{5t^2}{2}-5t+4$ から、 $t=\frac{6}{5}$

したがって、 $\overrightarrow{AP}^2=\frac{8}{5}$ 、 $AP=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ (答)

< 解説 >

(1)では、 $\triangle OAB$ は $OB=AB$ の2等辺三角形だから、 $\vec{a} \cdot \vec{b}=\frac{1}{2}$ となるのは、図1を見れば直感的に分かる。(2)では、 $\overrightarrow{OP}$ の表式を思いつくかどうか、ポイントになる。点Pが $\angle AOB$ の二等分線上にあるということから、表式を得るのだが、一つのテクニックだろう。こういうところで、類似問題の学習経験があるかどうか問われる。

問題はベクトル表示されているので、上記ではベクトル演算により解を得た。別解として、三角関

数の余弦定理を使った解答を示す。ベクトル演算の苦手な人は単純に三角関数を利用した図形問題として扱うのも一法だろう。

(1)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \cdot OB \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$$\text{余弦法則により, } \cos \theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{1 + 4 - 4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{したがって, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cos \theta = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

(2)

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP \cos \frac{\theta}{2}$$

$$BP^2 = OB^2 + OP^2 - 2OB \cdot OP \cos \frac{\theta}{2}$$

$$AP = BP \text{ だから, } = \text{とおいて,}$$

$$1 - 2OP \cos \frac{\theta}{2} = 4 - 4OP \cos \frac{\theta}{2}$$

$$OP \cos \frac{\theta}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{4} \text{ だから, } \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}, \text{ したがって } \text{ から, } OP = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{から } AP^2 = 1 + \frac{18}{5} - 3 = \frac{8}{5}, AP = \frac{2\sqrt{10}}{5} \quad (\text{答})$$

4 関数

$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 2\pi - t & (\pi < t \leq 2\pi) \end{cases}$$

に対して, 次のように2つの関数 $g(x)$, $h(x)$ を $0 \leq x \leq 2\pi$ で定義する。

$$g(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t+x) dt, \quad h(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(t+x) dt$$

このとき, 次の問いに答よ。

- (1) 関数 $g(x)$, $h(x)$ を求めよ。
- (2) x が $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲を動くとき, 関数 $y = g(x) + h(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

< 解答 >

(1)

$$g(x) = \int_0^{\pi} t \cos(t+x) dt + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t) \cos(t+x) dt$$

$$\begin{aligned} \text{部分積分により, } \int t \cos(t+x) dt &= t \int \cos(t+x) dt - \int \sin(t+x) dt \\ &= t \sin(t+x) + \cos(t+x) \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \left[t \sin(t+x) + \cos(t+x) \right]_0^\pi + 2\pi \left[\sin(t+x) \right]_\pi^{2\pi} - \left[t \sin(t+x) + \cos(t+x) \right]_\pi^{2\pi} \\
&= \pi \sin(\pi+x) + \cos(\pi+x) - \cos x + 2\pi \sin(2\pi+x) - 2\pi \sin(\pi+x) \\
&\quad - 2\pi \sin(2\pi+x) - \cos(2\pi+x) + \pi \sin(\pi+x) + \cos(\pi+x) \\
&= -\pi \sin x - \cos x - \cos x + 2\pi \sin x + 2\pi \sin x - 2\pi \sin x - \cos x - \pi \sin x - \cos x \\
&= -4\cos x \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

$$h(x) = \int_0^\pi t \sin(t+x) dt + \int_\pi^{2\pi} (2\pi-t) \sin(t+x) dt$$

$$\begin{aligned}
\text{同様に, } \int t \sin(t+x) dt &= t \int \sin(t+x) dt + \int \cos(t+x) dt \\
&= -t \cos(t+x) + \sin(t+x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= \left[-t \cos(t+x) + \sin(t+x) \right]_0^\pi - 2\pi \left[\cos(t+x) \right]_\pi^{2\pi} - \left[-t \cos(t+x) + \sin(t+x) \right]_\pi^{2\pi} \\
&= -\pi \cos(\pi+x) + \sin(\pi+x) - \sin x - 2\pi \cos(2\pi+x) + 2\pi \cos(\pi+x) \\
&\quad + 2\pi \cos(2\pi+x) - \sin(2\pi+x) - \pi \cos(\pi+x) + \sin(\pi+x) \\
&= \pi \cos x - \sin x - \sin x - 2\pi \cos x - 2\pi \cos x + 2\pi \cos x - \sin x + \pi \cos x - \sin x \\
&= -4\sin x \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

