2011（H23）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

$\boxed{1}$ (60点)

nを自然数とする．xy平面上で行列$\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}$の表す1次変換（移動ともいう）を$f_n$とする．次の問いに答よ．

(1)　原点$O(0,0)$を通る直線で，その直線上のすべての点がf_nにより同じ直線上に移されるものが2本あることを示し，この2 直線の方程式を求めよ．

(2)　(1)で得られた2 直線と曲線$y=x^2$によって囲まれる図形の面積S_nを求めよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}}$を求めよ．

＜解答＞

(1)

原点を通る直線を$y=ax$とおく．するとf_nによって，この直線上の点(x, ax)は(X, Y)に移る．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-n)x+ax \\ -n(n+1)x+ax(n+2) \end{pmatrix}$$

$X=(1-n+a)x$

$Y=-n(n+1)x+ax(n+2)$

したがって，$\{a(n+2)-n(n+1)\}X=(1-n+a)Y$　①

f_nによって，直線$y=ax$は直線①に変換される。両直線が同じになるためには,

$1-n+a\neq 0$であって，$\dfrac{\{a(n+2)-n(n+1)\}}{1-n+a}=a$である．

すると，$a^2-(2n+1)a+n(n+1)=(a-n)(a-n-1)=0$

したがって，$a=n$，$n+1$の解をもつので，同じ直線上に移されるものが2本ある．

すなわち，直線$y=nx$および$y=(n+1)x$　（答）

(2)

図１を参照する．

$y=x^2$と両直線との交点は，それぞれ(n, n^2)，$(n+1, (n+1)^2)$

したがって，$S_n=\displaystyle\int_0^n\{(n+1)x-nx\}dx+\int_n^{n+1}\{(n+1)x-x^2\}dx$

$$S_n=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^n+\left[\frac{n+1}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_n^{n+1}=\frac{3n^2+3n+1}{6}\qquad（答）$$

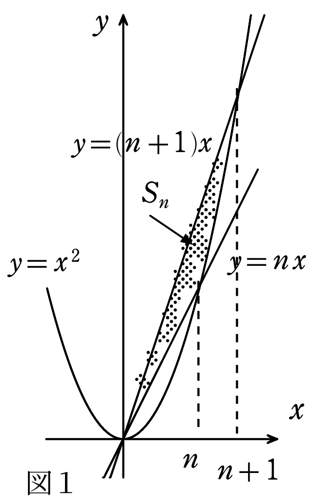

図１

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+n}=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\qquad（答）$$

＜解説＞

原点を通る直線上の点がf_nによって同じ直線上の点になる条件を求めれば良い．その方針が固まれば，後は計算することである．幸い計算は複雑ではない．

(1)

原点を通る直線$y=ax$上の点にf_nを作用させ，得られた点が同じ直線上の点になるようなaを求める。aの2次方程式になり，2つの解があるから，2本の直線が存在することが分かる．

(2)

図を描いて考察する。求めるS_nがどの範囲か，正確に把握する。交点の座標を求める．

(3)

級数計算では，部分分数の差に展開するのは，常套手段である．

$\boxed{2}$　（60点）

実数x に対して

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|dt$$

とおく．

(1)　関数$f(x)$の最小値を求めよ．

(2)　定積分$\int_0^1 f(x)dx$を求めよ．

＜解答＞

(1)

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$では，$0\leqq\cos t$，$0\leqq\sin 2t$

$\cos t-x\sin 2t=\cos t-2x\sin t\cos t=(1-2x\sin t)\cos t$，したがって，

$\sin t\leqq\dfrac{1}{2x}$のとき，$0\leqq(1-2x\sin t)$

しかるに

$x\leqq 0$では，$0\leqq\cos t-x\sin 2t$

$0<x\leqq\dfrac{1}{2}$では，$1\leqq\dfrac{1}{2x}$だから，$\sin t\leqq\dfrac{1}{2x}$で，$0\leqq(1-2x\sin t)$だから，$0\leqq\cos t-x\sin 2t$

