

# 2011 (H23) 年度 東北大学 前期入学試験 数学解説

前期：理学部・医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻・検査技術科学専攻）  
 ・歯学部・薬学部・工学部・農学部

読者からの指摘により，1の解答にミスがあったことが判明したので，全面的に修正した（2024年2月）。

1 実数  $a$  に対し，不等式

$$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$$

の表す座標平面上の領域を  $D(a)$  とおく。

- (1)  $-1 \leq a \leq 2$  を満たすすべての  $a$  に対し  $D(a)$  の点となるような点  $(p, q)$  の範囲を図示せよ。  
 (2)  $-1 \leq a \leq 2$  を満たすいずれかの  $a$  に対し  $D(a)$  の点となるような点  $(p, q)$  の範囲を図示せよ。

< 解答 >

(1)

$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$  を  $a$  について整理すると，

$$f(a) = a^2 - 2(x+1)a + y - 2 = \{a - (x+1)\}^2 - (x+1)^2 + y - 2 \leq 0$$

$-1 \leq a \leq 2$  を満たすすべての  $a$  に対し が成立  $\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 2$  における  $f(a)$  の最大値  $\leq 0$  したがって を満たす  $(x, y)$  の領域が  $D(a)$  の点となる  $(p, q)$  である。

$f(a)$  はそのグラフが下に凸の放物線だから， $-1 \leq a \leq 2$  における最大値は  $f(2)$  または  $f(-1)$

$$f(2) = y - 4x - 2, f(-1) = y + 2x + 1$$

( )  $y - 4x - 2 \geq y + 2x + 1$ ，すなわち  $x \leq -\frac{1}{2}$  のとき

$$f(a) \text{ の最大値} = f(a)_{\max} = f(2) = y - 4x - 2 \leq 0, \therefore y \leq 4x + 2, x \leq -\frac{1}{2}$$

( )  $y - 4x - 2 < y + 2x + 1$ ，すなわち  $-\frac{1}{2} < x$  のとき

$$f(a)_{\max} = f(-1) = y + 2x + 1 \leq 0, \text{ すなわち } y \leq -2x - 1, -\frac{1}{2} < x$$

以上によって， $D(a)$  の点となる点  $(p, q)$  は ， の領域で図1の打点部（境界線を含む）。

(2)

$-1 \leq a \leq 2$  を満たすいずれかの  $a$  に対し が成立  $\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 2$  における  $f(a)$  の最小値  $\leq 0$  したがって を満たす  $(x, y)$  の領域が  $D(a)$  の点となる  $(p, q)$  である。

$f(a)$  のグラフは軸が  $(x+1)$ ，頂点の  $y$  座標が  $\{-(x+1)^2 + y - 2\}$  の放物線

( )  $x+1 \leq -1$ ，すなわち  $x \leq -2$  のとき

$$f(a) \text{ の最小値} = f(a)_{\min} = f(-1) = y + 2x + 1 \leq 0, \therefore y \leq -2x - 1, x \leq -2$$

( )  $-1 < x+1 \leq 2$ ，すなわち  $-2 < x \leq 1$  のとき

$$f(a)_{\min} = f(x+1) = -(x+1)^2 + y - 2 \leq 0, \therefore y \leq (x+1)^2 + 2, -2 < x \leq 1$$

( )  $x+1 > 2$ , すなわち  $1 < x$  のとき

$$f(a)_{\min} = f(2) = y - 4x - 2 \leq 0, \therefore y \leq 4x + 2, 1 < x$$

以上によって,  $D(a)$  の点となる点  $(p, q)$  は , , の領域で図 2 の打点部 (境界線を含む)。

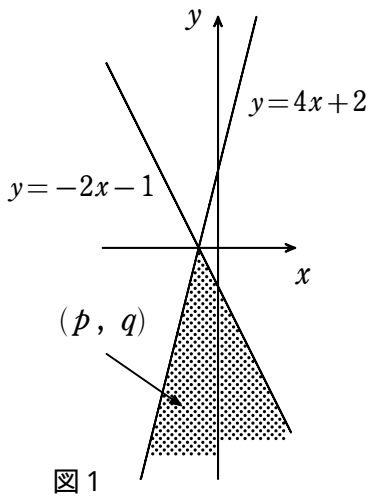


図 1

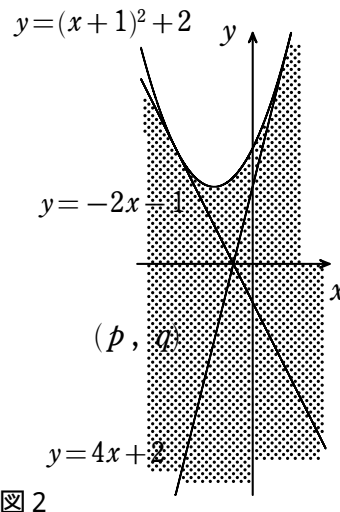


図 2

< 解説 >

2 次不等式が示す領域の問題で, 簡単そうだが, 案外戸惑うのではないか。  $D(a)$ ,  $(p, q)$  などといういかにも数学的な表現が用いられ,  $(x, y)$  とはどのような関係なのか, 題意を的確に掴むのに時間がかかるかも知れない。