(2)

$$y = g(x) + h(x) = -4(\cos x + \sin x) = -4\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = -4\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \text{ のとき, } y \text{ は最大値 } 4\sqrt{2} \quad (\text{答})$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \text{ のとき, } y \text{ は最小値 } -4\sqrt{2} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

(1)

部分積分法を利用する。関数 $a(x)$, $b(x)$, その導関数を $a'(x)$, $b'(x)$ とすれば, 部分積分の式は

$$\int ab' dx = a \int b' dx - \int a' b dx$$

これを利用して積分関数を求め, 定積分を実行する。

(2)

三角関数の加法定理を活用して, $g(x) + h(x)$ をまとめ, 理解しやすくする。

5 実数 a, b, c に対して, 3次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。このとき, 次の問いに答よ。

- (1) $f(-1), f(0), f(1)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。
- (2) $f(2010), f(2011), f(2012)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。

< 解答 >

(1)

$$f(-1) = -1 + a - b + c, \text{ したがって, } a - b = k_{-1} \text{ とおける。ただし } k_{-1} \text{ は整数。}$$

$f(0)=c$, したがって c は整数。

$f(1)=1+a+b+c$, したがって , $a+b=k_1$ とおける。ただし k_1 は整数。

$$a=\frac{k_1+k_{-1}}{2} , b=\frac{k_1-k_{-1}}{2}$$

$$f(n)=n^3+an^2+bn+c$$

$$\text{しかるに } an^2+bn=n(an+b)=n\left\{\frac{nk_1+nk_{-1}}{2}+\frac{k_1-k_{-1}}{2}\right\}=n\left\{\frac{(n+1)k_1+(n-1)k_{-1}}{2}\right\}$$

n が偶数のとき , は整数。 n が奇数のとき , $(n+1)$, $(n-1)$ はともに偶数だから , は整数。
したがって , は整数。

(2)

$x'=x-2011$ とおく。 $x=x'+2011$ を $f(x)$ に代入すると ,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x'+2011)^3 + a(x'+2011)^2 + b(x'+2011) + c \\ &= x'^3 + a'x'^2 + b'x' + c' \end{aligned}$$

$$\text{ただし , } a'=a+3\times 2011$$

$$b'=b+3\times (2011)^2+2a\times 2011$$

$$c'=c+(2011)^3+(2011)^2a+2011b$$

$$x'^3+a'x'^2+b'x'+c'=g(x') \text{ とおく。}$$

$$g(-1)=f(2010) \text{ となり整数 , } g(0)=f(2011) \text{ となり整数 , } g(1)=f(2012) \text{ となり整数 ,}$$

すると , (1) により , すべての整数 n' に対して , $g(n')$ は整数になる。

$g(x')=f(x)$, $n=n'+2011$ だから , すべての整数 n に対して , $f(n)$ は整数となる。

< 解説 >

(1)

$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ が整数であることから得られる a , b , c の条件を使って , 任意の n に対して $f(n)$ が整数になることをいう。 a , b , c が整数という条件が得られれば , 結論は容易だが , そうはならないところが問題だ。 a , b を整数によって表現し , それらによって $f(n)$ が整数となることを明らかにすれば良い。 その際 , 式の変形によって , 整数であることが論証できるような表現にすることが鍵である。

(2)

$x=2010$ から連続する三つの整数に対して $f(x)$ が 0 になるという条件は (1) と同じだから , 何とか (1) を利用して , 証明できないか考えたい。 $x'=x-2011$ なる変数変換すると , 与えられた三次関数は係数は異なるがやはり三次関数になり , しかも $x'=-1$ から連続する三つの整数に対して関数は整数値をとることになる。

