2011 (H23) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部･医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻･検査技術科学専攻）
･歯学部･薬学部･工学部･農学部

$\boxed{1}$　実数aに対し，不等式

$$y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$$

の表す座標平面上の領域を$D(a)$とおく。

(1)　$-1 \leqq a \leqq 2$を満たすすべてのaに対し$D(a)$の点となるような点$(p,\ q)$の範囲を図示せよ。

(2)　$-1 \leqq a \leqq 2$を満たすいずれかのaに対し$D(a)$の点となるような点$(p,\ q)$の範囲を図示せよ。

＜解答＞

(1)

$y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$を$a$について整理すると，$a^2 - 2(x+1)a + y - 2 \leqq 0$

$a^2 - 2(x+1)a + y - 2 = \{a - (x+1)\}^2 - (x+1)^2 - 2 + y \leqq 0$　①

ここで，$0 < y - (x+1)^2 - 2$　②　のとき，

①は成立しない。したがって，$y - (x+1)^2 - 2 \leqq 0$でなければならない。

そこで，$y - (x+1)^2 - 2 \leqq 0$　③

③が成立するとき，$a^2 - 2(x+1)a + y - 2 = 0$　④

は二つのaの解$\alpha_1(x,\ y)$，$\alpha_2(x,\ y)$をもち，

①を満たすには，$\alpha_1(x,\ y) \leqq a \leqq \alpha_2(x,\ y)$　⑤

$-1 \leqq a \leqq 2$　⑥

を満たすaが⑤を満たせば，⑤の$(x,\ y)$は$D(a)$の点である。そのためには，

$\alpha_1(x,\ y) \leqq -1$　⑦

$2 \leqq \alpha_2(x,\ y)$　⑧

④から，$\alpha_1(x,\ y) = (x+1) - \sqrt{(x+1)^2 + 2 - y}$，⑦に代入して整理すると，

$x + 2 \leqq \sqrt{(x+1)^2 + 2 - y}$，したがって，$y \leqq -2x - 1$　⑨

同様に，$\alpha_2(x,\ y) = (x+1) + \sqrt{(x+1)^2 + 2 - y}$，⑧に代入して整理すると，

$1 - x \leqq \sqrt{(x+1)^2 + 2 - y}$，したがって，$y \leqq 4x + 2$　⑩

以上の結果，$-1 \leqq a \leqq 2$を満たすすべてのaに対し$D(a)$の点となるような点$(p,\ q)$の範囲は，

⑨，⑩を同時に満たす図１に示す範囲である。

(2)

⑥を満たすaの一部が⑤に含まれれば，そのaを満たす$(x,\ y)$が$D(a)$の点となるような点$(p,\ q)$となる。そのためには，

$\alpha_1(x,\ y) \leqq -1 \leqq \alpha_2(x,\ y)$　⑪

$\alpha_1(x,\ y) \leqq 2 \leqq \alpha_2(x,\ y)$　⑫

のいずれかが，成立することである。

⑪に$\alpha_1(x, y)$，$\alpha_2(x, y)$を代入すると，

$$(x+1)-\sqrt{(x+1)^2+2-y} \leqq -1 \leqq (x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2-y}$$

すると，$y \leqq -2x-1$　⑬

⑫に$\alpha_1(x, y)$，$\alpha_2(x, y)$を代入すると，

$$(x+1)-\sqrt{(x+1)^2+2-y} \leqq 2 \leqq (x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2-y}$$

すると，$y \leqq 4x+2$　⑭

したがって，求める$D(a)$の点は⑬または⑭を満たす図に示す点である。

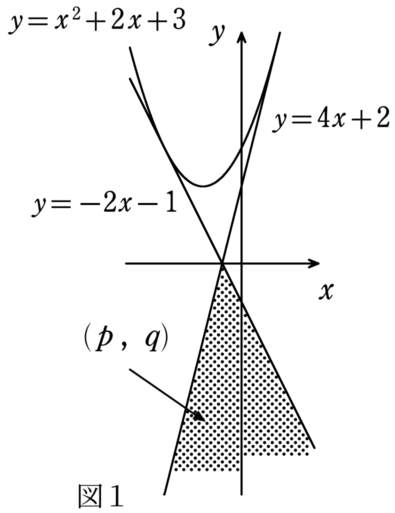

図１

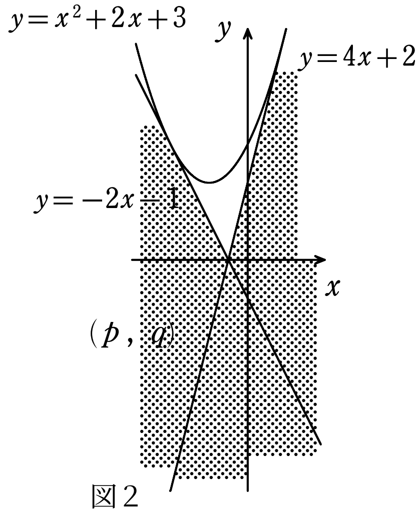

図２

＜解説＞

2次不等式が示す領域の問題で，簡単そうだが，案外戸惑うのではないか。$D(a)$，(p, q)などといういかにも数学的な表現が用いられ，(x, y)とはどういう関係なのか，題意を的確に掴むのに時間がかかるかも知れない。