与えられた不等式を満足する座標平面上の領域  $(x, y)$  は  $a$  によって決まるから, それを  $D(a)$  とし,  $D(a)$  の点を  $(p, q)$  と表現するというわけである。

(1) は  $-1 \leq a \leq 2$  を満たすすべての  $a$  に対し  $D(a)$ , すなわち  $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$  を満たす  $(x, y)$  を求めることである。つまりは,  $-1 \leq a \leq 2$  のとき,  $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$  を満たす  $(x, y)$  ということだ。まともに考えると難しい。  $a$  を  $-1$  から  $2$  まで変化させると不等式の領域はどう変わるか, ウーンということになる。

そこで, 不等式をじっくり眺めてみる。すると,  $x, y$  の 1 次不等式であるが,  $a$  の 2 次不等式であることに気づく。すると, (1) は  $-1 \leq a \leq 2$  のすべての  $a$  で 2 次不等式を満たす  $(x, y)$  の領域  $D(a)$  を求めるという問題に帰着する。そして の同値関係を着想すれば, 解答方針は定まる。

(2) は, 同じように  $-1 \leq a \leq 2$  のいずれかの  $a$  で 2 次不等式を満たす  $(x, y)$  の領域  $D(a)$  を求めるという問題に帰着する。そして を着想すれば, 解答は容易である。

2  $a$ を実数とする。円 $C$ は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち、点 $(0, 1)$ を通るものとする。 $C$ の中心を $P(X, Y)$ として、以下の問いに答よ。

- (1)  $X, Y$ を $a$ を用いて表せ。  
 (2)  $a$ が動くときの点 $P$ の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

< 解答 >

(1)

円の方程式を $(x - X)^2 + (y - Y)^2 = r^2$

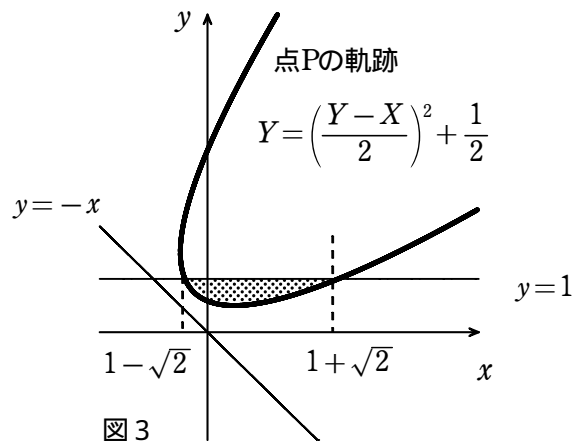
これを $x$ で微分すると、 $2(x - X) + 2(y - Y) \frac{dy}{dx} = 0$ 、点 $(a, -a)$ で $\frac{dy}{dx} = -1$ だから、

$(a - X) + (a + Y) = 0, X - Y = 2a$

また点 $(a, -a)$ を通るので、 $(a - X)^2 + (a + Y)^2 = r^2$

点 $(0, 1)$ を通るので、 $X^2 + (1 - Y)^2 = r^2$

、 から、 $X = a^2 + 2a + \frac{1}{2}, Y = a^2 + \frac{1}{2}$  (答)



(2)

(1)において、 $a$ を消去して $X, Y$ の関係を求める。

$a = \frac{X - Y}{2}, Y = \left(\frac{Y - X}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 、を $Y$ について解くと、 $Y = X + 2 \pm \sqrt{4X + 2}$

$-\frac{1}{2} \leq X$ だから、 $Y = X + 2 + \sqrt{4X + 2}$ は $Y = 1$ とは交わらない。 $Y = X + 2 - \sqrt{4X + 2}$ は

$Y = 1$ と、 $X = 1 \pm \sqrt{2}$ で交わる。図3に などのグラフを示す。

点 $P$ の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積は

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} (1 - Y) dX = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} (1 - X - 2 + \sqrt{4X + 2}) dX = \left[ -\frac{X^2}{2} - X + \frac{1}{6}(4X + 2)^{\frac{3}{2}} \right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$= -4\sqrt{2} + \frac{1}{6} \left\{ (6 + 4\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} - (6 - 4\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \right\} = -4\sqrt{2} + \frac{14}{3}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答})$$

ただし、 $6 + 4\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^2, 6 - 4\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^2$ だから、

$$(6+4\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}=(2+\sqrt{2})(6+4\sqrt{2})=12+14\sqrt{2}+8=20+14\sqrt{2}$$

$$(6-4\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}=(2-\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})=12-14\sqrt{2}+8=20-14\sqrt{2}$$