$\dfrac{1}{2}<x$では，ある$t=t_g$で，$1-2x\sin t_g=0$となり，$t_g<t$で，$(1-2x\sin t)<0$となる。

したがって，

(ｉ) $x\leqq\dfrac{1}{2}$のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t-x\sin 2t)dt=\left[\sin t+\frac{x\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$=1-x$，したがって，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき$f(x)$は最小値$\dfrac{1}{2}$をとる．

(ii) $\dfrac{1}{2}<x$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|dt=\int_0^{t_g}(\cos t-x\sin 2t)dt+\int_{t_g}^{\frac{\pi}{2}}(x\sin 2t-\cos t)dt$$

$$=\left[\sin t+\frac{x\cos 2t}{2}\right]_0^{t_g}+\left[-\frac{x\cos 2t}{2}-\sin t\right]_{t_g}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin t_g+\frac{x\cos 2t_g}{2}-1+\frac{x\cos 2t_g}{2}+\sin t_g=2\sin t_g+x\cos 2t_g-1$$

$$=\frac{1}{x}+x(1-2\sin^2 t_g)-1=\frac{1}{x}+x-2x\left(\frac{1}{2x}\right)^2-1=\frac{1}{2x}+x-1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+2x\right)-1=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{2x}\right)^2+2\sqrt{2}\right\}-1$$

したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2x}$，すなわち$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$のとき，$f(x)$は最小値$(\sqrt{2}-1)$をとる．

(i)，(ii)の結果，$f(x)$の最小値は$(\sqrt{2}-1)$　（答）

(2)

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{2x}+x-1\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\log x}{2}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-1+\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{\log 2}{2}\qquad\text{（答）}$$

＜解説＞

関数の絶対値の積分だから，正の関数値領域を取り出す必要がある．被積分関数の正負がxの値によって，変わることに気付けば，絶対値記号を外して，定積分を行うことが可能となる．

(1)

$x\leqq\dfrac{1}{2}$であれば，絶対値記号の中の関数は，tの与えられた変域に対して，正である．$\dfrac{1}{2}<x$では，あるtで，関数は正から負になることが分かる．そこで，$x\leqq\dfrac{1}{2}$と$\dfrac{1}{2}<x$とについて，被積分関数を求め，定積分を実行すれば良い．xの関数として，結果が求まる．

(2)

$f(x)$の具体的な関数形が明らかなので，定積分を実行すれば良い．

$\boxed{3}$ (60点)

定数kは$k>1$をみたすとする．xy平面上の点$A(1,0)$を通りx軸に垂直な直線の第1象限に含まれる部分を，2点X,Yが$AY=kAX$をみたしながら動いている．原点$O(0,0)$を中心とする半径1の円と線分OX，OYが交わる点をそれぞれP，Qとするとき，$\triangle OPQ$の面積の最大値をkを用いて表せ．

＜解答＞

　点Xを$(1\,,\,t)$，点Yを$(1\,,\,kt)$とおく。tは$0<t$の実数である．

直線OXの式は，$y=tx$，直線OYの式は$y=ktx$だから，

Pのx座標は$p_x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，$Q$の$x$座標は$q_x=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2t^2}}$

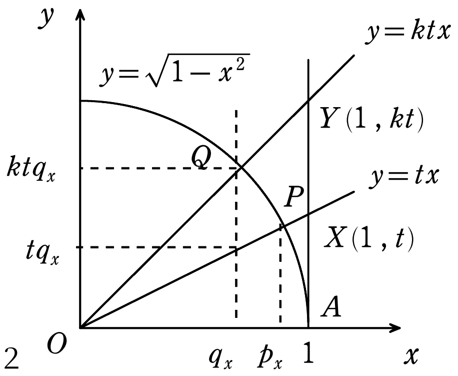

図２

$$\triangle OPQ\text{の面積}=\frac{1}{2}p_x(ktq_x-tq_x)=\frac{1}{2}(k-1)tp_xq_x=\frac{(k-1)t}{2\sqrt{1+k^2t^2}\sqrt{1+t^2}}$$

$$=\frac{(k-1)}{2\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}+k^2t\right)\left(\dfrac{1}{t}+t\right)}}$$

分子の$\sqrt{\ }$の中は，$\left(\dfrac{1}{t}+k^2t\right)\left(\dfrac{1}{t}+t\right)=\left(\dfrac{1}{t}\right)^2+(k^2+1)+(kt)^2=\left(kt-\dfrac{1}{t}\right)^2+k^2+2k+1$となり，

