1 (50 点)

図1のように伸び縮みしない軽い糸におもりとして小さな玉をつけた振り子を2つ用意し，2つのおもりがそれぞれの最下点において同じ高さで左右に接触するように配置する。左側を振り子1，右側を振り子2とする。振り子1，振り子2のおもりをそれぞれおもり1，おもり2とし，重力加速度を g とする。

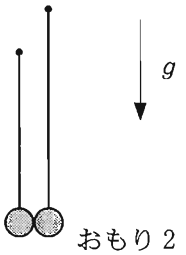

図1

2つのおもりは図の紙面内でのみ運動する。2つの振り子はおもりが衝突する以外，互いに干渉しない。振り子の振れは十分小さく，振り子の等時性が成り立つとする。空気抵抗は無視する。

〔A〕 まず，2つの振り子の糸の長さがどちらも L である場合(図2(i))を考える。おもり1，おもり2の質量をそれぞれ m_1，m_2，2つのおもりの間のはね返り係数を $e\,(0 < e < 1)$ とする。

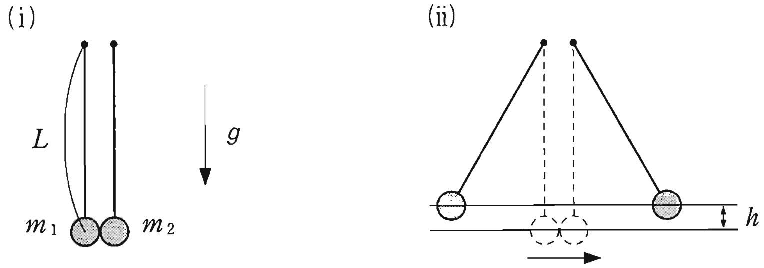

図2

両方のおもりを糸がたるまないように左右に引き離し，最下点からそれぞれ同じ高さ h だけ持ちあげ(図2(ii))静かに放すと，2つのおもりは最下点において衝突を繰り返した。

(a)　おもりを放してから最初に衝突するまでの時間 t_0 を求めよ。

(b)　1度目の衝突の直前のおもり1の速さ v を求めよ。

(c)　1度目の衝突の直後のおもり1とおもり2それぞれの速度 v_1' と v_2' を求めよ。ただし速度は図2(ii)に示すように右向きを正，左向きを負とする。解答には v を用いてよい。

(d)　4度目の衝突の直後のおもり1とおもり2それぞれの速度 v_1'' と v_2'' を求めよ。正負については(c)と同様に定義する。解答には v を用いてよい。

〔B〕　次に，振り子1の糸の長さは〔A〕と同じ L のままに保ち，振り子2はその周期が振り子1の2倍になるように糸を長さ $4L$ のものに取り替えた(図3(i))。さらに，2つのおもりを互いに弾性衝突($e=1$)するものに取り替えた。おもり1とおもり2の質量を M_1，M_2 とおく。おもり2が最下点で静止している状態で，おもり1だけを糸がたるまないように左側に動かして最下点からある高さまで持ちあげ(図3(ii))，時刻 $t=0$ に静かに放した。2つのおもりはその後，最下点のみで何回か衝突し，$t=10\,t_0$ において初めて元の状態($t=0$ に運動を開始した時の状態)に戻った。ただし t_0 は(a)で求めた時間である。

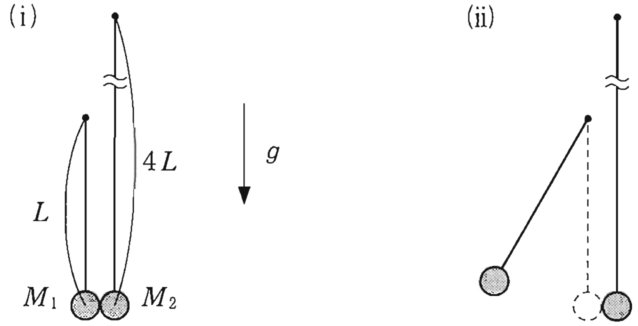

図3

(e)　時刻 $t=0$ におもり1を放してから，$t=10\,t_0$ において2つのおもりが元の状態に戻るまでの間に，2つのおもりが衝突した時刻を全て挙げよ。解答には t_0 を用いてよい。

