2011（H23)年度　東北大学　前期入学試験　物理解説

1

＜解答＞

問（1）(a)

物体Aの重力の斜面方向成分と留め具方向成分がそれぞれの抗力の大きさとなる。向きは逆方向である。

$N_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}Mg$　（答），　$N_2=\dfrac{1}{2}Mg$　（答）

(b)

衝突直前の速さをv，衝突直後の速さをv'とすれば，エネルギー保存の法則によって，

$mgh=\dfrac{mv^2}{2}$，$mgh'=\dfrac{mv'^2}{2}$

$e=\dfrac{v'}{v}=\dfrac{\sqrt{2gh'}}{\sqrt{2gh}}=\sqrt{\dfrac{h'}{h}}$　（答）

問（2）(a)

物体Aがばねを押す力とばねの力とがつりあうので，$\dfrac{1}{2}Mg=kd_0$

したがって，$d_0=\dfrac{Mg}{2k}$　（答）

ばね定数がkのばねによる単振動の周期は，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　（答）

(b)

小球Cは時間$\dfrac{T}{4}$で，初速0で距離h_0の自由落下をするのだから，

$h_0=\dfrac{g}{2}\left(\dfrac{T}{4}\right)^2=\dfrac{\pi^2gM}{8k}$　（答）

(c)

物体Aの速度は衝突の影響を受けないので，はねかえり係数が１であることから，

$\left|\dfrac{V_y-v_1}{V_y-v_0}\right|=1$，$0<V_y<v_1$だから，$-\dfrac{V_y-v_1}{V_y-v_0}=1$，したがって $v_1=2V_y-v_0$　（答）

(d)

物体Aの単振動の変位は，$t=0$で変位が$-2\pi d_0$だから，$s=-2\pi d_0\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$

したがって，物体Aの速度は$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{4\pi^2d_0}{T}\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$

$t=\dfrac{T}{4}$では，$V_0=\dfrac{4\pi^2d_0}{T}=2\pi d_0\sqrt{\dfrac{k}{M}}=\pi g\sqrt{\dfrac{M}{k}}$，

したがって $V_y=V_0\sin 30°=\dfrac{\pi g}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　（答）

(e)

$v_0=-\dfrac{gT}{4}$，$V_y=\dfrac{gT}{4}$だから，(c)より$v_1=\dfrac{3gT}{4}$

エネルギー保存の法則によって，$mgh_1=\dfrac{mv_1{}^2}{2}$，同じく$mgh_0=\dfrac{mv_0{}^2}{2}$だから，

$\dfrac{h_1}{h_0}=\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2=9$　（答）

$v_1=\dfrac{3gT}{4}$ということは，はねかえり後，時間$\dfrac{3T}{4}$で最大の高さに到達するということだから，

$t_1=\dfrac{T}{4}+\dfrac{3T}{4}=T$　（答）

(f)

小球は時間$\dfrac{3T}{4}$後に最大の高さに達した後，同じ時間かけて，元の高さすなわち，単振動の中心位置に戻る。このときの時刻は$T+\dfrac{3T}{4}=\dfrac{7T}{4}$である。したがって物体Aもちょうど単振動の中心に下降しながら到達する。両者は再び衝突する。衝突後の小球の速度をv_2とすると，

はねかえり係数は，$1=\left|\dfrac{-V_y-v_2}{-V_y-(-v_1)}\right|=\dfrac{V_y+v_2}{-V_y+v_1}$，$v_2=v_1-2V_y=\dfrac{gT}{4}=-v_0$となるので，小球の運動は最初に小球を落としたときの衝突直前の速さで衝突後はねあがる運動になる。この速さで上昇するということは，時間$\dfrac{T}{4}$後，すなわち時刻$\dfrac{7T}{4}+\dfrac{T}{4}=2T$に最大の高さに達して，再び降下する。