であることを用いた。

< 解説 >

題意は簡明である。計算を的確に進めること。

(1)

円の方程式を立てる。円上の点の条件，接線の条件から，中心 $(X, Y)$ が満たすべき条件を求める。

(2)

点Pの軌跡をグラフとして描くことが，見通しをつける上で重要だ。図3はこのソフトによって描いたグラフで，描くのは楽だ。試験の際にはそうはいかない。で， $Y=X+2$ と $Y=\pm\sqrt{4X+2}$ を描いて，それを加え合わせて，描いてみるのが良いだろう。正確でなくて良いが， $y$ 軸や $y=1$ との交点などを反映させ，全体として放物線を描けば，大きく外れることはない。日頃からグラフを大雑把に描いていれば役立つだろう。

上記では， $Y$ を $X$ の式にして積分を実行した。

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(1-Y)dX \text{ を別の方法で求めてみよう。 } Y=a^2+\frac{1}{2}, X=a^2+2a+\frac{1}{2} \text{ だから，}$$

$$\frac{dX}{da}=2a+2, dX=2(a+1)da, \text{ から } X=1\pm\sqrt{2}, Y=1 \text{ のとき， } a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって，積分の式は，

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(1-Y)dX = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2\left(1-a^2-\frac{1}{2}\right)(a+1)da = 2\left[-\frac{a^4}{4}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{答})$$

**3** 先生と3人の生徒A, B, Cがあり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉3個，白玉7個，全部で10個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1の目が出たらAが，2または3の目が出たらBが，その他の目が出たらCが箱の中から1つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答よ。

ただし，サイコロの1から6の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

- (1) 2回目の操作が終わったとき，Aが2個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (2) 2回目の操作が終わったとき，Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (3) 3回目の操作で，Cが赤玉を取り出す確率を求めよ。

< 解答 >

(1)

1回目でAが赤玉を手に入れる確率

$$= (\text{サイコロで1の目が出る確率}) \times (\text{箱の中から赤玉を取り出す確率}) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{20}$$

2回目でAが赤玉を手に入れる確率

$$= (\text{サイコロで1の目が出る確率}) \times (\text{箱の中から赤玉を取り出す確率}) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{27}$$

2回目の操作が終わったとき、Aが2個の赤玉を手に入れている確率

$$= (\text{1回目でAが赤玉を手に入れる確率}) \times (\text{2回目でAが赤玉を手に入れる確率}) \\ = \frac{1}{540} \quad (\text{答})$$

(2)

1回目にBが赤玉を得る事象をBR1, 2回目にBが赤玉を得る事象をBR2とする。

すると、少なくともBが赤玉を1個得る確率は

$$P(\text{BR}) = P(\text{BR1}) + P(\text{BR2}) - P(\text{BR1} \cap \text{BR2})$$

図4にこの関係を示す。BR1 ∩ BR2は1回目, 2回目ともBが赤玉を得る事象である。

$$P(\text{BR1}) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{BR2}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{45} + \frac{7}{90} = \frac{1}{10}$$

上記右辺の第一項は1回目に赤玉が出た後にBが2回目に赤玉を得る確率,

第二項は1回目に白玉が出た後にBが2回目に赤玉を得る確率である。

P(BR1 ∩ BR2)は1回目, 2回目ともBが赤玉を得る確率だから, (1)を応用すると,

$$P(\text{BR1} \cap \text{BR2}) = \left(\frac{2}{6} \times \frac{3}{10}\right) \times \left(\frac{2}{6} \times \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{135}$$

$$P(\text{BR}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{135} = \frac{26}{135}$$

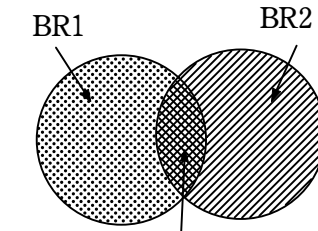


図4 BR1 ∩ BR2

(3)

2回の操作が終わったとき、玉は合計8個残っている。残りを(赤玉の数, 白玉の数)とすれば,

$$(1, 7) \text{ の確率} = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

$$(2, 6) \text{ の確率} = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$$

$$(3, 5) \text{ の確率} = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$$

$$\text{3回目の操作で, Cが赤玉を取り出す確率} = \frac{1}{15} \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{6} + \frac{7}{15} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{6} + \frac{7}{15} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{6} \\ = \frac{3}{20} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

(1)

特に問題はなかりょう。

(2)

いろいろな解法が考えられる。別解を示そう。

(別解 )

Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れるためには、赤玉( )と白玉( )が  
(1回目, 2回目) = ( , ), ( , ), ( , ) のように出る必要がある。

Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れる確率

$$= ( , ) \text{のどちらかをBが得る確率}$$

$$+ ( , ) \text{の をBが得る確率} + ( , ) \text{の をBが得る確率}$$

( , ) のどちらかをBが得る確率

$$= ( , ) \text{が出る確率} \times (1 - A \text{ または } C \text{ が を得る確率})$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \left(1 - \frac{4}{6} \times \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{27}$$

$$( , ) \text{の をBが得る確率} = \left(\frac{2}{6} \times \frac{3}{10}\right) \times \frac{7}{9} = \frac{7}{90}$$

$$( , ) \text{の をBが得る確率} = \frac{7}{10} \times \left(\frac{3}{9} \times \frac{2}{6}\right) = \frac{7}{90}$$

$$B \text{ が少なくとも1個の赤玉を手に入れる確率} = \frac{1}{27} + \frac{7}{90} + \frac{7}{90} = \frac{26}{135} \quad (\text{答})$$

(別解 )

2回の操作で、Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率

$$= 1 - (\text{2回の操作で赤玉を手に入れない確率})$$

Bが2回の操作で赤玉を手に入れない場合の組合せは

(1回目, 2回目) = (O, O), (O, X), (X, O), (X, X)

ここで、Oは白玉を得ること、Xは白玉も赤玉も得ないこと、である。

$$B \text{ が } (O, O) \text{ を得る確率} = \left(\frac{7}{10} \times \frac{2}{6}\right) \times \left(\frac{6}{9} \times \frac{2}{6}\right) = \frac{7}{135}$$

$$B \text{ が } (O, X) \text{ を得る確率} = \left(\frac{7}{10} \times \frac{2}{6}\right) \times \frac{4}{6} = \frac{7}{45}$$

$$B \text{ が } (X, O) \text{ を得る確率} = \frac{4}{6} \times \left(\frac{7}{10} \times \frac{2}{6}\right) = \frac{7}{45}$$

$$B \text{ が } (X, X) \text{ を得る確率} = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{7}{270} + \frac{7}{45} + \frac{7}{45} + \frac{4}{9} = \frac{109}{135}, \text{ したがって,}$$

$$2 \text{ 回の操作で, } B \text{ が少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率} = 1 - \frac{109}{135} = \frac{26}{135} \quad (\text{答})$$

(3)

当然に、事前状態によってCが赤玉を取り出す確率は異なる。事前状態は3あって、事前状態の確率

とそれぞれで赤玉を取り出す確率の積が、その事前状態での赤玉を取り出す確率である。3つの事前状態は排反事象だから、それらの確率の和がCが3回目に赤玉を取り出す確率となる。

- 4 平面上に長さ3の線分OAを考え、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\vec{a}$ で表す。 $0 < t < 1$ を満たす実数 $t$ に対して、 $\overrightarrow{OP} = t\vec{a}$ となるように点Pを定める。大きさ2のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ )をなすようにとり、点Bを $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ で定める。線分OBの midpointをQとし、線分AQと線分BPの交点をRとする。  
このとき、どのように $\theta$ をとっても $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直にならないような $t$ の値の範囲を求めよ。

< 解答 >

図5を参照する。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} = \frac{\vec{b}}{2} + s\overrightarrow{QA} = \frac{\vec{b}}{2} + s(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OA})$$

$$= \frac{\vec{b}}{2} + s\left(\frac{-\vec{b}}{2} + \vec{a}\right) = (1-s)\frac{\vec{b}}{2} + s\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = t\vec{a} + r\overrightarrow{PB} = t\vec{a} + r(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}) = t\vec{a} + r(-t\vec{a} + \vec{b}) = (1-r)t\vec{a} + r\vec{b}$$

ただし、 $0 < s < 1$ ,  $0 < r < 1$ である。

$$\therefore \text{により、} (1-s)\frac{\vec{b}}{2} + s\vec{a} = (1-r)t\vec{a} + r\vec{b} \text{ だから、} \{(1-r)t - s\}\vec{a} = (1-s-2r)\vec{b}$$

$$\text{したがって、} (1-r)t - s = 0, 1-s-2r = 0, r = \frac{t-1}{t-2}, \text{これを } s \text{ に代入すると、}$$

$$\overrightarrow{OR} = (1-r)t\vec{a} + r\vec{b} = \frac{t}{2-t}\vec{a} + \frac{1-t}{2-t}\vec{b}$$

$$\text{したがって、} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OR} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \left(\frac{t}{2-t}\vec{a} + \frac{1-t}{2-t}\vec{b}\right) = \frac{6(2t-1)}{2-t} \cos \theta + \frac{4-13t}{2-t}$$

が0の場合に $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直になるので、0にならない $t$ の範囲を求める。

$$t = \frac{1}{2} \text{ のとき、} \cos \theta \neq 0 \text{ だから、} t = \frac{1}{2} \text{ であれば、} \overrightarrow{OR} \text{ と } \overrightarrow{AB} \text{ は垂直ではない。}$$

$$t \neq \frac{1}{2} \text{ では、} \cos \theta = \frac{6(2t-1)}{2-t} \left\{ \cos \theta - \frac{13t-4}{6(2t-1)} \right\}$$