(f)　おもりの質量の比 $\dfrac{M_1}{M_2}$ を求めよ。

2 (50 点)

単位長さあたりの抵抗が R で太さが無視できる針金を使って，図 1(i)のような回路を作る。図 1(i)の回路は半径 a の円と長さ $2a$ の線分からなっていて，円の中心を O，直径の両端を P，Q とする。点 O を座標の原点，また回路を含む平面を xy 平面とし，それに垂直な向きを z 軸とする。ここで，磁束密度 $\vec{B}=(0,\ 0,\ B)\,(B>0)$ の外部磁場を $y \leqq 0$ の領域のみに加える。回路は xy 平面内で点 O を中心に自由に回転できるとする。以下では回路自身の自己インダクタンスは無視する。次の問に答えよ。

〔A〕

(a) 図 1(ii)のように時刻 $t=0$ では回路上の点 P が座標 $(a,\ 0,\ 0)$ にあったとして，時刻 $t=0$ からこの回路を反時計回りに角速度 ω で回転させる。時刻 $t\left(0<t<\dfrac{\pi}{\omega}\right)$ に OQ 間に発生する誘導起電力の大きさ E を求めよ。ただし針金の抵抗による電圧降下は E には含めないこと。

以下の(b)—(f)の解答では，B を用いずに，(a)で求めた E を用いよ。

(b) 時刻 $t\left(0<t<\dfrac{\pi}{\omega}\right)$ に，回路を角速度 ω で回転させ続けるのには外から仕事をする必要がある。その仕事は単位時間あたりいくらか。E，R，a，ω のうち必要なものを用いて答えよ。

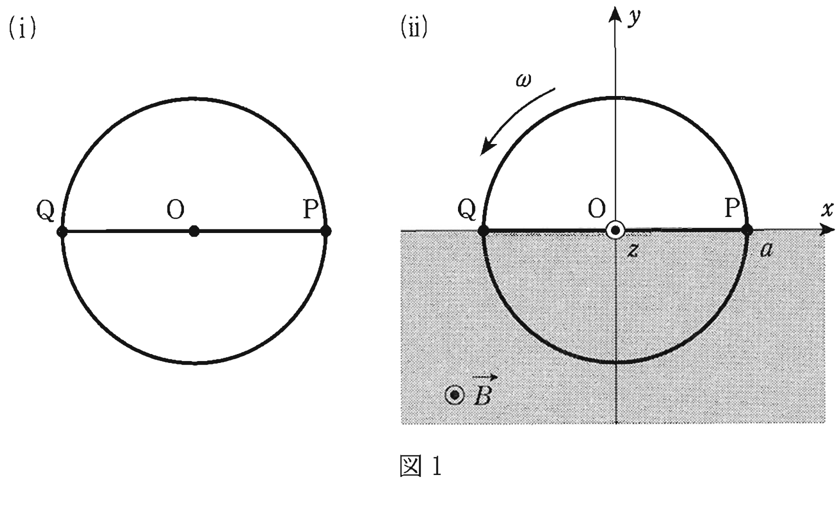

図 1

〔B〕 次に図2のように，この回路の直径PQと直交する方向の直径にも長さ $2a$ の同じ針金を渡して，点Oおよび両端で回路と接続する。この針金の端点を図2のようにR，Sと名づける。

(c) 図2のように時刻 $t=0$ では回路上の点Pが座標 $(a,\ 0,\ 0)$ にあったとして，時刻 $t=0$ からこの回路を反時計回りに角速度 ω で回転させる。点P，Q，R，S，Oでの電位をそれぞれ V_{P}，V_{Q}，V_{R}，V_{S}，V_{O} とおく。時刻 t が $0<t<\dfrac{\pi}{2\omega}$ の範囲のとき，これらの電位を大きい順に並べ，大小関係が分かるように＞，＝を用いて書け。
(解答例：$V_{\mathrm{P}}>V_{\mathrm{Q}}=V_{\mathrm{R}}=V_{\mathrm{S}}>V_{\mathrm{O}}$ など。)

