

1 (50点)

&lt; 解答 &gt;

[A]

(a)

おもりの水平方向の変位を  $x$  , 糸の垂直方向からの変位角度を  $\theta$  とすれば ,  
おもりの運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = -m_1 g \sin \theta = -m_1 g \frac{x}{L}$$

これは単振動の式で ,  $x = A \cos \omega t$  とおくことができる。

$$\text{すると } A \omega^2 \cos \omega t = \frac{g}{L} A \cos \omega t , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

二つのおもりが衝突するのは ,  $x = 0$  すなわち ,  $\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$  だから ,

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (\text{答})$$

(b)

衝突直前に , おもりは  $h$  だけ降下しているのだから , エネルギー保存の法則により ,

$$\frac{m_1 v^2}{2} = m_1 g h , \quad v = \sqrt{2gh} \quad (\text{答})$$

(c)

衝突直前のおもり2の速さは ,  $v_2 = -\sqrt{2gh} = -v$

運動量保存の法則により ,  $m_1 v + m_2 v_2 = (m_1 - m_2)v = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

$$\text{はね返りの公式により , } e = \left| \frac{v_1' - v_2'}{v - v_2} \right| = \frac{-v_1' + v_2'}{2v}$$

~ により ,

$$v_1' = \frac{\{(m_1 - m_2) - 2em_2\}v}{m_1 + m_2} , \quad v_2' = \frac{\{(m_1 - m_2) + 2em_1\}v}{m_1 + m_2} \quad (\text{答})$$

(d)

衝突は最下点で繰り返され , 衝突直後の速さは次の衝突では , 向きは逆になるので ,  
 $n$  度目の衝突後の速さを ,  $v_1^{(n)} , v_2^{(n)}$  とすれば , 運動量の保存の法則により ,

$$1 \text{ 度目の衝突で , } m_1 v_1^{(1)} + m_2 v_2^{(1)} = m_1 v_1^{(0)} + m_2 v_2^{(0)} = (m_1 - m_2)v$$

$$2 \text{ 度目の衝突で , } m_1 v_1^{(2)} + m_2 v_2^{(2)} = -(m_1 v_1^{(1)} + m_2 v_2^{(1)})$$

$$3 \text{ 度目の衝突で , } m_1 v_1^{(3)} + m_2 v_2^{(3)} = -(m_1 v_1^{(2)} + m_2 v_2^{(2)})$$

$$4 \text{ 度目の衝突で , } m_1 v_1^{(4)} + m_2 v_2^{(4)} = -(m_1 v_1^{(3)} + m_2 v_2^{(3)})$$

$$= -(m_1 v_1^{(1)} + m_2 v_2^{(1)}) = -(m_1 - m_2)v$$

すなわち ,  $m_1 v_1'' + m_2 v_2'' = -(m_1 - m_2)v$

$$\text{はね返りの公式により, } e = \left| \frac{v_1^{(n)} - v_2^{(n)}}{v_1^{(n-1)} - v_2^{(n-1)}} \right|$$

はね返りの公式により,

$$e^4 = \left| \frac{v_1^{(1)} - v_2^{(1)}}{v_1^{(0)} - v_2^{(0)}} \right| \times \left| \frac{v_1^{(2)} - v_2^{(2)}}{v_1^{(1)} - v_2^{(1)}} \right| \times \left| \frac{v_1^{(3)} - v_2^{(3)}}{v_1^{(2)} - v_2^{(2)}} \right| \times \left| \frac{v_1^{(4)} - v_2^{(4)}}{v_1^{(3)} - v_2^{(3)}} \right|$$

$$= \left| \frac{v_1^{(4)} - v_2^{(4)}}{v_1^{(0)} - v_2^{(0)}} \right|, \quad v_1^{(0)} = v, \quad v_2^{(0)} = -v, \quad v_1^{(4)} = v_1'', \quad v_2^{(4)} = v_2'' \text{ だから,}$$

$$e^4 = \frac{-v_1'' + v_2''}{2v}$$

, を  $v_1'', v_2''$  について解くと,

$$v_1'' = \frac{\{(-m_1 + m_2) - 2e^4 m_2\}v}{m_1 + m_2}, \quad v_2'' = \frac{\{(-m_1 + m_2) + 2e^4 m_1\}v}{m_1 + m_2} \quad (\text{答})$$

[B]

(e)