与えられた不等式を満足する座標平面上の領域(x, y)はaによって決まるから，それを$D(a)$とし，$D(a)$の点を(p, q)と表現するというわけである。

(1)は$-1 \leqq a \leqq 2$を満たすすべてのaに対し$D(a)$，すなわち$y \leqq 2ax-a^2+2a+2$を満たす(x, y)はどうなるかということである。つまりは，$-1 \leqq a \leqq 2$のとき，$y \leqq 2ax-a^2+2a+2$を満たす(x, y)ということだ。まともに考えると難しい。aを-1から2まで変化させると不等式の領域はどう変わるか，ウーンということになる。

そこで，不等式をじっくり眺めてみる。すると，x，yの1次不等式であるが，aの2次不等式であることに気づく。ということは，不等式を満足するaの範囲がx，yによって決まるということだ，と気づく。そうなれば，$-1 \leqq a \leqq 2$がその中に入ってしまうような(x, y)が求める$D(a)$だということになる。こうして，解答の方針が決まる。

(2)の扱いは，(1)の方針が決まれば，容易だろう。$-1 \leqq a \leqq 2$の一部が，不等式を満足するaの範囲に入れば良いということになる。

ここまでくれば，後は計算である。複雑な式ではないので，難しくはないだろう。

$\boxed{2}$　aを実数とする。円Cは点$(a\,,\,-a)$で直線$y=-x$を接線にもち，点$(0\,,\,1)$を通るものとする。Cの中心を$\mathrm{P}(X\,,\,Y)$として，以下の問いに答よ。

(1)　X，Yをaを用いて表せ。

(2)　aが動くときの点Pの軌跡と直線$y=1$で囲まれる図形の面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

円の方程式を$(x-X)^2+(y-Y)^2=r^2$

これをxで微分すると，$2(x-X)+2(y-Y)\dfrac{dy}{dx}=0$，点$(a\,,\,-a)$で$\dfrac{dy}{dx}=-1$だから，

$(a-X)+(a+Y)=0$，$X-Y=2a$　①

また点$(a\,,\,-a)$を通るので，$(a-X)^2+(a+Y)^2=r^2$　②

点$(0\,,\,1)$を通るので，$X^2+(1-Y)^2=r^2$　③

①，②，③から，$X=a^2+2a+\dfrac{1}{2}$，$Y=a^2+\dfrac{1}{2}$　（答）

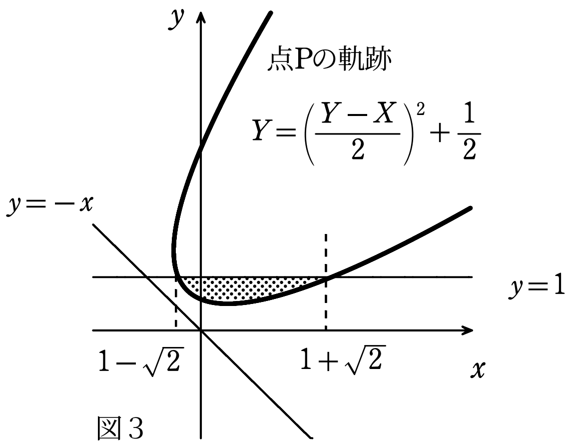

図３

(2)

(1)において，aを消去してX，Yの関係を求める。

$a=\dfrac{X-Y}{2}$　④，$Y=\left(\dfrac{Y-X}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$　⑤，⑤をYについて解くと，$Y=X+2\pm\sqrt{4X+2}$　⑥

$-\dfrac{1}{2}\leqq X$だから，$Y=X+2+\sqrt{4X+2}$は$Y=1$とは交わらない。$Y=X+2-\sqrt{4X+2}$は$Y=1$と，$X=1\pm\sqrt{2}$で交わる。図３に⑤などのグラフを示す。

点Pの軌跡と直線$y=1$で囲まれる図形の面積は

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(1-Y)dX=\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(1-X-2+\sqrt{4X+2})dX=\left[-\frac{X^2}{2}-X+\frac{1}{6}(4X+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$=-4\sqrt{2}+\frac{1}{6}\left\{(6+4\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}-(6-4\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}\right\}=-4\sqrt{2}+\frac{14}{3}\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$　（答）