さて , 以下に一般的な解法を述べる。

$x=0$ あるいは 2011 という数字に特別な意味があるのか , と問うところから考察を始めよう。むしろ $x=m-1$, m , $m+1$ という連続する三つの整数に対して , $f(x)$ が 0 になるところに意味があるのではないかと考えてみよう。 (1) は $m=0$ の場合である。そこで , a , b , c を m を含む整数によって表現し , 任意の整数 n に対して , $f(n)$ が整数となることを明らかにする。この際 (1) と同様に , 整数になるかどうか判断できるような形式に表現することが重要である。

m をある整数とする。

$f(m-1)=(m-1)^3+a(m-1)^2+b(m-1)+c=k_{-1}$ とおく。ただし、 k_{-1} は整数。

$f(m)=m^3+am^2+bm+c=k_0$ とおく。ただし、 k_0 は整数。

$f(m+1)=(m+1)^3+a(m+1)^2+b(m+1)+c=k_1$ とおく。ただし、 k_1 は整数。

$$k_0-k_{-1}=(3m^2-3m+1)+a(2m-1)+b$$

$$k_1-k_0=(3m^2+3m+1)+a(2m+1)+b$$

$$\text{— により, } k_1-2k_0+k_{-1}=2a+6m, a=\frac{(k_1-k_0)-(k_0-k_{-1})}{2}-3m$$

$\times(2m+1)-\times(2m-1)$ を計算すると,

$$(k_0-k_{-1})(2m+1)-(k_1-k_0)(2m-1)=(3m^2-3m+1)(2m+1)-(3m^2+3m+1)(2m-1)+2b$$

$$b=\frac{(k_0-k_{-1})(2m+1)-(k_1-k_0)(2m-1)}{2}+3m^2-1$$

$$am^2+bm=m(am+b)$$

$$=m\left(\frac{(k_1-k_0)m-(k_0-k_{-1})m+(k_0-k_{-1})(2m+1)-(k_1-k_0)(2m-1)}{2}-1\right)$$

$$=m\left\{\frac{(k_0-k_{-1})(m+1)-(k_1-k_0)(m-1)}{2}-1\right\}$$

m の偶奇に関わらず、 $\frac{(k_0-k_{-1})(m+1)-(k_1-k_0)(m-1)}{2}$ は整数。したがって、 c は整数。

さて、任意の整数 n について、 $f(n)=n^3+an^2+bn+c$ が整数となるか調べる。

$$an^2+bn=n(an+b)$$

$$=n\left\{\frac{(k_0-k_{-1})(2m+1-n)-(k_1-k_0)(2m-1-n)}{2}-1\right\}$$

n が偶数のとき $\frac{(k_0-k_{-1})(2m+1-n)-(k_1-k_0)(2m-1-n)}{2}$ は整数、 n が奇数のとき $2m\pm 1-n$ は偶数だから、 n の偶奇に関わらず $\frac{(k_0-k_{-1})(2m+1-n)-(k_1-k_0)(2m-1-n)}{2}$ は整数。したがって、任意の整数 n について、 $f(n)$ は整数となる。

当然、 $m=0$ でも $m=2011$ でも同様である。(1)、(2)の両方が一気に証明されたことになる。

< 総評 >

理系の数学としては標準的な難易度の問題が揃っている。格別な難問はない。悪くても、75%ほどの得点は得たい。

1

行列の計算問題で、題意は簡明で計算も容易である。べき乗計算して単位行列が出現することに着目する。級数計算は、繰り返しに着目して簡便に行う工夫が必要だ。難易度はC+。

2

確率の問題で、題意も比較的簡明だ。当たり前のことだが、確率の問題では特に問題文を注意深く読んで、題意を的確に把握する。難易度はB。

3

ベクトルを用いる図形の問題。ベクトル演算により、扱いがスマートで容易になると共に、特有のテクニックも必要になってしまう。三角関数の余弦定理などを用いて、ゴリゴリ計算するのも方法である。難易度はB-。

4

微分積分の問題。三角関数の定積分，不定積分を理解した上で，ひたすら計算力を試す問題。焦らずに，丁寧に計算を実行していく。難易度はC。

5

整数の問題で，一見容易そうだが，証明するには，きっちりとした数学思考過程が必要だ。整数になるかどうか判断できるような形式に式を変形することが重要だ。そのために，一工夫が必要だ。難易度はA－。

110627

< 人文・教育・経済・農学部 >

1 △OABにおいて，OA=1，OB=AB=2とし， $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。