おもりの周期は衝突によって変化しない。 $t_0$ はおもり1の単振動の周期の $\frac{1}{4}$ である。

おもり1と2が最下点のみで衝突するという事は、おもり1が1周期、2が半周期で衝突するという事である。最初の衝突は $t_0$ で起きるから、その後はおもり1の1周期、すなわち $4t_0$ ごとに衝突する。したがって、おもりが衝突した時刻は、

$$t_0, 5t_0, 9t_0 \quad (\text{答})$$

(f)

最初の衝突での運動量保存の法則は、 $M_1 v = M_1 v_1' + M_2 v_2'$

$$\text{はね返りの式は, } 1 = \left| \frac{v_1' - v_2'}{v} \right| = \frac{v_2' - v_1'}{v}$$

2度目の衝突前では、おもり1は右方向へ、おもり2は左方向へ動いているので、

運動量保存の法則は、 $M_1 v_1' - M_2 v_2' = -M_1 v_1'' + M_2 v_2''$

$$\text{はね返りの式は, } 1 = \left| \frac{-v_1'' - v_2''}{v_1' - (-v_2')} \right| = \frac{v_1'' + v_2''}{v_1' + v_2'}$$

3度目の衝突前では、おもり1は左方向へ、おもり2も左方向へ動いており、衝突の結果、おもり1は $-v$ 、おもり2は静止するので、

$$\text{はね返りの式は, } 1 = \left| \frac{-v}{-v_1'' - (-v_2'')} \right| = \frac{v}{v_2'' - v_1''}$$

$$\sim \text{ によって, } \frac{M_1}{M_2} = 3 \quad (\text{答})$$

< 解説 >

[A]

(a)

おもりの水平方向の変位を  $x$ 、糸の垂直方向からの変位角度を  $\theta$  とすれば、

おもりの円周方向に働く力は、 $F = m_1 \alpha = -m_1 g \sin \theta$

水平方向には， $F\cos\theta = m_1\alpha\cos\theta = -m_1g\sin\theta$ ， $\alpha\cos\theta = -g\sin\theta$

$\sin\theta = \frac{x}{L}$ として， $\alpha = \frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x}{L}$ ，これは単振動の式であり， $x = A\cos\omega t$ とおく

ことができる。すると $A\omega^2\cos\omega t = \frac{g}{L}A\cos\omega t$ ， $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

(b)

エネルギー保存の法則により， $h$ 降下したことによる位置エネルギーの低下がおもりの運動エネルギーになる。

(c)

振り子の単振動の最下点での速さはおもりの質量には依存しない。

おもり2の速さはおもり1の速さと同じになることに注意（向きは逆）。

運動量の保存の法則とはね返りの公式とから，衝突後の速さを求めることができる。

(d)

両振り子の糸の長さが同じなので，周期は同じ。したがって，二つのおもりは毎度，最下点で衝突を繰り返す。毎度の衝突で，運動量保存の法則とはね返りの式が成立する。

衝突後の速度は，次の衝突では，大きさが同じで向きが逆だから，運動量保存の法則の一般形は

$$m_1v_1^{(n)} + m_2v_2^{(n)} = -(m_1v_1^{(n-1)} + m_2v_2^{(n-1)})$$

となることに注意する。はね返りの式は絶対値を扱うので，負号を気にしなくて良い。

， 式は ， 式で $e$ を $e^4$ に， $(m_1 - m_2)$ を $-(m_1 - m_2)$ に変えたものだから，答は(c)の答で $e$ を $e^4$ に， $(m_1 - m_2)$ を $-(m_1 - m_2)$ に変えたものになっている。

[B]

(e)

おもりが最下点を通過するのは半周期に1度である。したがって，最下点で衝突するのは，おもり1が1周期，おもり2が半周期ごとになる。 $t_0$ はおもり1の単振動の周期の $\frac{1}{4}$ だから， $4t_0$ ごとに衝突することになる。

(d)

3度の衝突で初めの状態に戻るので，毎度の衝突における運動量保存の法則とはね返りの式によって，質量の比を求める。

$$， ， によって， $v_1' = v_1''$ ， $v_2' = v_2''$$$

$$， によって， $v_1' = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}v$ ， $v_2' = \frac{2M_1}{M_1 + M_2}v$$$