最小値$(k+1)^2$をとる．したがって，$\triangle OPQ$の面積の最大値は，$\dfrac{k-1}{2(k+1)}$　（答）

＜解説＞

　図を描いて，問題文との対応を把握して考えれば，題意は簡明だから，戸惑うことはないだろう。点$P\,,\,Q$の座標を求めれば，$\triangle OPQ$の面積は容易に求まる。後は式の変形の問題である。分子が最小になる条件が，面積を最大にする．

$\boxed{4}$（70点）

　平面上に一辺の長さが１の正方形DおよびDと交わる直線があるとする．この直線を軸にDを回転して得られる回転体について以下の問の答えよ．

(1)　Dと同じ平面上の直線lはDのどの辺にも平行でないものとする．軸とする直線はlと平行なものの中で考えるとき，回転体の体積を最大にする直線はDと唯１点で交わることを示せ．

(2)　Dと交わる直線を軸としてできるすべての回転体の体積の中で最大となる値を求めよ．

＜解答＞

(1)

　正方形Dと交わる直線を軸とするDの回転体の体積は

(a) 回転軸からの距離が長い

(b) 回転軸を含む断面の面積が大きいほど大きい．したがって，回転体の体積を最大にする直線（回転軸）は，直線lと平行な直線の中で，Dの1つの頂点を通る直線である．すなわちDと唯一点で交わる．

このことを図３を参照して示す．Dの辺とは平行ではない任意の直線l_qに対して頂点Oを通るl_qに平行な直線l_oは，D内の点から最も遠い．直線l_qはDを分割するので，回転体の断面積は正方形より小さくなる．直線l_oによる回転体の断面は正方形になるので，一番大きい．したがって，頂点Oを通る直線l_oを回転軸とした回転体の体積が最大になる．このことは頂点Aを通る直線でも同じである．