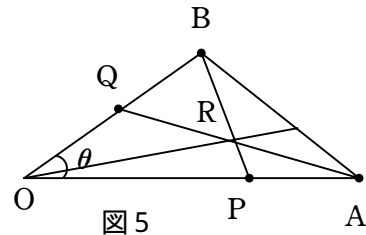
$$\text{しかるに} -1 < \cos \theta < 1 \text{ だから、} 1 \leq \left| \frac{13t-4}{6(2t-1)} \right| \text{ であれば、} \cos \theta \text{ は0になることはない。}$$

$$1 \leq \frac{13t-4}{6(2t-1)} \text{ であれば、}$$

$$\frac{1}{2} < t \text{ のとき、} 12t-6 \leq 13t-4, -2 \leq t, \text{したがって、} \frac{1}{2} < t < 1$$

$$t < \frac{1}{2} \text{ のとき、} 13t-4 \leq 12t-6, t \leq -2, \text{解はない}$$

$$\frac{13t-4}{6(2t-1)} \leq -1 \text{ であれば、}$$



$\frac{1}{2} < t$  のとき,  $13t - 4 \leq 6 - 12t$ ,  $t \leq \frac{2}{5}$ , 解はない

$t < \frac{1}{2}$  のとき,  $6 - 12t \leq 13t - 4$ ,  $\frac{2}{5} \leq t$ , したがって,  $\frac{2}{5} \leq t < \frac{1}{2}$

, に  $t = \frac{1}{2}$  を加えて, 求める範囲は,  $\frac{2}{5} \leq t < 1$  (答)

< 解説 >

ベクトルが垂直にならない, とはどういうことか, まず考える。ベクトルが垂直になる条件は, 内積が0になること, と教科書で学んだはずだ。すると,  $\overrightarrow{OR}$  と  $\overrightarrow{AB}$  の内積を  $t$  を含む式で表現し, 0にならないような  $t$  の範囲を求めよう, と解答の方針を定めることができるだろう。

図は簡単ですむはずだから, ていねいに図を描いて眺めてみよう。 $\overrightarrow{AB}$  は与えられた  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  によって表されることはすぐ分かる。 $\overrightarrow{OR}$  は  $\triangle OPR$  と  $\triangle OQR$  に着目すれば,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  によって表現できそうだと見えてくるだろう。このとき,  $0 < s < 1$ ,  $0 < r < 1$  なる変数によって, ベクトルの大きさを表現するのがコツであることを覚えておこう。その上で上手に  $s, r$  を  $t$  によって表現し,  $\overrightarrow{OR}$  と  $\overrightarrow{AB}$  の内積の式を求めよう。

$\{(1-r)t - s\}\vec{a} = (1-s-2r)\vec{b}$  なる式では, 異なるベクトルが等しいとは, 係数が0でなければならないということである。これによって,  $s, r$  を  $t$  によって表現することができる。

$\theta$  が  $0 < \theta < \pi$  のいかなる値をとっても, 内積が0にならないとは, を考えることが次の課題である。 $\cos \theta$  という形で表れるので,  $-1 < \cos \theta < 1$  のいかなる値でも内積が0にならない, ということである。不等式の問題になるので, ていねいに場合分けして考えていけば良い。

5  $a$  を実数,  $z$  を0でない複素数とする。 $z$  と共役な複素数を  $\bar{z}$  で表す。

(1) 次を満たす  $z$  を求めよ。

$$z + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(2) 次を満たす  $z$  が存在するような  $a$  の範囲を求めよ。

$$\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(3) 次を満たす  $z$  が存在するような  $a$  の範囲を求めよ。

$$z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$$

< 解答 >

(1)

$$z + 1 - \frac{a}{z} = 0, a=0 \text{ の場合, } z = -1 \quad (\text{答})$$

$$a \neq 0 \text{ の場合, } z^2 + z - a = 0, z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \quad (\text{答})$$



(2)

$z = p + iq$ とおく。ただし $p, q$ は実数。

$$\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0, z\bar{z} + z - a = 0, p^2 + q^2 + p + iq - a = 0, \text{したがって } q = 0, \text{かつ}$$

$$p^2 + p - a = 0, p \text{が実数解をもつには, } 0 \leq \frac{1}{4} + a, \text{したがって, } -\frac{1}{4} \leq a \quad (\text{答})$$

(3)

$$z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0, z^2(\bar{z})^2 + z\bar{z} - a = 0, (z\bar{z})^2 + z\bar{z} - a = 0, (p^2 + q^2)^2 + p^2 + q^2 - a = 0$$

$$\text{したがって, } a = (p^2 + q^2)(p^2 + q^2 + 1), 0 < p^2 + q^2 \text{だから, } 0 < a \quad (\text{答})$$