から， $M_1v_1' + M_1v_1'' = M_2v_2' + M_2v_2''$ だから， ， を代入して整理すると，

$$\frac{2M_1(M_1 - M_2)}{M_1 + M_2}v = \frac{4M_1M_2}{M_1 + M_2}v，M_1 - M_2 = 2M_2，したがって，\frac{M_1}{M_2} = 3$$

2 (50点)

< 解答 >

[A]

(a)

円形の針金のP点, Q点の中間の点をR点, S点とする。回転によって, 半円PRQを貫く磁束は増大する。時刻 $t$ で半円が含む磁束は,  $\phi_r = \frac{1}{2} \omega t a^2 B$ したがって,

$$\text{誘導起電力は, } E_r = -\frac{\Delta\phi_r}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \omega a^2 B$$

したがって, 誘導起電力の大きさは,  $E = |E_r| = \frac{1}{2} \omega a^2 B$  (答)

(b)

針金OQ間に誘導起電力による電圧 $E$ が発生するので, 針金の等価回路は図1のようになる。

図1では便宜上、抵抗記号の上に電圧記号を記載した。半円PRQの回路について, キルヒホッフの法則により,

$$E = I(aR + aR) + \pi aR \left(\frac{I}{2}\right) = (4 + \pi)aR \left(\frac{I}{2}\right)$$

$$I = \frac{2E}{(4 + \pi)aR}, \text{ したがって発生するジュール熱は } EI = \frac{2E^2}{(4 + \pi)aR}$$

これが単位時間あたりに失うエネルギーになるので, 単位時間あたりにする必要のある仕事は,  $\frac{2E^2}{(4 + \pi)aR}$  (答)

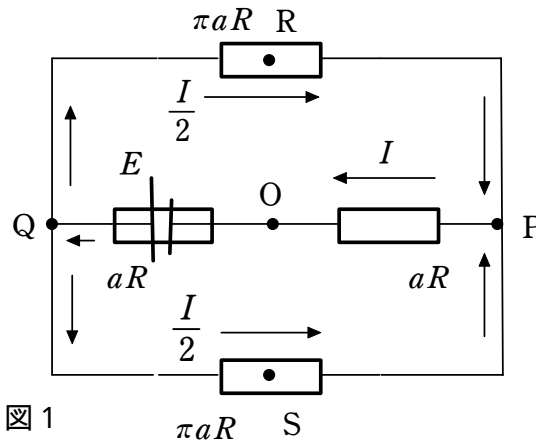


図1

[B]

(c)

閉じた回路OQRを横切る磁束が増大するので, 針金OQに誘導起電力が発生し, 図2に示すように電流が流れる。したがって,  $V_O < V_R < V_Q$

同様に, 回路OPSを横切る磁束が減少するので, 針金OSに誘導起電力が発生し, 図2に示すように電流が流れる。したがって,  $V_O < V_P < V_S$

針金OQとOSに発生する起電力は同じだから, , によって,

$$V_O < V_P = V_R < V_S = V_Q$$

(d)

OQ間の誘導起電力は $E$ ，閉回路OQRの抵抗は $\left(a + \frac{\pi}{2}a + a\right)R = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)aR$

したがって，OからQの向きに流れる電流は， $I_{OQ} = \frac{2E}{(4 + \pi)aR}$  (答)

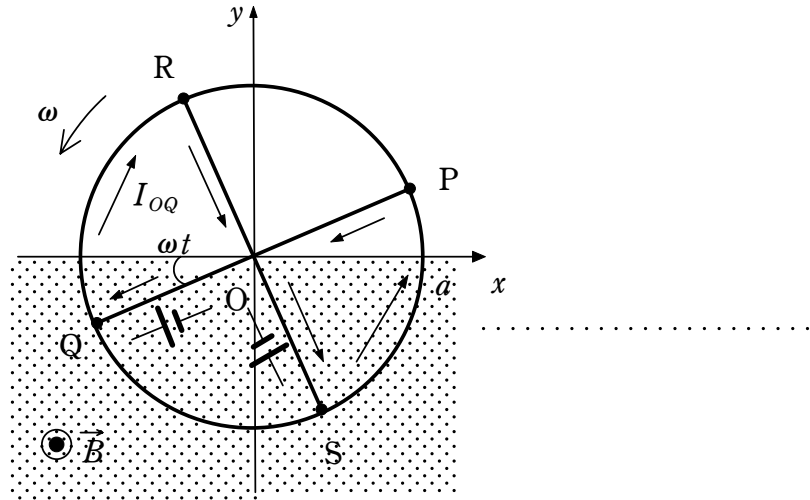


図 2

[C]