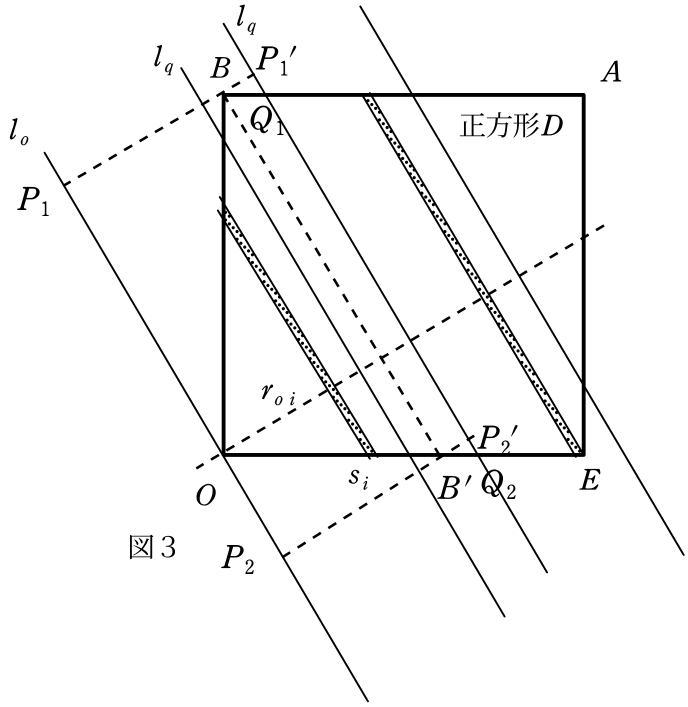

図３

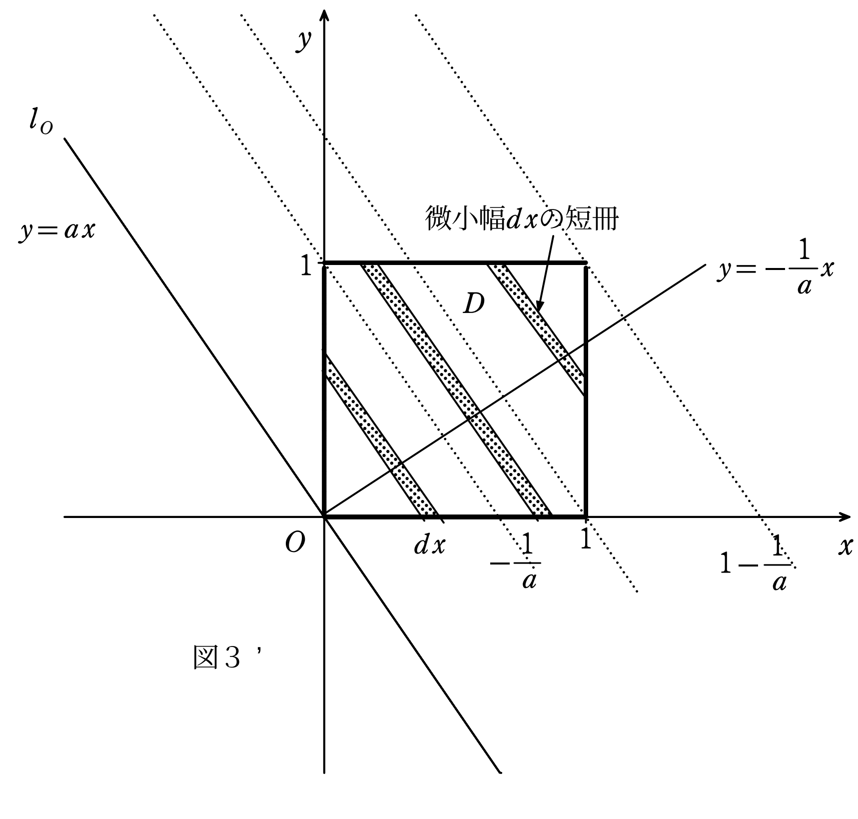

図３＇

(2)

図３’を参照して考察する。頂点Oを通る直線l_oを軸とした回転による正方形Dの体積を考える．Dをl_oに平行な微小幅の短冊に分割する．短冊の幅はx軸方向にdxとする．すると短冊の面積は，短冊の中心位置をxとすると

(ｉ) $0 \leqq x < -\dfrac{1}{a}$のとき

短冊の長さは，$t=\sqrt{1+a^2}\,x$

短冊の長さ方向に垂直の幅は，$v=\dfrac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}dx$

したがって，短冊の面積は，$s(x)=tv=|a|xdx$

(ii) $-\dfrac{1}{a} \leqq x < 1$のとき

短冊は幅dx，高さ1の平行四辺形だから，$s(x)=dx\times 1=dx$

(iii) $1 \leqq x \leqq 1-\dfrac{1}{a}$のとき

短冊の長さは，$t=\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{|a|}(1-a+ax)$

短冊の長さ方向に垂直の幅は，$v=\dfrac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}dx$

したがって，短冊の面積は，$s(x)=tv=(1-a+ax)dx$

一方，軸l_oから短冊までの距離は，$r(x)=\dfrac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}x$

回転体の体積は，

$$V_o=\int_0^{1-\frac{1}{a}} 2\pi r(x)s(x)dx=\frac{2\pi|a|}{\sqrt{1+a^2}}\left\{\int_0^{-\frac{1}{a}}|a|x^2dx+\int_{-\frac{1}{a}}^{1}xdx+\int_1^{1-\frac{1}{a}}(1-a+ax)xdx\right\}$$

{ }の積分は，$\left[-\dfrac{ax^3}{3}\right]_0^{-\frac{1}{a}}+\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{a}}^{1}+\left[\dfrac{1-a}{2}x^2+\dfrac{a}{3}x^3\right]_1^{1-\frac{1}{a}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2a}=\dfrac{(a-1)}{2a}$

$$V_o=\frac{2\pi|a|(a-1)}{2a\sqrt{1+a^2}}=\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{1+a^2}}$$

$f(a)=\dfrac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}$とすれば，$f'(a)=\dfrac{-(a+1)}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}$，

$a=-1$で$f(a)$は最大値$f(-1)=\sqrt{2}$をとる．したがって，V_oの最大値は$\sqrt{2}\,\pi$　（答）

＜解説＞

(1)