したがって，以上の運動をグラフに描くと，図１のようになる。

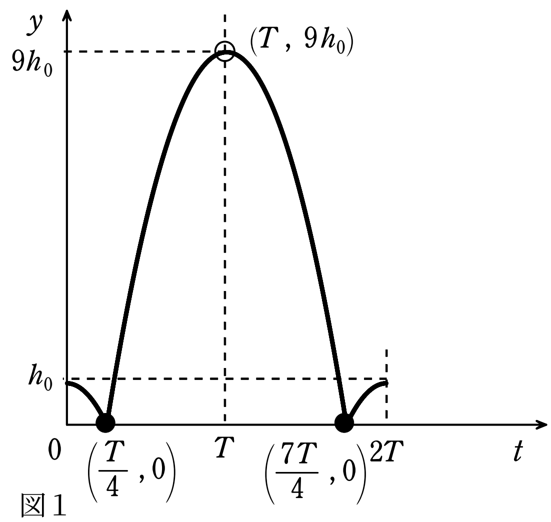

図１

＜解説＞

$\boxed{1}$

問(1) (a)

抗力の概念は力学の基本である。的確に理解しておく。

(b)

エネルギー保存の法則から，衝突前後の速さを求め，はねかえり係数を求める。よく出る問題。

問(2) (a)

ばねの力とつりあいの問題。ばね定数とばねの変位による力を理解しておく。またばねによる単振動の周期の公式は覚えておかなければならない。周期の公式を忘れたらどうするか。少なくも，正弦波の振動（単振動）をすることは覚えておかねばならない。

ばねに質量mの物体が接続されているとき，運動方程式は，$ma=-kx$だから，$x=\sin(\omega t)$とおけば，$m\omega^2=k$となって，$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，周期は$\dfrac{2\pi}{\omega}$だから，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$となる。

(b)

自由落下の運動方程式や落下距離については，典型的な運動として的確に理解しておくこと。

(c)

小球の衝突によって，物体Aの速度は影響を受けないことに注意し，はねかえり係数の公式を適用する。

(d)

物体Aは単振動をする。時刻$\dfrac{T}{4}$では，物体Aは自然長の位置で単振動の中心にある。速度の求め方にはいろいろある。解答では単振動の変位を時間微分して速度を求めている。エネルギー保存の法則を用いても良い。$t=0$でのばねの弾性エネルギーが$t=\dfrac{T}{4}$で運動エネルギーに変わったと考えることができる。

（$t=0$でのばねの弾性エネルギー）$=\dfrac{k}{2}(2\pi d_0)^2$

（$t=\dfrac{T}{4}$での運動エネルギー）$=\dfrac{MV_0{}^2}{2}$

両者を等しいとおいて，$V_0=2\pi d_0\sqrt{\dfrac{k}{M}}=\pi g\sqrt{\dfrac{M}{k}}$，$Vy=V_0\sin 30°=\dfrac{\pi g}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

(e)

v_0，v_1の大きさが分かるので，エネルギー保存の法則から求めるのが速い。最大の高さでは，垂直方向の速さは0である。

(f)

小球は重力の作用の下で，自由落下運動と物体Aとの弾性衝突によるはねあがり運動を繰り返す。これらは，時間の2次関数なので，横軸に時刻，縦軸に垂直方向の位置をとれば，放物線を描くことは自明であろう。

時刻$\dfrac{7T}{4}$で衝突した後の，$2T$までの運動がどうなるかについて理解しないと，グラフは完成しない。

さて，このようにこの問題を考察して，読者は何か変だな，と思わないだろうか。何か違和感を感じるとしたら，読者は物理に対する理解が進んだといえるかも知れない。私も，この問題を考えながら，なにか変だなと思って解いていた。この件は後述の総評で取り上げる。

$\boxed{2}$

＜解答＞

問(1)

$V \leqq V_0$のときは，電流が流れないので，発光しない。$V_0 < V$では，$I = k(V - V_0)$である。

したがって，

$V \leqq V_0$のとき$P = 0$，$V_0 < V$のとき$P = aI = ak(V - V_0)$　（答）

問(2) (a)

キルヒホッフの法則により，$IR + V = E$，したがって，$I = \dfrac{E - V}{R}$　（答）

(b)

$P = aI = \dfrac{a(E - V)}{R}$，しかるに問(1)から$I = k(V - V_0)$だから，$\dfrac{E - V}{R} = k(V - V_0)$

したがって，$V = \dfrac{kR(E - V_0)}{kR + 1}$，$E - V = \dfrac{kR(E - V_0)}{kR + 1}$，したがって，$P = \dfrac{ak(E - V_0)}{kR + 1}$　（答）