実数 t に対して，

$$\overrightarrow{OP}=t\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

とする。このとき，次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。
- (2) $AP=BP$ を満たすとき， t の値を求めよ。さらに線分APの長さを求めよ。

< 解答 >

(1)

理系問題3(1)の解答を参照。

(2)

図1を参照して考える。

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\vec{a}=t\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\vec{a}$$

$$(\overrightarrow{AP})^2=t^2\left(\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{\vec{b}^2}{4}\right)+\vec{a}^2-2t\left(\vec{a}^2+\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}\right)=t^2\left(1+\frac{1}{2}+1\right)+1-2t\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5t^2}{2}-\frac{5}{2}t+1$$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\vec{b}+\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\vec{b}=t\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\vec{b}$$

$$(\overrightarrow{BP})^2=t^2\left(\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{\vec{b}^2}{4}\right)+\vec{b}^2-2t\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{\vec{b}^2}{2}\right)=t^2\left(1+\frac{1}{2}+1\right)+4-2t\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{5t^2}{2}-5t+4$$

$$(\overrightarrow{AP})^2=(\overrightarrow{BP})^2 \text{ とすれば,}$$

$$\frac{5t^2}{2}-\frac{5}{2}t+1=\frac{5t^2}{2}-5t+4 \text{ から, } t=\frac{6}{5} \quad (\text{答})$$

$$(\overrightarrow{AP})^2=\frac{8}{5}, AP=\frac{2\sqrt{10}}{5} \quad (\text{答})$$

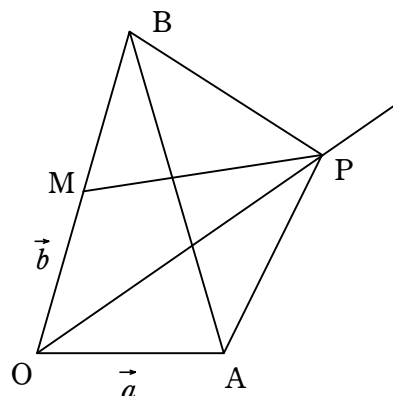


図1

< 解説 >

理系の数学問題[3]とほぼ同じ問題。文系問題では、 $\overrightarrow{OP}$ の表現式が与えられているので、扱いが容易になっている。(1)は理系と同じ。(2)は $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ を $\overrightarrow{OP}$ の表式を用いて表すことがポイント。その上で、両者の長さが等しいとおけば、 t を求めることができる。 $t=1$ のとき、四辺形OAPMは菱形となり、OPは $\angle AOB$ の2等分線となる。ただし、MはOBの中点。

[2] 数直線上の動点Aがはじめ原点にある。動点Aは1秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で指定された長さを移動するものとする。 n 秒後に動点Aが原点に戻る確率を p_n とする。ただし、 n は自然数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 動点Aが1秒ごとに正の向きに1または負の向きに1移動するとき、 p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ。
- (2) 動点Aが1秒ごとに正の向きに2または負の向きに1移動するとき、 p_6 を求めよ。

< 解答 >

(1)

正の移動と負の移動の回数が同数のとき原点に戻る。したがって、奇数回の移動では原点に戻ることはない。したがって、 $p_1 = p_3 = 0$ (答)

2回の移動のうち、正負あるいは負正の移動となる確率は $p_2 = \frac{{}_2C_1}{2^2} = \frac{1}{2}$ (答)

4回の移動のうち、正の移動2回、負の移動2回となる確率は $p_4 = \frac{{}_4C_2}{2^4} = \frac{3}{8}$ (答)

(2)

正の移動1回に対し負の移動2回の割合の移動で原点に戻る。全部で6回の移動では、正の移動2

回、負の移動4回で原点に戻る。したがって、 $p_6 = \frac{{}_6C_2}{2^6} = \frac{15}{64}$ (答)

< 解説 >

理系の問題2と同様の問題設定。一般解を求める問題ではないので、容易になっている。原点に戻るの、正と負の移動の回数が特定の割合のときである。 n 回の移動の場合に正の移動回数が k 回、負の移動回数が $(n-k)$ 回になる場合の数は ${}_nC_k$ 、正と負の移動の組み合わせの場合の数は 2^n 、だから正の移動回数が k 回になる確率は $\frac{{}_nC_k}{2^n}$ である。