< 解説 >

複素数の2次方程式に関する問題。一般に複素数は $z = p + iq$ ,  $p, q$ は実数として扱うことで, 実数演算と同様に扱える。共役な複素数は,  $\bar{z} = \overline{p + iq} = p - iq$ , となる。

6 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

の表す1次変換を $f$ とする。 $f$ による点 $P(1, 1)$ の像を $P_1$ とする。正の整数 $n$ に対し, $P_n$ の $f$ による像を $P_{n+1}$ とする。 $P_n$ が点 $Q(10, 10)$ に最も近くなるときの $n$ の値を求めよ。

< 解答 >

$P_n = (x_n, y_n)$ とすれば, $f(P_n) = P_{n+1}$ だから,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n - y_n \\ 4x_n - y_n \end{pmatrix} \text{となるので,}$$

$$x_{n+1} = 3x_n - y_n$$

$$y_{n+1} = 4x_n - y_n$$

ただし, $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ である。

- により, $y_{n+1} = x_n + x_{n+1}$ , したがって $y_n = x_{n-1} + x_n$ , これを に代入すると,  
 $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$ , したがって $x_n$ は等差数列となる。 $x_0 = 1, x_1 = 3x_0 - y_0 = 3 - 1 = 2$   
したがって, $x_n = n + 1, y_n = n + n + 1 = 2n + 1 (n = 0, 1, 2, \dots)$

$$\overrightarrow{OP_n} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{だから, } \overrightarrow{P_nQ} = \begin{pmatrix} 10-n-1 \\ 10-2n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-n \\ 9-2n \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{P_nQ}|^2 = (9-n)^2 + (9-2n)^2 = 5n^2 - 54n + 162 = 5 \left\{ \left( n - \frac{27}{5} \right)^2 + \frac{81}{25} \right\}$$

$P_n$ が点 $Q$ に最も近くなるときは, 右辺が最小になるときで, $n = 5$  (答)

< 解説 >

1次変換 $f$ によって, 次々に点が定まる。点の座標列を数列とみて, 数列の一般項を求める。すなわ

ち, , を求めることができれば, 半ば解けたといえるだろう。幸い  $x_n, y_n$  も簡単な等差数列となっている。 $(\overrightarrow{P_n Q})^2$  は  $n$  の 2 次式になるので, 変形すれば, 容易に最小値を与える  $n$  を求めることができる。

< 総評 >

全体として易から難とバランス良く, 問題が作成されている。題意が簡明な易しい問題を迅速に見つけて, 完答できれば, 落ち着いて続く問題に取り組むことができるだろう。読者の得意, 不得意もあろうが, 扱い易い問題から手をつけるとすれば, 筆者の主観では, 5, 6, 2, 3, 4, 1 の順であろうか。5, 6, 2 は完答したい。3, 4, 1 で半分以上の部分点を得れば, 75 点を確保できる。

問題をざっと見て, 容易に解答方針が決まりそうな問題から手をつけるということだろう。

- ① 2 次不等式の問題。題意の的確な把握と解答方針の考慮に時間を要する。難易度 A -。
- ② 題意は簡明な 2 次式の積分の問題。計算力が問われる。難易度 B。
- ③ 2 重の確率の問題, すなわち A, B, C の誰が玉を出すか, 出る玉が赤か白か。このため, 求める場合を冷静に分類し, それぞれの確率を求めてゆくこと。多くの確率の問題がそうであるように, いろいろな考え方がある。難易度 B +。
- ④ 平面図形をベクトルによって扱う問題。不等式により変数の範囲を求める問題に帰着する。題意を具体課題に帰着することが大事。簡明のようで, そこがやや難しい。難易度 A -。
- ⑤ 複素数の 2 次方程式に関する問題。題意は簡明であり, 完答したい。難易度 C。
- ⑥ 行列による 1 次変換の問題。当然, その計算方法は理解していなければならない。数列の問題に帰着する。題意は簡明であり, 計算も簡単な変換だから, 完答したい。難易度 B -。

111119

修正にあたって

読者からの指摘により, ① の解答ミスが判明し, 解答を全面的に修正した。修正前の解法が適切でなかったこともあり, 解法そのものも改めた。10 年以上にわたって, 誤った解答を掲載しご迷惑をおかけしたことをお詫びする。

240216

前期: 文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

① 以下の問いに答よ。

(1) 実数  $x$  に関する連立不等式

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2 \cdot 3^x + a3^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

が解をもつような実数  $a$  の範囲を求めよ。

(2)  $x \geq -1$  を満たすすべての実数  $x$  に対し不等式

$$3^x + a3^{-x} \geq a$$

が成り立つような実数  $a$  の範囲を求めよ。

< 解答 >

(1)