ただし，$6+4\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})^2$，$6-4\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^2$だから，

$(6+4\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}=(2+\sqrt{2})(6+4\sqrt{2})=12+14\sqrt{2}+8=20+14\sqrt{2}$

$(6-4\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}=(2-\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})=12-14\sqrt{2}+8=20-14\sqrt{2}$

であることを用いた。

＜解説＞

題意は簡明である。計算を的確に進めること。

(1)

円の方程式を立てる。円上の点の条件，接線の条件から，中心(X,Y)が満たすべき条件を求める。

(2)

点Pの軌跡をグラフとして描くことが，見通しをつける上で重要だ。図３はこのソフトによって描いたグラフで，描くのは楽だ。試験の際にはそうはいかない。⑥で，$Y=X+2$と$Y=\pm\sqrt{4X+2}$を描いて，それを加え合わせて，描いてみるのが良いだろう。正確でなくて良いが，y軸や$y=1$との交点などを反映させ，全体として放物線を描けば，大きく外れることはない。日頃からグラフを大雑把に描いていれば役立つだろう。

上記では，YをXの式にして積分を実行した。

$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(1-Y)dX$を別の方法で求めてみよう。$Y=a^2+\frac{1}{2}$，$X=a^2+2a+\frac{1}{2}$だから，

$\frac{dX}{da}=2a+2$，$dX=2(a+1)da$，④から$X=1\pm\sqrt{2}$，$Y=1$のとき，$a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

したがって，積分の式は，

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(1-Y)dX=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}2\left(1-a^2-\frac{1}{2}\right)(a+1)da=2\left[-\frac{a^4}{4}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\quad\text{（答）}$$

$\boxed{3}$　先生と3人の生徒A，B，Cがおり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉3個，白玉7個，全部で10個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1の目が出たらAが，2または3の目が出たらBが，その他の目が出たらCが箱の中から1つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答よ。

ただし，サイコロの1から6の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　2回目の操作が終わったとき，Aが2個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(2)　2回目の操作が終わったとき，Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(3)　3回目の操作で，Cが赤玉を取り出す確率を求めよ。

＜解答＞

(1)

1回目でAが赤玉を手に入れる確率

＝（サイコロで1の目が出る確率）×（箱の中から赤玉を取り出す確率）$=\frac{1}{6}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{20}$

2回目でAが赤玉を手に入れる確率

＝（サイコロで1の目が出る確率）×（箱の中から赤玉を取り出す確率）$=\frac{1}{6}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{27}$

2回目の操作が終わったとき，Aが2個の赤玉を手に入れている確率

＝（1回目でAが赤玉を手に入れる確率）×（2回目でAが赤玉を手に入れる確率）

$=\frac{1}{540}$　（答）

(2)

1回目にBが赤玉を得る事象をBR1，2回目にBが赤玉を得る事象をBR2とする。
すると，少なくもBが赤玉を1個得る確率は

$P(BR)=P(BR1)+P(BR2)-P(BR1\cap BR2)$

図４にこの関係を示す。BR1∩BR2は1回目，2回目ともBが赤玉を得る事象である。

$P(BR1)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$

$P(BR2)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{45}+\frac{7}{90}=\frac{1}{10}$

上記右辺の第一項は1回目に赤玉が出た後にBが2回目に赤玉を得る確率，
第二項は1回目に白玉が出た後にBが2回目に赤玉を得る確率である。
P(BR1∩BR2)は1回目，2回目ともBが赤玉を得る確率だから，(1)を応用すると，

$P(BR1\cap BR2)=\left(\frac{2}{6}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{135}$

$P(BR)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{135}=\frac{26}{135}$

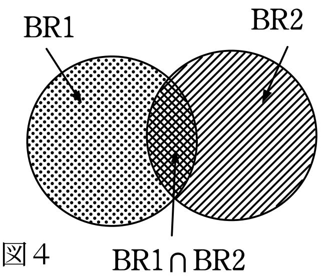

図４

(3)

2回の操作が終わったとき，玉は合計8個残っている。残りを（赤玉の数，白玉の数）とすれば，

（1，7）の確率$=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

（2，6）の確率$=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{7}{15}$

（3，5）の確率$=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{7}{15}$

3回目の操作で，Cが赤玉を取り出す確率$=\frac{1}{15}\times\frac{1}{8}\times\frac{3}{6}+\frac{7}{15}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{6}+\frac{7}{15}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{6}$

$=\frac{3}{20}$　（答）

＜解説＞

(1)

特に問題はなかろう。

(2)