(c)

S_1を開いた回路について，$E = IR + \dfrac{Q}{C} + V$が成立する。$S_1$を開いた瞬間から，$I \to 0$になり，

$V \to V_0$に降下していくので，$E = \dfrac{Q}{C} + V_0$となるから，$Q = C(E - V_0)$　（答）

問(3)

(a)

点Dの座標は$(l\cos\theta,\ l\sin\theta\ ,0) = (l\cos\omega t\ ,l\sin\omega t\ ,0)$

x座標の時間変化が辺CDの速度のx成分だから，$v_x = -l\omega\sin\omega t$　（答）

(b)

誘導起電力はコイルを横切る磁束ϕの時間変化である。$\phi = Bl^2\cos\theta = Bl^2\cos\omega t$

したがって誘導起電力は，$V = -\dfrac{\varDelta\phi}{\varDelta t} = Bl^2\omega\sin\omega t$

(c)

発光ダイオードは，加わる電圧がV_0を超えた瞬間に発光を開始し，V_0を下回る瞬間に発光を停止する。Vが最大値をとるのは，$\omega t = \theta = \dfrac{\pi}{2}$のときで，$Bl^2\omega = 2V_0$

$V_0 \leqq Bl^2\omega\sin\theta = 2V_0\sin\theta$となるのは，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta$，その後$Bl^2\omega\sin\theta \leqq V_0$となるのは，$\dfrac{5\pi}{6} \leqq \theta$

したがって，$\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$，$\theta_2 = \dfrac{5\pi}{6}$　（答）

(d)

最大起電力$2V_0$のとき，コイルに流れる電流は$I = k(2V_0 - V_0) = kV_0$で最大となる。したがって，辺CDが受ける力のx成分の最大値はフレミングの左手の法則により，$F_1 = BIl = kV_0Bl$　（答）

最小値は電流が流れないときだから，$F_2 = 0$　（答）

＜解説＞

発光ダイオードを含む回路の問題である。今，話題のLED（Light Emission Diode）照明は発光ダイオードを利用した照明である。このような問題はこれから増えるであろう。

問(1)

半導体を用いた発光ダイオードは，問題の図１，２に示すような特性を示す。このグラフの意味するところを頭に入れること。格別に難しいことではなかろう。なぜ、このような特性を示すかは，半導体物理学の理解が必要で，大学の専門学部の講義の範囲になってしまう。

問(2)

(a)

用いても良い物理量を間違えないこと。スイッチS_1を先に閉じるということは，コンデンサーの両端の電位差は0だから，電荷が溜まらない。コンデンサーは回路の状態に影響を与えないということである。したがって，解答にはCは入らない。

(b)

ここでは，Vを用いることができない。発光ダイオードに加わる電圧VをE, V_0, R によって表現する必要がある。

(c)

発光ダイオードが発光していなかった，ということは電流が流れなくなった，ということである。発光ダイオードに印加していた電圧VがV_0に降下して，電流が流れなくなった。したがって，コンデンサーには$(E-V_0)$の電圧が加わるので，蓄積された電荷は，$Q=C(E-V_0)$である。

問(3)

(a)

点Dのx座標の時間変化が辺CDの速度のx成分である。

(b)

磁束に直交するコイルの面積が回転によって変化するので，コイルを貫く磁束が変化する。したがって，起電力が誘導される。

(c)

誘導起電力が最大値をとるθを先ず求める。すると，V_0と他のパラメーターとの関連が分かる。

(d)

電流はADCBという一方向にしか流れない。したがって，辺CDが磁場から受ける力はx軸の正方向のみであり，負方向には受けない。

$\boxed{3}$

問(1)

ピストン上の単位面積当たりの液体の質量は$d\rho$だから，ピストンにかかる圧力は$d\rho g$。したがって，面積Sを乗じることにより，液体がピストンを押す力は，$F_L=d\rho Sg$　（答）。

問(2)(a)