(e)

コイルによる逆起電力を $E_c$ とすれば，図3の半円PRQの回路について，キルヒホッフの法則により，

$$E + E_c = (4 + \pi)aR \left( \frac{I_{PQ}}{2} \right), \text{ しかるに, } E_c = -L \frac{\Delta I_{PQ}}{\Delta t} \text{ だから,}$$

$$E - L \frac{\Delta I_{PQ}}{\Delta t} = (4 + \pi)aR \left( \frac{I_{PQ}}{2} \right), t \rightarrow 0 \text{ の極限では,}$$

$$\frac{\Delta I_{PQ}}{\Delta t} = \frac{I_0}{T}, I_{PQ} = 0 \text{ だから, } E - \frac{I_0}{T} L = 0$$

しかるに $I_0$ は[A](b)の $I$ だから， $I_0 = \frac{2E}{(4 + \pi)aR}$

したがって， $L = \frac{T}{I_0} E = \frac{(4 + \pi)aRT}{2}$  (答)

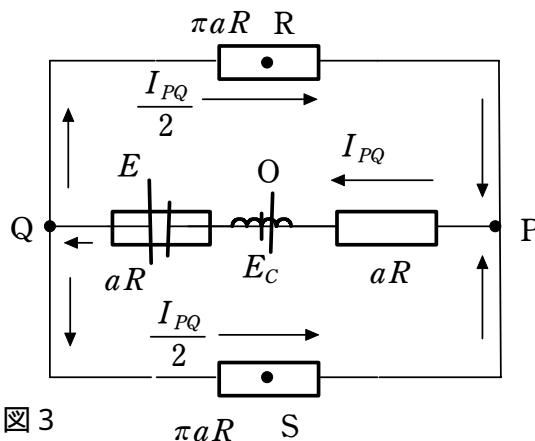


図 3

(f)

(イ) (答)

針金が半円だけ回転して、点Qがx軸上に来るまでの時間だから、 $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$  (答)

点QとPがx軸上を通過する瞬間、針金OQには磁場が作用しなくなり、OPに作用するようになる。これまでとは逆のOからPに向かって誘導起電力が発生し、誘導電流が流れる。このとき、キルヒホッフの法則により、

$$-E + E_C = (4 + \pi)aR \left( \frac{I_{PQ}}{2} \right)$$

$$E_C = -L \frac{\Delta I_{PQ}}{\Delta t} = L \frac{2I_0}{t_2 - t_1}, \quad t \rightarrow +t_1 \text{の極限では, } I_{PQ} = I_0 \text{だから,}$$

$$-E + L \frac{2I_0}{t_2 - t_1} = (4 + \pi)aR \left( \frac{I_0}{2} \right) = E$$

$$L = \frac{T}{I_0} E \text{だから, } t_2 - t_1 = T, \quad t_2 = t_1 + T = \frac{\pi}{\omega} + T \quad (\text{答})$$

< 解説 >

[A]

(a)

磁場による誘導起電力を求める。考え方はいろいろあるが、教科書にあるように、半円の閉回路PQRを貫く磁束が増加することにより、誘導起電力が発生すると考える。一方で、起電力そのものは、磁場を横切る針金OQに発生する。磁場から電子に働くローレンツ力が起電力の原因だからである。

それでは、半円の閉回路PQSで磁束が減少することによる起電力の発生はどうなるのか、という疑問がわくであろう。こちらの誘導起電力も磁場による針金OQへの作用によるもので、閉回路PQSにも誘導電流が流れる。

(b)

電流発生によるジュール熱の消費に相当する仕事を行わなければならない。このジュール熱には閉回路PQRとPQSの両方の電流による寄与が含まれることは当然である。

[B]

(c)

閉回路OQRを横切る磁束が増大するので、針金OQに誘導起電力が発生する。同様に閉回路OPSを横切る磁束が減少するので、針金OSに誘導起電力が発生する。磁束の増減の大きさは両者同じなので、誘導起電力の大きさは同じである。

(d)

針金OQ, OSに発生する誘導起電力は、回転速度が同じなので、 $E$ である。

[C]

(e)