解答の冒頭で説明したように，頂点を通る直線を軸に回転してできる立体の体積が最大になることは，直感的に分かる．したがって，Dとは唯一点で交わることも分かる．ところが，最大になる理由を数学的に示すとなると，なかなか難しい．ほとんど自明なことの事実の連鎖として証明していくのだが，そのために場合分けや補助線などが必要となる．

解答では直感的な記述に止めたが，これで満点なのか分からない．

そこで，厳密な証明を図３を用いて示す．頂点Oを通る直線lと平行な直線をl_oとする．正方形Dをlに平行で微少幅のn 個の短冊に分割し，i 番目の短冊の面積をs_iとする．ただし，nは短冊が長方形とみなせるほどに十分大きいものとする．また，頂点Oからi 番目の短冊までの距離を$r_{o\,i}$とする．

するとl_oを軸として正方形Dを回転してできる立体の体積は，$V_o \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_{o\,i} s_i$　①

直線 lと平行な任意の直線をl_qとし，l_qを境に頂点O側に$(j-1)$個の短冊，頂点A 側に$(n-j+1)$個の短冊があるものとし，l_qとi 番目の短冊の距離を$r_{q\,i}$とする．するとl_qを軸として正方形Dを回転してできる立体の体積は,

$$V_q = V_{qo} + V_{qa} - (V_{qo} \cap V_{qa}) < V_{qo} + V_{qa} \fallingdotseq \sum_{i=1}^{j-1} 2\pi r_{q\,i} s_i + \sum_{i=j}^{n} 2\pi r_{q\,i} s_i \quad ②$$

ただし，V_{qa}はl_qを境に頂点A側の図形D_aの回転によってできる立体の体積

V_{qo}はl_qを境に頂点O側の図形D_oの回転によってできる立体の体積

$(V_{qa} \cap V_{qo})$は図形D_a及び図形D_oの回転によってできる立体の共通部分の体積

(ｉ) l_qが頂点OとBの間にあるとき

明らかに$V_{qo} = (V_{qo} \cap V_{qa}) \subset V_{qa}$だから，②により，$V_q = V_{qa} \fallingdotseq \sum_{i=j}^{n} 2\pi r_{q\,i} s_i < \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_{o\,i} s_i \fallingdotseq V_o$

なぜなら，$r_{q\,i} < r_{o\,i}$（$i = j, j+1, \ldots, n$）

(ⅱ) l_q が頂点BとE の間にあるとき

l_qと辺AB，OE の交点をQ_1，Q_2，Bを通りl_qと平行な直線と辺OE の交点をB'，またB, B'を通り軸に垂直な直線と軸l_o，l_qとの交点をP_1, P_1', P_2, P_2'とする．

$V_o =$(台形BQ_1OQ_2)l_o+(台形AQ_1EQ_2)l_o　③

$V_q =$(台形BQ_1OQ_2)l_q+(台形AQ_1EQ_2)l_q　④

ただし，(台形BQ_1OQ_2)l_oは，l_oを軸として台形BQ_1OQ_2を回転してできる回転体の体積

同様に，(台形BQ_1OQ_2)l_qは，l_qを軸として台形BQ_1OQ_2を回転してできる回転体の体積

他も同様である．

台形AQ_1EQ_2と回転軸との距離は，l_qよりもl_oの方が長い．

したがって，(台形AQ_1EQ_2)l_q<(台形AQ_1EQ_2)l_o　⑤

$\triangle BP_1'Q_1 \equiv \triangle B'P_2'Q_2$だから，$\varlozenge BQ_1B'Q_2$の面積＝長方形$BP_1'B'P_2'$の面積なので,

五角形$OBP_1'P_2'B'$の面積＝台形BQ_1OQ_2の面積だから,

(五角形$OBP_1'P_2'B'$)l_o=(台形BQ_1OQ_2)l_o，(五角形$OBP_1'P_2'B'$)l_q=(台形BQ_1OQ_2)l_q　⑥

一方，明らかに，(長方形$P_1P_1'P_2P_2'$)l_q=(長方形$P_1P_1'P_2P_2'$)l_o

しかるに，長方形$P_1P_1'P_2P_2' = \triangle OBP_1 + \triangle OB'P_2 +$五角形$OBP_1'P_2'B'$

$(\triangle OBP_1)l_o < (\triangle OBP_1)l_q$，$(\triangle OB'P_2)l_o < (\triangle OB'P_2)l_q$，なぜなら，両三角形とも軸$l_q$までの距離が軸$l_o$までの距離よりも長い．