(d) 時刻 $0<t<\dfrac{\pi}{2\omega}$ に針金OQをO→Qの向きに流れる電流 I_{OQ} はいくらか。E，R，a，ω のうち必要なものを用いて答えよ。

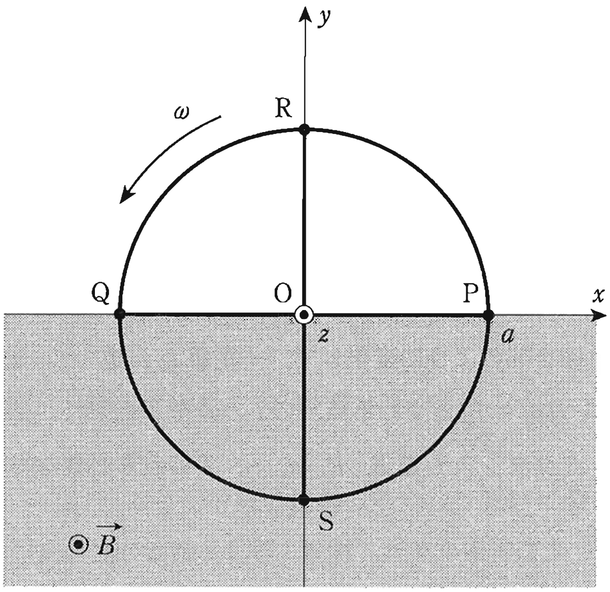

図2

〔C〕 今度は図1(i)の回路で，図3(i)のようにこの回路の中心Oに小さなコイルを挿入する。コイルを挿入する前後で，直径PQ間の抵抗は変化していないものとする。また，コイルと図1の回路全体の相互インダクタンスも無視する。外部磁場中でコイルが運動することによる電磁誘導は無視できるものとする。

次の問に答えよ。

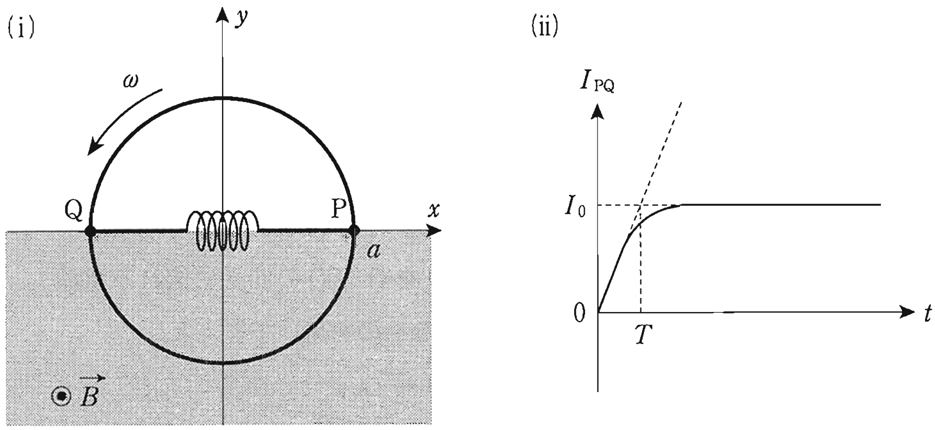

図3

(e) 図3(i)のように時刻$t=0$では回路が静止していて点Pが座標$(a,\ 0,\ 0)$にあったとして，時刻$t=0$からこの回路を反時計回りに角速度ωで回転させる。すると，コイルをP→Qの向きに流れる電流I_{PQ}は図3(ii)のように変化して，一定値I_0に近づく。$t=0$でのグラフの接線が，$I_{PQ}=I_0$と交わる点でのtの値をTとおく。このときコイルの自己インダクタンスLをE, R, a, ω, Tのうち必要なものを用いて答えよ。

(f) (e)でほぼ一定値 I_0 になった後しばらくすると，電流 I_{PQ} の符号が変化した。この変化のグラフとして最も適切なものを図4(ア)—(エ)の中から一つ選び，図中の時刻 t_1 および t_2 を E, R, a, ω, T のうち必要なものを用いて答えよ。なお図4(イ)—(エ)では，グラフの接線も点線で図中にかきこまれており，(イ)では $t = t_1$，(エ)では $t = t_2$，(ウ)では $I_{PQ} = 0$ となる時刻における接線である。またこのグラフは模式図であり，横軸のスケールは正確ではない。