点Qが磁場内に入って、誘導電流が流れ始めると、コイルのインダクタンスにより、誘導電流を妨げる方向に電圧が発生する。したがって、誘導電流は一気に増加することができず、一定の電流になるまで、ある時間を要する(ここでは $T$ )。

時間変化する回路の厳密な取り扱い、高校物理の範囲を超えてしまうので、やや難しい。ここでは、瞬間的にもキルヒホッフの法則が成立するとして、閉回路について電圧と電流による電圧降下の関係を書き下して考える。電流変化の傾きは $t=0$ で与えられているのだから、 $t \rightarrow 0$ の極限でキルヒホッフの法則がどうなるかを考える。

問題文で、「 $t=0$ でのグラフの接線が」という記述から、 $t=0$ での関係式を使うのだなという直感が働くが良い。

(f)

図4のように点Qがx軸上に来るまでは、 $I_{PQ}$ は一定の電流 $I_0$ である。しかし、点Qがx軸上に来た瞬間、針金OQは磁場を横切らなくなるので、起電力は発生しなくなる。一方、点Pはx軸上に来るから、図4'のように針金OPが磁場を横切るようになり、OP方向に電流を流すような起電力が発生する。このように、針金には逆方向の誘導電流が流れようとするが、コイルのインダクタンスがその変化を妨げるような誘導電流が発生する。したがって、 $I_{PQ}$ は瞬間的に正から負に変化することはできない。ある短い時間で正から負に変化してゆく。以上の考察によれば、 $I_{PQ}$ を表すグラフは(イ)である。

(e)と同様に、OP方向に電流を流すような起電力が発生する瞬間(時刻 $t=t_1$ )の閉回路PQRのキルヒホッフの法則を書き下す。そして、電流変化の傾きは $t=t_1$ で与えられているのだから、 $t \rightarrow t_1$ の極限でどうなるかを考える。解答での $t \rightarrow +t_1$ は $t$ を正方向から $t_1$ に近づけるといふ意味である。

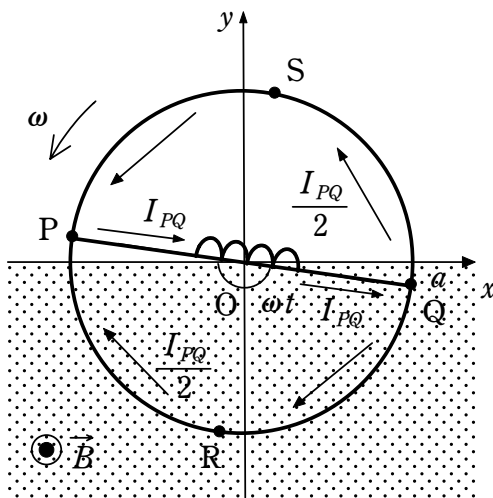


図4

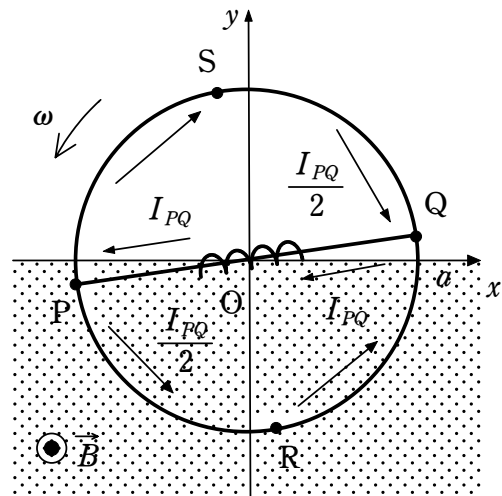


図4'

3 (50点)

< 解答 >

(a)

(ア)  $x(\cos \theta' - \cos \theta)$

(イ)  $\frac{2\pi}{\lambda} x(\cos \theta' - \cos \theta)$

$$(ウ) \frac{\cos \theta}{\lambda} = \frac{\cos \theta'}{\lambda'}$$

(b)

反射光が干渉によって強めあうための条件は光路長差による位相差が $2\pi$ だから、

$$2\pi \left( \frac{d \sin \theta}{\lambda} + \frac{d \sin \theta'}{\lambda'} \right) = 2\pi$$

$$\text{したがって、} \frac{d \sin \theta}{\lambda} + \frac{d \sin \theta'}{\lambda'} = 1 \quad (\text{答})$$

(c)