加熱前は，$p_1=d_1\rho g$，$V_1=(d_B-d_1)S$

加熱後は，$p_2=d_2\rho g$，$V_2=(d_B-d_2)S$

液面の深さ$d=x$のとき，$p=x\rho g$，$V=(d_B-x)S$

xを消去すると，$p=\left(d_B-\dfrac{V}{S}\right)\rho g$

したがって，圧力変化は図２のようになる。

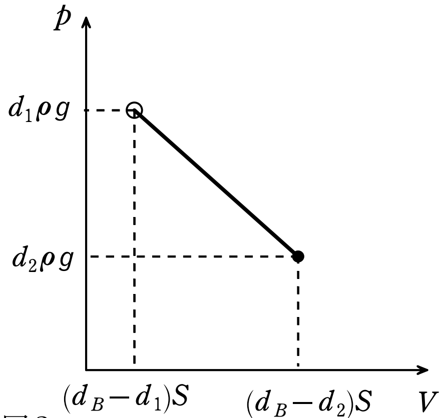

図２

(2)

気体がした仕事は図２の$p-V$直線とV軸が囲む面積だから，$W_G=\dfrac{1}{2}\rho Sg(d_1{}^2-d_2{}^2)$　（答）

問(3)

(a)

気体の状態方程式は，$pV=pS(d_B-d)=RT$

したがって，気体がピストンを押す力は，$F_G=pS=\dfrac{RT}{d_B-d}$　（答）

(b)

ピストンを上向きに押す力は，$F_U=F_G-F_L=\dfrac{RT}{d_B-d}-d\rho Sg$

$F_U=0$，すなわちピストンを上下から押す力がつりあう場合，

方程式，$d^2-d_Bd+\dfrac{RT}{\rho Sg}=0$，$\left(d-\dfrac{d_B}{2}\right)^2=\left(\dfrac{d_B}{2}\right)^2-\dfrac{RT}{\rho Sg}$　①　を満足しなければならない。

①の右辺の正負を決める温度T_Gによって，dが実数解をもつかどうかが決まる。

すなわち，$T_G=\dfrac{\rho Sg}{R}\left(\dfrac{d_B}{2}\right)^2$　（答）

(c)

点P_1の両側とも，dの増減と上向きに押す力F_Uの増減が逆だから●。P_2の左側はdとF_Uは逆向きだから●，P_2の右側とP_3の両側はdとF_Uの向きが同じだから○。

したがって，P_3が安定な位置である。

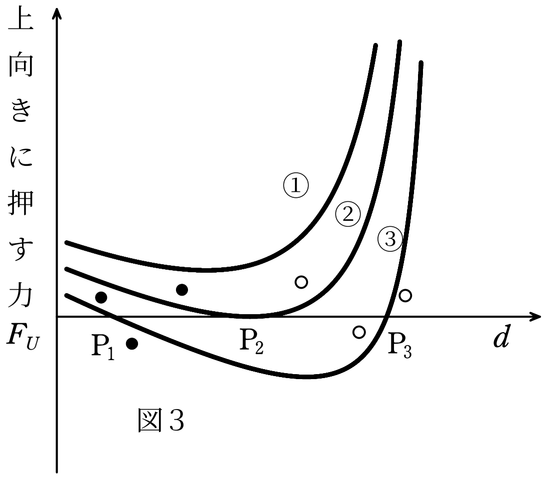

図３

(d)

P_3の液面からピストンまでの深さdは，①から

$d=\dfrac{d_B}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{d_B}{2}\right)^2-\dfrac{RT}{\rho Sg}}$　（答）

<解説>

問 (1)

　大気の圧力を無視するので，ピストンを押す力は（液体の圧力×ピストンの面積）である。

問 (2)(a)

　液面の高さによって，圧力と体積が決まることに注意する。両者を液面の高さdによって表し，dを消去すれば，pとVの関係が求まる。

(b)

　気体がなす仕事は$p-V$直線とV軸が囲む面積になることは，教科書を読んで確認しておこう。

　別解を示そう。

　液面の深さ$d=x$のとき，気体を押す力は$x\rho Sg$なので，気体がΔx膨張するときの仕事は $x\rho Sg\Delta x$。したがって，dがd_1からd_2まで変化したときした仕事は

$$W_G=\int_{d_2}^{d_1}\rho Sgxdx=\rho Sg\left[\frac{x^2}{2}\right]_{d_2}^{d_1}=\frac{1}{2}\rho Sg({d_1}^2-{d_2}^2)\quad（答）$$