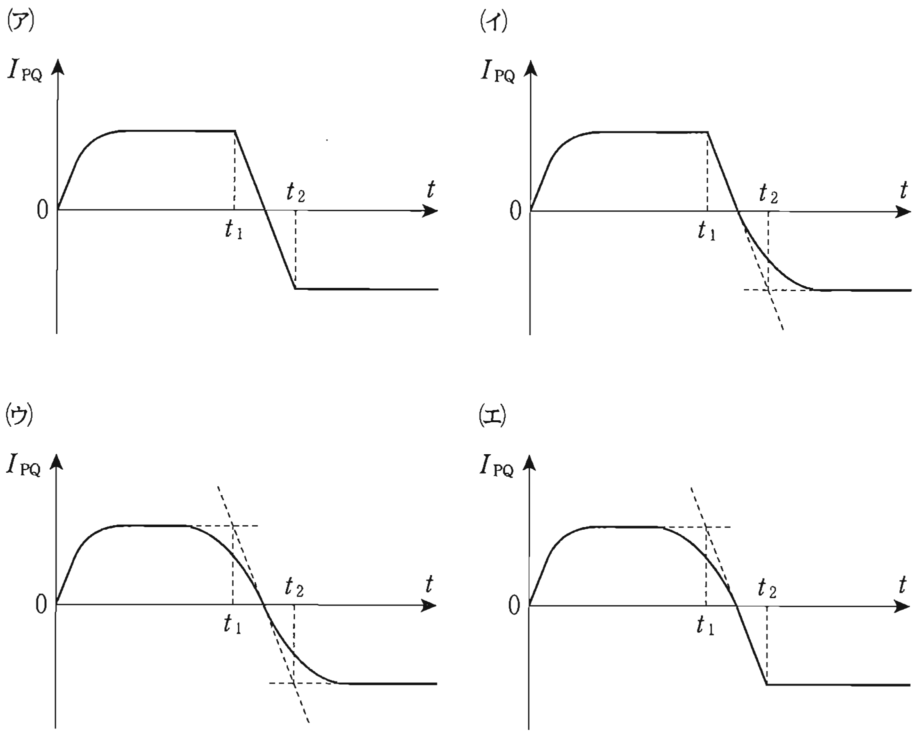

図4

3 (50 点)

図1のように，透明で一様な媒質中を音波が伝わっているところに光を入射させると，特定の入射の角度において，光の強い反射が観測される。これは音波によって生じる屈折率の変化のために，音波の各波面でわずかながら反射する光が互いに干渉し強めあうことによる。今，音波は z 軸方向に速さ w で進んでいるものとする。簡単のために，間隔 d(音波の波長)で並んでいる音波の波面(反射面)でだけ光の反射がおこり，光は速さ V で直進するものとする。波面以外の領域の屈折率は1であるとする。また反射面の厚みも無視できるものとする。

今，図1のように波長 λ の光を反射面に対して角度 θ で入射させたところ，反射面に対して角度 θ' の方向に，波長 λ' の光が強く反射するのが観測された。このとき，λ' は λ とは異なり，また θ' も θ とは異なっていた。その理由を以下で考えることにする。