いろいろな解法が考えられる。別解を示そう。

（別解ⅰ）

Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れるためには，赤玉（●）と白玉（○）が

（1回目，2回目）＝（●，●），（●，○），（○，●）のように出る必要がある。

Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れる確率

＝（●，●）のどちらかをBが得る確率

＋（●，○）の●をBが得る確率＋（○，●）の●をBが得る確率

（●，●）のどちらかをBが得る確率

＝（●，●）が出る確率×（1－AまたはCが●●を得る確率）

$$=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\left(1-\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\right)=\frac{1}{27}$$

（●，○）の●をBが得る確率$=\left(\frac{2}{6}\times\frac{3}{10}\right)\times\frac{7}{9}=\frac{7}{90}$

（○，●）の●をBが得る確率$=\frac{7}{10}\times\left(\frac{3}{9}\times\frac{2}{6}\right)=\frac{7}{90}$

Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れる確率$=\frac{1}{27}+\frac{7}{90}+\frac{7}{90}=\frac{26}{135}$　（答）

（別解ⅱ）

2回の操作で，Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率

＝1 －（2回の操作で赤玉を手に入れない確率）

Bが2回の操作で赤玉を手に入れない場合の組合せは

（1回目，2回目）＝（○，○），（○，×），（×，○），（×，×）

ここで，○は白玉を得ること，×は白玉も赤玉も得ないこと，である。

Bが（○，○）を得る確率$=\left(\frac{7}{10}\times\frac{2}{6}\right)\times\left(\frac{6}{9}\times\frac{2}{6}\right)=\frac{7}{135}$

Bが（○，×）を得る確率$=\left(\frac{7}{10}\times\frac{2}{6}\right)\times\frac{4}{6}=\frac{7}{45}$

Bが（×，○）を得る確率$=\frac{4}{6}\times\left(\frac{7}{10}\times\frac{2}{6}\right)=\frac{7}{45}$

Bが（×，×）を得る確率$=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$

$\frac{7}{270}+\frac{7}{45}+\frac{7}{45}+\frac{4}{9}=\frac{109}{135}$，したがって，

2回の操作で，Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率$=1-\frac{109}{135}=\frac{26}{135}$　（答）

(3)

当然に，事前状態によってCが赤玉を取り出す確率は異なる。事前状態は３あって，事前状態の確率

とそれぞれで赤玉を取り出す確率の積が，その事前状態での赤玉を取り出す確率である。３つの事前状態は排反事象だから，それらの確率の和がCが３回目に赤玉を取り出す確率となる。

$\boxed{4}$　平面上に長さ3の線分OAを考え，ベクトル$\overrightarrow{OA}$を$\vec{a}$で表す。$0<t<1$を満たす実数tに対して，$\overrightarrow{OP}=t\vec{a}$となるように点Pを定める。大きさ2のベクトル$\vec{b}$を$\vec{a}$と角$\theta$（$0<\theta<\pi$）をなすようにとり，点Bを$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$で定める。線分OBの中点をQとし，線分 AQと線分BPの交点をRとする。

　このとき，どのようにθをとっても$\overrightarrow{OR}$と$\overrightarrow{AB}$が垂直にならないようなtの値の範囲を求めよ。

<解答>

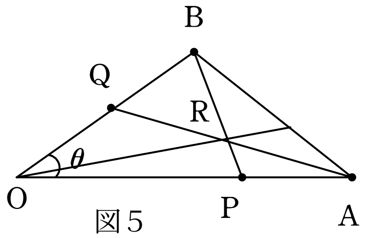

図５

図５を参照する。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\vec{a}+\vec{b}$　①

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}=\dfrac{\vec{b}}{2}+s\overrightarrow{QA}=\dfrac{\vec{b}}{2}+s\left(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OA}\right)$

$=\dfrac{\vec{b}}{2}+s\left(\dfrac{-\vec{b}}{2}+\vec{a}\right)=(1-s)\dfrac{\vec{b}}{2}+s\vec{a}$　②

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=t\vec{a}+r\overrightarrow{PB}=t\vec{a}+r\left(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}\right)=t\vec{a}+r\left(-t\vec{a}+\vec{b}\right)=(1-r)t\vec{a}+r\vec{b}$　③

ただし，$0<s<1$，$0<r<1$である。

②，③により，$(1-s)\dfrac{\vec{b}}{2}+s\vec{a}=(1-r)t\vec{a}+r\vec{b}$だから，$\{(1-r)t-s\}\vec{a}=(1-s-2r)\vec{b}$

したがって，$(1-r)t-s=0$，$1-s-2r=0$，$r=\dfrac{t-1}{t-2}$，これを③に代入すると，

$\overrightarrow{OR}=(1-r)t\vec{a}+r\vec{b}=\dfrac{t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{1-t}{2-t}\vec{b}$

したがって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OR}=\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\left(\dfrac{t}{2-t}\vec{a}+\dfrac{1-t}{2-t}\vec{b}\right)=\dfrac{6(2t-1)}{2-t}\cos\theta+\dfrac{4-13t}{2-t}$　④