$2 \cdot 3^x + a3^{-x} \leq 1$ ,  $X=3^x$ とおけば,

$$a \leq 3^x - 2 \cdot 3^{2x} = 3^x(1 - 2 \cdot 3^x) = X(1 - 2X) = -2\left(X - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$$

$x \geq -1$ だから,  $X \geq \frac{1}{3}$ , は  $X = \frac{1}{3}$  で最大値を  $\frac{1}{9}$  もつ。もし  $a > \frac{1}{9}$  ならば, を満足する

$X \geq \frac{1}{3}$ , すなわち  $x \geq -1$  の実数  $x$  は存在しない。逆に,  $a \leq \frac{1}{9}$  ならば,  $x \geq -1$  の実数  $x$  が存在す

る。したがって,  $a \leq \frac{1}{9}$  (答)

(2)

$3^x + a3^{-x} \geq a$ において,  $X=3^x$ とおけば,

$$3^x + a3^{-x} = X + \frac{a}{X} \geq a, X \geq \frac{1}{3} \text{ だから, } X^2 - aX + a \geq 0$$

を変形すると,  $\left(X - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - a\right) \geq 0$ , したがって,  $X \geq \frac{1}{3}$  に対して が成立するには,

)  $\frac{a}{2} \leq \frac{1}{3}$  のとき

$$X = \frac{1}{3} \text{ のとき の左辺は最小値になるので, は, } \frac{1}{9} + \frac{2}{3}a \geq 0, a \geq -\frac{1}{6}$$

$$\text{したがって, } -\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{2}{3}$$

)  $\frac{1}{3} < \frac{a}{2}$  のとき

$$X = \frac{a}{2} \text{ のとき の左辺は最小値になるので, は } \frac{a^2}{4} - a = a\left(\frac{a}{4} - 1\right) \leq 0$$

$$\text{したがって, } 0 \leq a \leq 4, \text{ したがって, } \frac{2}{3} < a \leq 4$$

$$\text{, から, } -\frac{1}{6} \leq a \leq 4 \text{ (答)}$$

< 解説 >

題意は簡明であるが, 数学的な思考力を問う良い問題と思える。(1)では, 解をもつということとはどういうことか, を表現しなければならない。ある不等式が解をもつ, とは不等式を満足する少なくとも一つの  $x$  が存在するということである。(2)では,  $x \geq -1$  のすべての実数  $x$  に対して不等式が成立するという事は, (1)の解をもつ, とは違う。

その上で, 計算では上手に変数変換をすることが必要である。

**[2]** 三角形OABの辺ABを1:2に内分する点をCとする。動点Dは  $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$  ( $x \geq 1$ ) を満たすとし, 直線CDと直線OBの交点をEとする。

(1) 実数  $y$  を  $\overrightarrow{OE} = y\overrightarrow{OB}$  で定めるとき, 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

- (2) 三角形OABの面積を $S$ ，三角形ODEの面積を $T$ とすると、 $\frac{S}{T}$ の最大値と、そのときの $x$ を求めよ。

< 解答 >

(1)

図1において、 $DC:CE=k:(1-k)$ とする。

$\triangle OAB$ について、 $AC:CB=1:2$ だから、

$$\vec{OC} = \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$$

$\triangle ODE$ について、 $DC:CE=k:(1-k)$ だから、

$$\vec{OC} = (1-k)\vec{OD} + k\vec{OE} = (1-k)x\vec{OA} + ky\vec{OB}$$

$$\text{, により, } (1-k)x = \frac{2}{3}, ky = \frac{1}{3}, \text{したがって } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3(1-k) + 3k = 3$$

(2)

$$S = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \theta, T = \frac{1}{2}OD \cdot OE \sin \theta = \frac{1}{2}xOA \cdot yOB \sin \theta$$

$$\frac{S}{T} = \frac{1}{xy}, \text{ より } xy = \frac{x+2y}{3}, \text{ したがって } y = \frac{x}{3x-2}, xy = \frac{x^2}{3x-2}, \frac{1}{xy} = \frac{3x-2}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x^2} \text{ とおく。 } f'(x) = -\frac{3}{x^3}\left(x - \frac{4}{3}\right) \text{ だから, } x = \frac{4}{3} \text{ で } f(x) \text{ は最大値 } f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{9}{8} \text{ をとる。}$$

$$\text{以上によって, } \frac{S}{T} \text{ の最大値は } \frac{9}{8} \text{ (答), そのとき } x = \frac{4}{3} \text{ (答)}$$

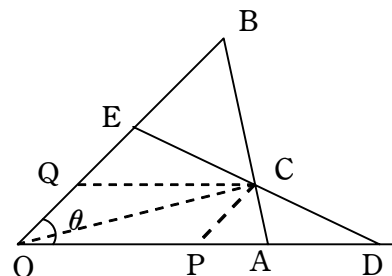


図1

< 解説 >

(1)