入射光と反射光の振動数を $f, f'$ とする。すると、

$$\lambda f = V, \lambda' f' = V, \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{f}{f'} = \frac{V - w \sin \theta'}{V + w \sin \theta}, (f' - f)V = (f \sin \theta + f' \sin \theta')w$$

$$\text{一方、} \frac{d \sin \theta}{\lambda} + \frac{d \sin \theta'}{\lambda'} = \frac{d}{V} (f \sin \theta + f' \sin \theta') = 1 \text{ だから、}$$

$$\text{反射光と入射光の振動数の差は、} f' - f = \frac{w}{V} (f \sin \theta + f' \sin \theta') = \frac{w}{d} \quad (\text{答})$$

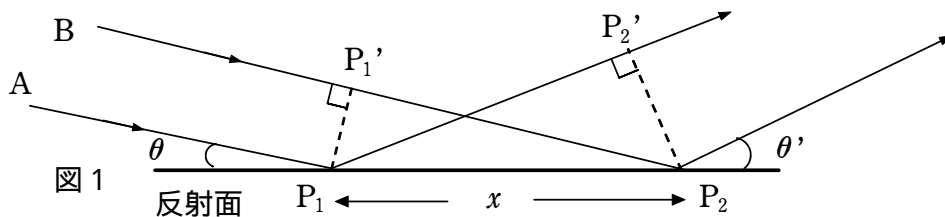
$w$ は音速、 $d$ は音波の波長だから、 $\frac{w}{d}$ は音波の振動数である。

(d) (え)

< 解説 >

(a)

図1を参照する。光線Aの入射点 $P_1$ から光線Bに垂線を下した点を $P_1'$ 、光線Bの入射点 $P_2$ から光線Aの反射光に垂線を下した点を $P_2'$ とする。 $P_1$ と $P_1'$ の光、 $P_2$ と $P_2'$ の光が重なり合うので、そこまでの光路長の差は $(P_1P_2' - P_1'P_2) = x \cos \theta' - x \cos \theta$ 。



(b)

図2において、 $P$ から光線に垂線を下した点を $P_1, P_2$ とする。光路長の差は $P_1Q + QP_2 = d \sin \theta + d \sin \theta'$ 、したがって干渉によって強めあうための条件は

位相差 $2\pi \left( \frac{d \sin \theta}{\lambda} + \frac{d \sin \theta'}{\lambda'} \right)$ が $2\pi$ になるときである。

(c)

問題文中で与えられた式を上手に変形すれば、容易に振動数の差が求まる。

(d)

光が左から入射しようが右から入射しようが、ドップラー効果は変わらない。音波の進行方向とは逆方向から入射し、進行方向に反射されるのだから、同様に振動数は音波の振動数だけ増加する。



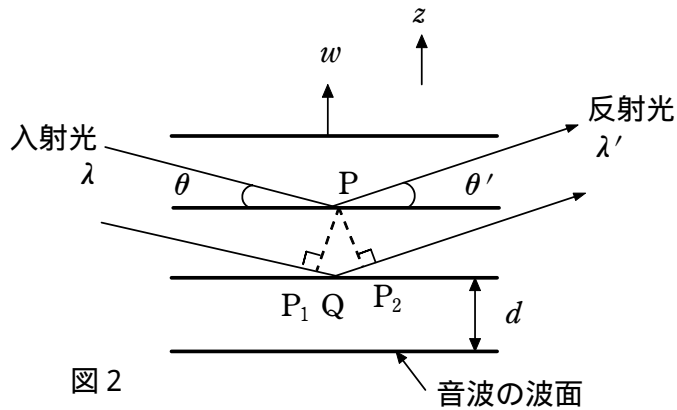


図 2

音波の波面

< 総評 >

物理の問題は、仮想的なモデルで物理現象を想定して、生起する物理量を算定するものである。したがって、モデルと現象およびその際の仮定が詳述される。問題文は長文になり、図やグラフも多用される。受験者は的確に題意を把握すべく問題文を読み込む必要がある。国語力が肝要なゆえんである。

加えて、解答中に考えが進まない難点にぶつかったときには、徒に考え込んで時間を空費してはならない。問題文に立ち返って、読み込みミスや理解ミスがないか、解答のヒントが書かれていないかなど、再確認することが大事である。