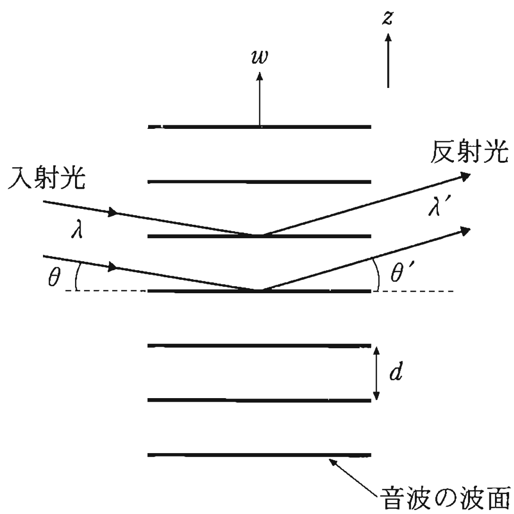

図1

(a) まず，一つの反射面における反射の法則を考えよう。以下の空欄にあてはまる数式を答えよ。

静止した鏡に光をあてると，入射の角度と反射の角度が等しくなることが知られている。これは，次のように理解することができる。図2のように，距離 x だけ離れて鏡面で反射する二つの光路を考える。入射の角度を θ，反射の角度を θ'，媒質の屈折率を1とすると，光路長の差は $\boxed{(ア)}$ (符号は問わない)で与えられる。入射光の波長 λ を用いて $\boxed{(ア)}$ を位相差に換算すると，$\boxed{(イ)}$ となる。二つの光が互いに強めあうためには，$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ として，位相差が $2\pi m$ になる必要がある。実際には，距離 x は様々な値をとる。いかなる x に対してもこの条件が成立するには，$m = 0$ である必要があり，$\theta = \theta'$ が導かれる。今の議論を音波による反射に適用してみよう。この場合，反射の法則は $\boxed{(ウ)}$ で与えられる。最初に述べたように，音波によって光が反射する際には，入射光の波長 λ と反射光の波長 λ' とが異なるため，θ と θ' も異なることになる。

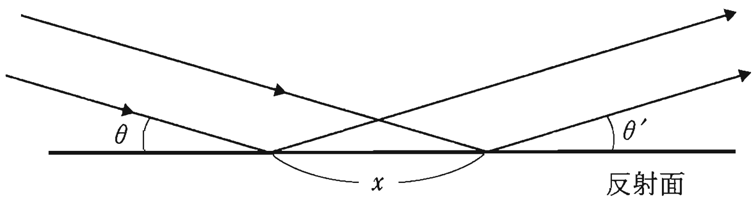

図2

(b) 次に，隣りあう反射面で反射する光の干渉について考えよう。

等間隔 d で並んだ隣りあう反射面で反射する光が，互いに強めあうように干渉すると，強い反射光が観測される。反射した光が干渉によって強めあうためには，隣りあう2つの反射面に入射し反射した光波の位相差が，一般には 2π の整数倍になることが必要である。しかし，音波によって光が強く反射するのは，位相差が 2π の場合だけであることがわかっている。このことを考慮して，隣りあった反射面からの反射光が干渉によって強めあうための条件を，d，λ，λ'，θ，θ' を用いて表せ。

(c)　入射光の波長 λ と反射光の波長 λ' とが異なっているのは，実は反射面が動いていることによるドップラー効果のためである。具体的には，w が V に比べて十分小さい今のような状況では，$\dfrac{\lambda'}{\lambda} = \dfrac{V - w \sin \theta'}{V + w \sin \theta}$ なる式が成立することがわかっている。この式と(b)の結果とから，反射光と入射光の振動数の差が音波の振動数に等しいことを導け。

(d)　図 3 のように，音波によって強く反射した光を鏡に入射させた。鏡の角度を適度に調整したところ，折り返された光が音波によって再度強く反射するのが観測された。再度強く反射した光に関する記述として，正しいものを選べ。

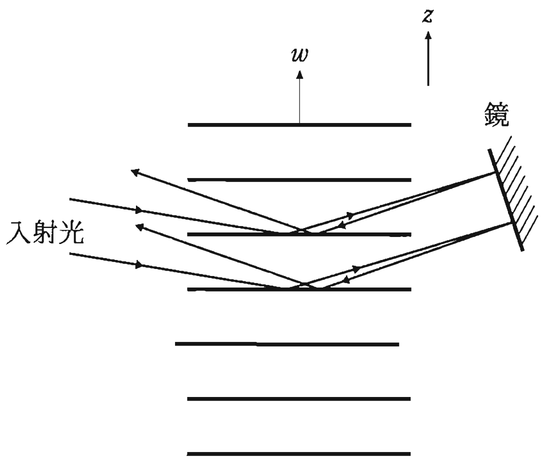

図 3

音波に対して左側から照射している入射光の振動数に対して，再度強く反射した光の振動数は

(あ)　変化しない。

(い)　音波の振動数だけ高くなる。

(う)　音波の振動数だけ低くなる。

(え)　音波の振動数の 2 倍だけ高くなる。

(お)　音波の振動数の 2 倍だけ低くなる。