三角形の頂点を通るベクトルは、頂角をなす2つの辺のベクトルの和によって表されること、そのベクトルの係数は対辺を分ける比率によることを覚えておくことが大事である。忘れていても、図1を見れば思い出すようでありたい。この場合、CをDEの内分点として扱うために変数 $k$ を導入して計算することもコツである。

ベクトルを用いて図形が表現されているが、単に図形の問題と考えても良い。別解といえるほど、上記解法と異なるわけではないが、ベクトルを用いない解法を示そう。補助線が決めてとなる。この種の内分点、外分点などが関係する問題では、辺に平行な線を補助線として引いて、図形を視察すると、扱い方が見えてくる。

図1において、CからOA，OBに平行な直線を引いて、OA，OB，との交点をP，Qとする。

$$\text{すると, } QC = \frac{2}{3}OA = (1-k)OD = (1-k)xOA$$

$$\text{一方, } PC = \frac{1}{3}OB = kOE = kyOB$$

から,  $(1-k)x = \frac{2}{3}$ , したがって,  $\frac{2}{x} = 3(1-k)$

から  $ky = \frac{1}{3}$ , したがって,  $\frac{1}{y} = 3k$

, から,  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3(1-k) + 3k = 3$

(2)

(1)が求めれば, 容易である。三角形の面積の公式を覚えておくこと。

$\frac{1}{xy} = \frac{3x-2}{x^2} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{9}{8} \leq \frac{9}{8}$  として最大値  $\frac{9}{8}$ , そのとき  $\frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$  として  $x = \frac{4}{3}$  と求めることができる。

**3** 先生と3人の生徒A, B, Cがおり, 玉の入った箱がある。箱の中には最初, 赤玉3個, 白玉7個, 全部で10個の玉が入っている。先生がサイコロをふって, 1の目が出たらAが, 2または3の目が出たらBが, その他の目が出たらCが箱の中から1つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず, 取り出した生徒のものとする。この操作を2回続けて行うものとして以下の問いに答よ。ただし, サイコロの1から6の目の出る確率は等しいものとし, また, 箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

- (1) Aが2個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (2) Bが少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

この問題は, 理系の**3**(1), (2)と基本的に同じである。問題文が理系では, 「この操作を続けて行うものとして…」とあるのが, 文系では「この操作を2回続けて行うものとして…」となっている。文系では(3)がなく, 3回以降の操作が不必要なためである。

**4** 放物線  $y = x^2$  の2本の接線  $l, m$  は垂直であるとする。

- (1)  $l$  の接点の座標が  $(a, a^2)$  で与えられるとき,  $l, m$  の交点の座標を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $l, m$  が  $y$  軸に関して対称なとき,  $l, m$  および放物線  $y = x^2$  で囲まれる部分の面積を求めよ。

< 解答 >

(1)

$\frac{dy}{dx} = 2x$  だから,  $l$  の方程式は  $y - a^2 = 2a(x - a)$

$m$  の接点を  $(b, b^2)$  とすれば,  $m$  の方程式は  $y - b^2 = 2b(x - b)$

しかるに,  $l, m$  は垂直なので, 両直線の傾きの積は  $-1$  だから,  $4ab = -1$

と の交点は,  $b = -\frac{1}{4a}$  を用いて,

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{4a^2-1}{8a}, y = ab = -\frac{1}{4} \quad (\text{答})$$

(2)

$l, m$ が $y$ 軸に関して対称だから、 $b = -a$ 、したがって から、 $a = \frac{1}{2}$ または $-\frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ とでは、 と が入れ替わるだけだから、 $a = \frac{1}{2}$ の場合を考える。

$l$ は で、 $y = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = x - \frac{1}{4}$ 、 $m$ は で、 $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = -x - \frac{1}{4}$

交点の座標は $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

したがって、 $l, m$ および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積は、

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \left\{ x^2 - \left(-x - \frac{1}{4}\right) \right\} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ x^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right) \right\} dx$$
$$= \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

(1)

接線の傾き、直線の方程式、垂直の条件など、1次、2次関数の基礎的事項を理解していなければならない。

(2)

二つの線によって囲まれた領域の面積の求め方、2次関数の定積分などの基礎的事項を理解していなければならない。

< 総評 >

難易度からみると、私の感じでは、 $\boxed{4}$ 、 $\boxed{1}$ 、 $\boxed{2}$ 、 $\boxed{3}$ と易から難になる。 $\boxed{4}$ 、 $\boxed{1}$ は完答したい。

$\boxed{1}$  指数関数の不等式の解を与える条件に関する問題。難易度はB－。

$\boxed{2}$  図形とベクトルの問題。解法には着想が必要だが、難しいものではない。難易度はB。

$\boxed{3}$  確率の問題。確率独特の思考方式に慣れていないと、苦戦するかも知れない。難易度はB。

$\boxed{4}$  2次関数の微分積分の基礎的な問題。題意は簡明であり、文系といえどもスムーズに解きたい。

難易度はC。

111125