3問とも、なかなか難しい問題を含んでいる。基本をしっかりと理解した上で、応用力が問われる。しかし、問題は誘導的に作成されているので、前後の問題が相互にヒントになるので、一見難しくても、落ち着いて取り組めば、完答は難しくても、高得点は可能であろう。

①

題意は簡明なのだが、物理の本質に触れた難しい問題だと感じた。振り子の単振動について、的確に理解していないと、案外とまどうのではないかと。衝突における運動量保存の法則とはね返りの公式の理解も必要である。振り子の単振動の周期はおもりの重さや初期位置に関係しないこと（ただし、振り子の単振動は触れ角が十分小さいときに近似的に成立するので、厳密には関係する）を理解しておく必要がある。

[B](e)はおもり1が1周期、おもり2が半周期で衝突すると閃けば簡単なのだが、衝突がどのような状態で起きるのか、などと考えだすと迷路にはまってしまふ恐れがある。まずは、問題文をしっかりと読んで、題意を的確に把握することである。弾性衝突だから、エネルギーが保存されていることに注意する。

(f)では、 $t=10t_0$ で元の状態に戻ったということは、3度目の衝突の後 $t_0$ でに元に戻ったということである。したがって、 $t=10t_0$ では、おもり2は静止し、おもり1は初期の高さに戻ることになる。実際には、 $t=9t_0$ での3度目の衝突で、おもり2が静止し、おもり1に全ての運動エネルギーが移ることになる。

そのような衝突を繰り返すためには、 $M_1$ 、 $M_2$ に条件が課せられるということである。難易度はA。

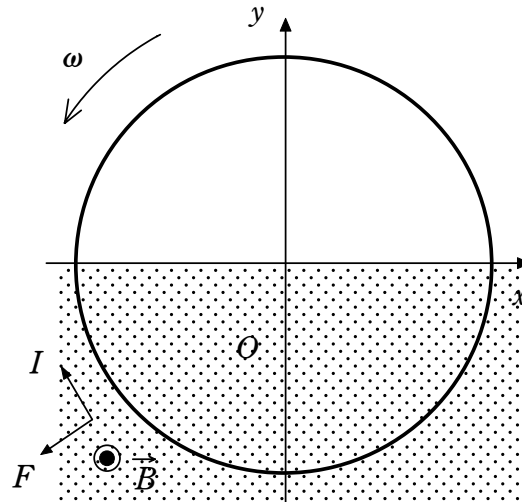
②

電磁誘導と回路の問題である。誘導起電力の発生理由を的確に理解しておく必要がある。

磁場のみならずコイルのインダクタンスによる誘導起電力まで含む回路での電流変化を問題とするので、なかなか難しい。難易度はA。

この問題では、磁場を横切る半径方向の針金に誘導起電力が発生するという現象がベースになっている。それでは、磁場中を動く円形の針金には誘導起電力は発生しないのか、という疑問がわくであろう。それについて考察してみよう。

円形の針金が中心Oを通る直線を軸として回転している。すると磁場中を横切る円形の針金中の電子には、フレミングの左手の法則により、半径方向外向きの力が働く。これは、円形の針金のどこでも同様である。つまり、針金の方向には力が働かないので、電流を流すような起電力は発生しないことが分かる。



3

専門的にいうと「音波による光の回折」という現象を、高校物理の範囲で本質を損なうことなく分かり易く表現した問題である。恐らく、レーザー光あるいは超音波といった分野あるいはその応用の研究を専門とする大学教員が、工夫を重ねて作成したのであろう。光波、音波の物理の理解を問う良問だと思う。問題作成のご苦労に敬意を表したい。

受験者は音波と光波の両方が出てきて、面食らうかも知れないが、受験の鉄則通り、まずは落ち着いて問題文を読み込めば、難問ではないことに気づくであろう。問題図がきちんと描かれているので、補助線等を付加して考えてゆけば、容易に正答に至るであろう。

波動の問題としては易問ともいえるべきだが、問題文を読み込んで、問題の本質を把握する物理解力が必要とするので、難易度は標準レベルとしてB。

「音波による光の回折」という現象はレーザー光を応用する機器の中の重要な部品として利用されている。超音波偏向器、音響光学素子などと呼ばれる。筆者が若い技術者だった40年ほど前、レーザー光の応用研究に従事していた。筆者が属していたグループの隣のグループでレーザー光を高速で偏向したり、遮断したりするために、「音波による光の回折」を利用した研究が行われていた。懐かしい思い出である。

120107