④が0の場合に$\overrightarrow{OR}$と$\overrightarrow{AB}$が垂直になるので，0にならないtの範囲を求める。

$t=\dfrac{1}{2}$のとき，④$\neq0$だから，$t=\dfrac{1}{2}$であれば，$\overrightarrow{OR}$と$\overrightarrow{AB}$は垂直ではない。

$t\neq\dfrac{1}{2}$では，④は$\dfrac{6(2t-1)}{2-t}\left\{\cos\theta-\dfrac{13t-4}{6(2t-1)}\right\}$　⑤

しかるに$-1<\cos\theta<1$だから，$1\leqq\left|\dfrac{13t-4}{6(2t-1)}\right|$であれば，⑤は0になることはない。

$1\leqq\dfrac{13t-4}{6(2t-1)}$であれば，

$\dfrac{1}{2}<t$のとき，$12t-6\leqq13t-4$，$-2\leqq t$，したがって，$\dfrac{1}{2}<t<1$　⑥

$t<\dfrac{1}{2}$のとき，$13t-4\leqq12t-6$，$t\leqq-2$，解はない

$\dfrac{13t-4}{6(2t-1)}\leqq-1$であれば，

$\frac{1}{2}<t$のとき，$13t-4\leqq 6-12t$，$t\leqq\frac{2}{5}$，解はない

$t<\frac{1}{2}$のとき，$6-12t\leqq 13t-4$，$\frac{2}{5}\leqq t$，したがって，$\frac{2}{5}\leqq t<\frac{1}{2}$　⑦

⑥，⑦に$t=\frac{1}{2}$を加えて，求める範囲は，$\frac{2}{5}\leqq t<1$　（答）

＜解説＞

ベクトルが垂直にならない，とはどういうことか，まず考える。ベクトルが垂直になる条件は，内積が0になること，と教科書で学んだはずだ。すると，$\overrightarrow{OR}$と$\overrightarrow{AB}$の内積をtを含む式で表現し，0にならないようなtの範囲を求めよう，と解答の方針を定めることができるだろう。

図は簡単ですむはずだから，ていねいに図を描いて眺めてみよう。$\overrightarrow{AB}$は与えられた$\vec{a}$と$\vec{b}$によって表されることはすぐ分かる。$\overrightarrow{OR}$は△OPRと△OQRに着目すれば，$\vec{a}$と$\vec{b}$によって表現できそうだと見えてくるだろう。このとき，$0<s<1$，$0<r<1$なる変数によって，ベクトルの大きさを表現するのがコツであることを覚えておこう。その上で上手にs，rをtによって表現し，$\overrightarrow{OR}$と$\overrightarrow{AB}$の内積の式を求める。

$\{(1-r)t-s\}\vec{a}=(1-s-2r)\vec{b}$なる式では，異なるベクトルが等しいとは，係数が0でなければならないということである。これによって，s，rをtによって表現することができる。

θが$0<\theta<\pi$のいかなる値をとっても，内積が0にならないとは，を考えることが次の課題である。$\cos\theta$という形で表れるので，$-1<\cos\theta<1$のいかなる値でも内積が0にならない，ということである。不等式の問題になるので，ていねいに場合分けして考えていけば良い。

$\boxed{5}$　aを実数，zを0でない複素数とする。zと共役な複素数を$\overline{z}$で表す。

(1)　次を満たすzを求めよ。

$$z+1-\frac{a}{z}=0$$

(2)　次を満たすzが存在するようなaの範囲を求めよ。

$$\overline{z}+1-\frac{a}{z}=0$$

(3)　次を満たすzが存在するようなaの範囲を求めよ。

$$z(\overline{z})^2+\overline{z}-\frac{a}{z}=0$$

＜解答＞

(1)

$z+1-\frac{a}{z}=0$，$a=0$の場合，$z=-1$　（答）

$a\fallingdotseq 0$の場合，$z^2+z-a=0$，$z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$　（答）

(2)

$z=p+iq$とおく。ただしp, qは実数。

$\overline{z}+1-\dfrac{a}{z}=0$, $z\overline{z}+z-a=0$, $p^2+q^2+p+iq-a=0$, したがって$q=0$, かつ

$p^2+p-a=0$, pが実数解をもつには, $0\leqq\dfrac{1}{4}+a$, したがって, $-\dfrac{1}{4}\leqq a$ （答）

(3)

$z(\overline{z})^2+\overline{z}-\dfrac{a}{z}=0$, $z^2(\overline{z})^2+z\overline{z}-a=0$, $(z\overline{z})^2+z\overline{z}-a=0$, $(p^2+q^2)^2+p^2+q^2-a=0$