　これは，当然ながら，$p-V$直線とV軸が囲む面積を求める積分になっている。

問(3)

(a)

　1モルの理想気体に対する状態方程式を用いる。

(b)

　理想気体がピストンを上向きに押す力と液体が下向きに押す力がつりあう条件はdの2次方程式になっている。dが重解をもつような温度がT_Gである。

　すなわち，方程式①の右辺＝0となる温度をT_Gとすれば，$T_G=\frac{\rho Sg}{R}\left(\frac{d_B}{2}\right)^2$で，

　　$T>T_G$では，右辺<0となり，　$F_U=0$となるdは存在しない。

　　$T=T_G$では，右辺＝0となり，　$F_U=0$となるdは，$d=\frac{d_B}{2}$と1個存在する。

　　$T_G<T$では，右辺>0となり，　$F_U=0$となるdは2個存在する。。

(c)

　つりあいの位置でのdの変化とF_Uの変化が同じ向きなら，その点にピストンは戻ろうとする。すなわち，dが増加することはピストンを押し下げようとするが，F_Uが増加するので，ピストンを押し上げようとする力が働く。dを減少させることはピストンを押し上げることだが，F_Uが減少するので，ピストンを押し下げる力が働く。そのような点はP_3のみである。

(d)

　P_3のdは方程式①の大きい方の解である。

<総評>

　一筋縄ではいかない歯ごたえのある問題が揃っている。しかし，手をこまねくというほど難解ではなく，物理過程に沿って誘導的に作成されているので，問題文をしっかり読んで，仮定や前提を頭に入れて，順にていねいに解いてゆけば対応できるだろう。

　また問題が長文であり，図やグラフによって表現されるので的確に問題を理解する力が前提となる。

また，解答においても図やグラフによって理解し，表現する力が必要である。

$\boxed{1}$ 力学の問題。この運動の全体像を頭の中に描くと良い。物体Aはばねによる単振動をしている。小球は重力の下で落下し，物体Aに弾性衝突をしてはねあがる。衝突するのは，物体Aが単振動の中心にあるときである。題意は簡明である。自由落下の運動については，スラスラ解けるようでありたい。難易度はB。

さて，解説で述べた，この問題の違和感について述べよう。図１を見て欲しい。小球は物体Aと弾性衝突をするのだが，最初の衝突では高さが9倍になる。ということは，位置のエネルギーが9倍になるということであり，衝突前後での運動エネルギーが9倍になるということでもある。

しかるに，2回目の衝突では，逆に高さが元へ戻る，つまり位置エネルギーは$\frac{1}{9}$になる。衝突前後の運動エネルギーも$\frac{1}{9}$になるということである。この小球のエネルギー変化は何によって起きるのだろうか。物体Aは単振動をしているので，運動エネルギーとばねの弾性エネルギーの和のエネルギーは変化しない。すると，この系の総エネルギーは衝突のたびごとに変化する。これは，エネルギー保存の法則に矛盾する。おかしい！ということになる。

この矛盾は，「物体Aの速度は衝突の影響を受けないものとする」との題意に基づいて，現象を計算しているためである。実際には，小球のエネルギーの増減は物体Aのエネルギーの減増になっているはずである。衝突前後の物体Aと小球の速度を弾性衝突のはねかえり係数と運動量保存の法則によって求めるようにすれば良い。

$\boxed{2}$ 発光ダイオードを含む回路と電磁誘導の問題。発光ダイオードの電気的特性は通常の半導体ダイオードと基本的には同じである。両端の電圧が特定の電圧以上になって，はじめて電流が流れる。電流が流れると発光するので，逆に発光によって，電流が流れているかを知ることができる。

問(3)は，このような発光ダイオードを含むコイルを磁場中において動かしたとき，電磁誘導による起電力と電流の発生を問うもので，目新しい。難易度はＢ。

$\boxed{3}$ 理想気体の状態変化に関する問題であるが，力学や2次方程式も絡み，なかなか歯ごたえのある問題である。ある特定の温度で気体の圧力と液体の圧力とがつりあうという問題設定である。安定なつりあい（安定な位置）と不安定なつりあいという考え方が出てくる。これについて，的確にイメージできるかが重要である。難易度はＡ。

111106