[3] xy 平面上の3点をO(0, 0), A(4, 0), B(3, 3)とする。2点O, Aを通る放物線を $y = -ax^2 + bx$ とする。ただし、 $a > 0$ とする。このとき、次の問いに答よ。

- (1) b を a の式で表せ。
- (2) $y = -ax^2 + bx$ と x 軸とで囲まれた図形が、 $\triangle OAB$ に含まれるような、 a の値の範囲を求めよ。
- (3) $y = -ax^2 + bx$ と x 軸とで囲まれた図形の面積が $\triangle OAB$ の面積の $\frac{1}{3}$ となるときの、 a の値を求めよ。

< 解答 >

(1)

A (4, 0)を通るので, $x=4$ として $0=-16a+4b$, $b=4a$ (答)

(2)

放物線 $y=-ax^2+4ax$ が直線 OB ($y=x$) とAB ($y=-3x+12$) より下になければならない。

したがって, $0 \leq x \leq 3$ で, $-ax^2+4ax \leq x$ だから, $a \leq \frac{1}{4}$

また, $3 \leq x \leq 4$ で, $-ax^2+4ax \leq -3x+12$, したがって, $a \leq 1$

したがって, $0 < a \leq \frac{1}{4}$ (答)

(3)

放物線と x 軸で囲まれた面積は, $\int_0^4 (-ax^2+4ax)dx = \left[-\frac{ax^3}{3} + 2ax^2 \right]_0^4 = -\frac{64a}{3} + 32a = \frac{32a}{3}$

$\triangle OAB$ の面積は, $\frac{4 \times 3}{2} = 6$

したがって, $\frac{32a}{3} = \frac{6}{3}$, $a = \frac{3}{16}$ (答)

< 解説 >

特段の工夫を要することなく, きちんと計算していく。

(2)

図2に示すような関係になっている必要がある。

(3)

二次関数の積分を行えば良い。

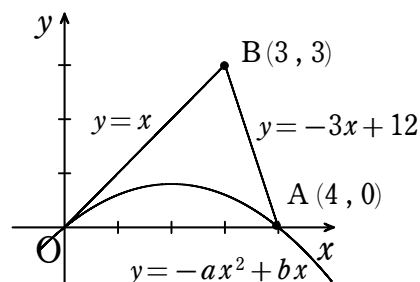


図2

[4] a, b, c, d を正の実数とする。このとき, 次の問いに答よ。

(1) 不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ を示せ。

(2) 不等式 $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt[4]{ab^3} \leq \frac{a+3b}{4}$ を示せ。

< 解答 >

(1)

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0$$

したがって, $(\sqrt{ab})^2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, a, b は正の実数だから $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

(2)

$$s = \frac{a+b}{2}, t = \frac{c+d}{2} \text{ とおけば, (1) から } \sqrt{st} \leq \frac{s+t}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

$$\text{しかるに, } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = s, \sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2} = t \text{ だから, } \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \leq \sqrt{st} \leq \frac{s+t}{2}$$

$$\text{したがって, } \sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$$

(3)

$$(2) \text{ で } c = d = b \text{ とおけば, } \sqrt[4]{ab^3} \leq \frac{a+3b}{4}$$

< 解説 >

基礎的な不等式関係に関する証明問題である。(1)は当然の手法による証明である。(2)は(1)の関係を利用する。 s, t というような変数を用いることで、考え易くなる。

< 総評 >

格別の難問もなく、文系の数学として標準的な難易度の問題である。75%以上の得点を確保したい。

①

図形をベクトル演算によって扱う問題。ベクトルを用いることによって、問題の扱いが容易になるが、ベクトルについて習熟していなければならない。理系とほぼ同じ問題であるが、キーとなる表式が与えられているので、問題としては容易である。難易度はB。

②

理系とほぼ共通の確率の問題。確率の問題では、場合の数が重要で、その求め方には習熟している必要がある。確率統計は文系でも利用頻度の高い数学分野であり、職業生活でも役に立つことが多いので、その勉強は大事だ。難易度はB。

③

2次関数（放物線）の積分（面積）に関する問題。難易度はC。

④

こうした基礎的問題は的確に答えねばならない。当然の数学手法を理解し適用することが必要である。こういう問題で差がつきやすいので注意すること。難易度はC。

110707