したがって, $a=(p^2+q^2)(p^2+q^2+1)$, $0<p^2+q^2$だから, $0<a$ （答）

＜解説＞

複素数の2次方程式に関する問題。一般に複素数は$z=p+iq$, p, qは実数として扱うことで, 実数演算と同様に扱える。共役な複素数は, $\overline{z}=\overline{p+iq}=p-iq$, となる。

$\boxed{6}$ 行列

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

の表す１次変換をfとする。fによる点P(1, 1)の像をP_1とする。正の整数nに対し, P_nのfによる像をP_{n+1}とする。P_nが点Q(10, 10)に最も近くなるときのnの値を求めよ。

＜解答＞

$P_n=(x_n, y_n)$とすれば, $f(P_n)=P_{n+1}$だから,

$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_n-y_n\\ 4x_n-y_n\end{pmatrix}$ となるので,

$x_{n+1}=3x_n-y_n$ ①

$y_{n+1}=4x_n-y_n$ ②

ただし, $n=0, 1, 2, \cdots$, $(x_0, y_0)=(1, 1)$である。

②−①により, $y_{n+1}=x_n+x_{n+1}$, したがって$y_n=x_{n-1}+x_n$, これを①に代入すると,

$x_{n+1}-x_n=x_n-x_{n-1}$, したがってx_nは等差数列となる。$x_0=1$, $x_1=3x_0-y_0=3-1=2$

したがって, $x_n=n+1$, $y_n=n+n+1=2n+1$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$

$\overrightarrow{OP_n}=\begin{pmatrix}n+1\\ 2n+1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}10\\ 10\end{pmatrix}$ だから, $\overrightarrow{P_nQ}=\begin{pmatrix}10-n-1\\ 10-2n-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-n\\ 9-2n\end{pmatrix}$

$\left(\overrightarrow{P_nQ}\right)^2=(9-n)^2+(9-2n)^2=5n^2-54n+162=5\left\{\left(n-\dfrac{27}{5}\right)^2+\dfrac{81}{25}\right\}$

P_nが点Qに最も近くなるときは, 右辺が最小になるときで, $n=5$ （答）

＜解説＞

１次変換fによって, 次々に点が定まる。点の座標列を数列とみて, 数列の一般項を求める。すなわ

ち，①，②を求めることができれば，半ば解けたといえるだろう。幸いx_n，y_nとも簡単な等差数列となっている。$\left(\overrightarrow{P_nQ}\right)^2$は$n$の２次式になるので，変形すれば，容易に最小値を与えるnを求めることができる。

＜総評＞

全体として易から難とバランス良く，問題が作成されている。題意が簡明な易しい問題を迅速に見つけて，完答できれば，落ち着いて続く問題に取り組むことができるだろう。読者の得意，不得意もあろうが，扱い易い問題から手をつけるとすれば，筆者の主観では，５，６，２，３，４，１の順であろうか。５，６，２は完答したい。３，４，１で半分以上の部分点を得れば，75点を確保できる。

問題をざっと見て，容易に解答方針が決まりそうな問題から手をつけるということだろう。

$\boxed{1}$ 2次不等式の問題。題意の的確な把握と解答方針の考慮に時間を要する。難易度Ａ－。

$\boxed{2}$ 題意は簡明な2次式の積分の問題。計算力が問われる。難易度Ｂ。

$\boxed{3}$ 2重の確率の問題，すなわちA，B，Cの誰が玉を出すか，出る玉が赤か白か。このため，求める場合を冷静に分類し，それぞれの確率を求めてゆくこと。多くの確率の問題がそうであるように，いろいろな考え方がある。難易度Ｂ＋。

$\boxed{4}$ 平面図形をベクトルによって扱う問題。不等式により変数の範囲を求める問題に帰着する。題意を具体課題に帰着することが大事。簡明のようで，そこがやや難しい。難易度Ａ－。

$\boxed{5}$ 複素数の2次方程式に関する問題。題意は簡明であり，完答したい。難易度Ｃ。

$\boxed{6}$ 行列による1次変換の問題。当然，その計算方法は理解していなければならない。数列の問題に帰着する。題意は簡明であり，計算も簡単な変換だから，完答したい。難易度Ｂ－。

111119

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

$\boxed{1}$ 以下の問いに答よ。

(1) 実数xに関する連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq -1 \\ 2\cdot 3^x + a3^{-x} \leqq 1 \end{cases}$$

が解をもつような実数aの範囲を求めよ。

(2) $x \geqq -1$を満たすすべての実数xに対し不等式

$$3^x + a3^{-x} \geqq a$$

が成り立つような実数aの範囲を求めよ。

＜解答＞

(1)

$2\cdot 3^x + a3^{-x} \leqq 1$，$X = 3^x$とおけば，

$$a \leqq 3^x - 2\cdot 3^{2x} = 3^x(1 - 2\cdot 3^x) = X(1-2X) = -2\left(X - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \quad ①$$

$x \geqq -1$だから，$X \geqq \dfrac{1}{3}$，①は$X = \dfrac{1}{3}$で最大値を$\dfrac{1}{9}$もつ。もし$a > \dfrac{1}{9}$ならば，①を満足する

$X \geqq \frac{1}{3}$，すなわち$x \geqq -1$の実数xは存在しない。逆に，$a \leqq \frac{1}{9}$ならば，$x \geqq -1$の実数xが存在する。したがって，$a \leqq \frac{1}{9}$　（答）

(2)

$3^x + a3^{-x} \geqq a$において，$X = 3^x$とおけば,

$3^x + a3^{-x} = X + \frac{a}{X} \geqq a$，$X \geqq \frac{1}{3}$だから，$X^2 - aX + a \geqq 0$　②

②を変形すると，$\left(X - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - a\right) \geqq 0$，したがって，$X \geqq \frac{1}{3}$に対して②が成立するには,

ⅰ)$\frac{a}{2} \leqq \frac{1}{3}$のとき

$X = \frac{1}{3}$のとき②の左辺は最小値になるので，②は，$\frac{1}{9} + \frac{2}{3}a \geqq 0$，$a \geqq -\frac{1}{6}$

したがって，$-\frac{1}{6} \leqq a \leqq \frac{2}{3}$

ⅱ)$\frac{1}{3} < \frac{a}{2}$のとき

$X = \frac{a}{2}$のとき②の左辺は最小値になるので，②は$\frac{a^2}{4} - a = a\left(\frac{a}{4} - 1\right) \leqq 0$

したがって，$0 \leqq a \leqq 4$，したがって，$\frac{2}{3} < a \leqq 4$

ⅰ，ⅱから，$-\frac{1}{6} \leqq a \leqq 4$　（答）

＜解説＞

題意は簡明であるが，数学的な思考力を問う良い問題と思える。(1)では，解をもつということはどういうことか，を表現しなければならない。ある不等式が解をもつ，とは不等式を満足する少なくも一つのxが存在するということである。(2)では，$x \geqq -1$のすべての実数xに対して不等式が成立するということは，(1)の解をもつ，とは違う。

その上で，計算では上手に変数変換をすることが必要である。

$\boxed{2}$　三角形OABの辺ABを1:2に内分する点をCとする。動点Dは$\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$ $(x \geqq 1)$を満たすとし，直線CDと直線OBの交点をEとする。

(1)　実数yを$\overrightarrow{OE} = y\,\overrightarrow{OB}$で定めるとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

(2)　三角形OABの面積をS，三角形ODEの面積をTとするとき，$\frac{S}{T}$の最大値と，そのときのxを求めよ。

＜解答＞

(1)

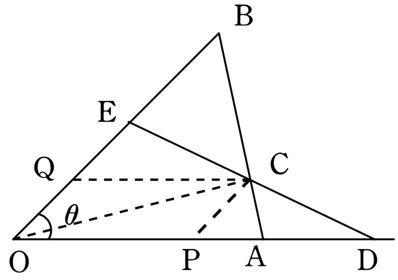

図１

図１において，DC:CE$=k:(1-k)$とする。

△OABについて，AC:CB=1:2だから，

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　①

△ODEについて，DC:CE$=k:(1-k)$だから，

$\overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OD}+k\overrightarrow{OE}=(1-k)x\overrightarrow{OA}+ky\overrightarrow{OB}$　②

①，②により，$(1-k)x=\dfrac{2}{3}$，$ky=\dfrac{1}{3}$，したがって$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3(1-k)+3k=3$

(2)

$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$，$T=\dfrac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\sin\theta=\dfrac{1}{2}x\mathrm{OA}\cdot y\mathrm{OB}\sin\theta$

$\dfrac{S}{T}=\dfrac{1}{xy}$，⑤より$xy=\dfrac{x+2y}{3}$，したがって$y=\dfrac{x}{3x-2}$，$xy=\dfrac{x^2}{3x-2}$，$\dfrac{1}{xy}=\dfrac{3x-2}{x^2}$

$f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2}$とおく。$f'(x)=-\dfrac{3}{x^3}\left(x-\dfrac{4}{3}\right)$だから，$x=\dfrac{4}{3}$で$f(x)$は最大値$f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{9}{8}$をとる。

以上によって，$\dfrac{S}{T}$の最大値は$\dfrac{9}{8}$　（答），そのとき$x=\dfrac{4}{3}$　（答）

＜解説＞

(1)

三角形の頂点を通るベクトルは，頂角をなす２つの辺のベクトルの和によって表されること，そのベクトルの係数は対辺を分ける比率によることを覚えておくことが大事である。忘れていても，図１を見れば思い出すようでありたい。この場合，CをDEの内分点として扱うために変数kを導入して計算することもコツである。

ベクトルを用いて図形が表現されているが，単に図形の問題と考えても良い。別解といえるほど，上記解法と異なるわけではないが，ベクトルを用いない解法を示そう。補助線が決めてとなる。この種の内分点，外分点などが関係する問題では，辺に平行な線を補助線として引いて，図形を視察すると，扱い方が見えてくる。

図１において，CからOA，OBに平行な直線を引いて，OA，OB，との交点をP，Qとする。

すると，$\mathrm{QC}=\dfrac{2}{3}\mathrm{OA}=(1-k)\mathrm{OD}=(1-k)x\,\mathrm{OA}$　③

一方，$\mathrm{PC}=\dfrac{1}{3}\mathrm{OB}=k\mathrm{OE}=ky\mathrm{OB}$　④

③から，$(1-k)x=\dfrac{2}{3}$，したがって，$\dfrac{2}{x}=3(1-k)$　⑤

④から$ky=\dfrac{1}{3}$，したがって，$\dfrac{1}{y}=3k$　⑥

⑤，⑥から，$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3(1-k)+3k=3$

(2)

(1)が求まれば，容易である。三角形の面積の公式を覚えておくこと。

$\dfrac{1}{xy}=\dfrac{3x-2}{x^2}=-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{x}-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{9}{8}\leqq\dfrac{9}{8}$として最大値$\dfrac{9}{8}$，そのとき$\dfrac{\sqrt{2}}{x}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$として$x=\dfrac{4}{3}$と求めることができる。

$\boxed{3}$ 先生と3人の生徒A，B，Cがおり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉3個，白玉7個，全部で10個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1の目が出たらAが，2または3の目が出たらBが，その他の目が出たらCが箱の中から1つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を2回続けて行うものとして以下の問いに答よ。

ただし，サイコロの1から6の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1) Aが2個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(2) Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

この問題は，理系の$\boxed{3}$(1)，(2)と基本的に同じである。問題文が理系では，「この操作を続けて行うものとして･･･」とあるのが，文系では「この操作を2回続けて行うものとして･･･」となっている。文系では(3)がなく，3回以降の操作が不必要なためである。

$\boxed{4}$ 放物線$y=x^2$の2本の接線l，mは垂直であるとする。

(1) lの接点の座標が$(a\,,\,a^2)$で与えられるとき，l，mの交点の座標をaを用いて表せ。

(2) l，mがy軸に関して対称なとき，l，mおよび放物線$y=x^2$で囲まれる部分の面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

$\dfrac{dy}{dx}=2x$だから，lの方程式は$y-a^2=2a(x-a)$ ①

mの接点を$(b\,,\,b^2)$とすれば，mの方程式は$y-b^2=2b(x-b)$ ②

しかるに，l，mは垂直なので，両直線の傾きの積は-1だから，$4ab=-1$ ③

①と②の交点は，$b=-\dfrac{1}{4a}$を用いて，

$x=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{4a^2-1}{8a}$，$y=ab=-\dfrac{1}{4}$ （答）

(2)

l，mがy軸に関して対称だから，$b=-a$，したがって③から，$a=\dfrac{1}{2}$または$-\dfrac{1}{2}$

$a=\dfrac{1}{2}$と$-\dfrac{1}{2}$とでは，①と②が入れ替わるだけだから，$a=\dfrac{1}{2}$の場合を考える。

lは①で，$y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}=x-\dfrac{1}{4}$，$m$は②で，$y=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}=-x-\dfrac{1}{4}$

交点の座標は$\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$

したがって，l，mおよび放物線$y=x^2$で囲まれる部分の面積は,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left\{x^2-\left(-x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left\{x^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{12}$$ （答）

＜解説＞

(1)

接線の傾き，直線の方程式，垂直の条件など，1次，2次関数の基礎的事項を理解していなければならない。

(2)

二つの線によって囲まれた領域の面積の求め方，2次関数の定積分などの基礎的事項を理解していなければならない。

＜総評＞

難易度からみると，私の感じでは，$\boxed{4}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ と易から難になる。$\boxed{4}$，$\boxed{1}$ は完答したい。

$\boxed{1}$ 指数関数の不等式の解を与える条件に関する問題。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$ 図形とベクトルの問題。解法には着想が必要だが，難しいものではない。難易度はＢ。

$\boxed{3}$ 確率の問題。確率独特の思考方式に慣れていないと，苦戦するかも知れない。難易度はＢ。

$\boxed{4}$ 2次関数の微分積分の基礎的な問題。題意は簡明であり，文系といえどもスムーズに解きたい。難易度はＣ。

111125