したがって，(五角形$OBP_1'P_2'B'$)l_q<(五角形$OBP_1'P_2'B'$)l_o

したがって，⑥から，(台形BQ_1OQ_2)l_q<(台形BQ_1OQ_2)l_o　⑦

したがって，③，④，⑤，⑦から，$V_q < V_o$

(iii) l_qが頂点EとAの間にあるとき

l_oの代わりに，頂点Aを通る直線l_aについて考えれば，(ｉ)と同様になる．

以上(ｉ)，(ii)，(iii)によって，$V_q < V_o$だから，一つの頂点を通る直線を軸にして正方形Dを回転してできる立体の体積が最大になることを示した．

(2)

解答では，微小な短冊の加算の極限を，積分によって求めた．別解を示そう。

図３’’において直線l_oを$y=ax$とする．点(x, y)と直線l_oの距離rは，$r=\dfrac{|ax-y|}{\sqrt{1+a^2}}$

l_oを軸として正方形Dを回転した体積は，正方形D中の点(x, y)における微小面積$dxdy$を回転したときにできるリングの体積$2\pi r dxdy$を正方形D全体について加算したものである．

$$V_o=\int_0^1\int_0^1 2\pi r dxdy=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}\int_0^1 dy\int_0^1 (y-ax)dx=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}\int_0^1 dy\left[yx-\frac{ax^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}\int_0^1\left(y-\frac{a}{2}\right)dy=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}\left[\frac{y^2}{2}-\frac{ay}{2}\right]_0^1=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{1+a^2}}$$

$f(a)=\dfrac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}$ とすれば，$f'(a)=\dfrac{-(a+1)}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}$，

$a=-1$で$f(a)$は最大値$f(-1)=\sqrt{2}$をとる．したがって，V_oの最大値は$\sqrt{2}\pi$　（答）

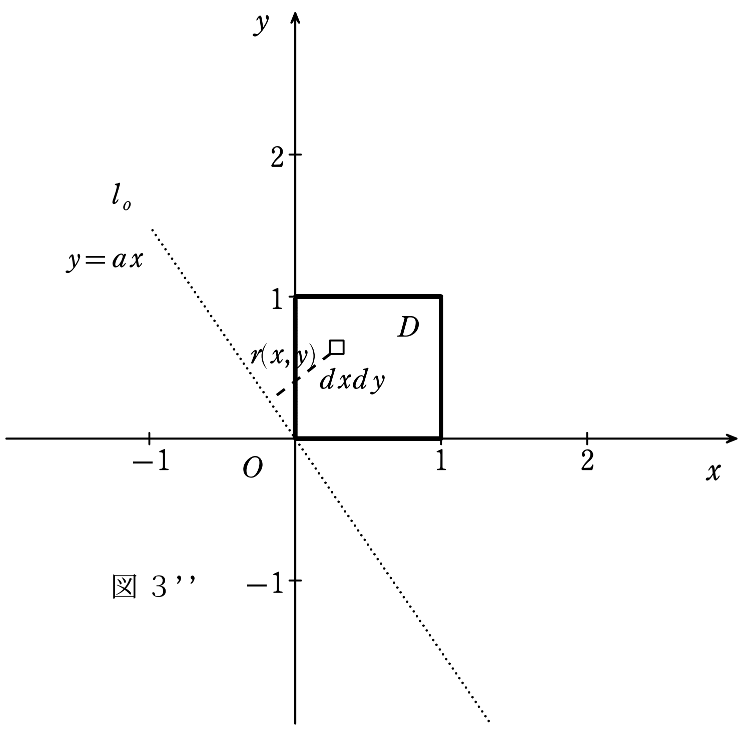

図３’’

直線$ax+by+c=0$と点(x_d, y_d)の距離は，$r=\dfrac{|ax_d+by_d+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$であることは教科書に記載がある．覚えておきたい．覚えてなければ，導出方法をおぼろげながらも覚えていれば，容易に導出できる．

初めから導出するのでは，時間が不足するであろう．

微少面積$dxdy$の平面を半径rで回転してできるリング状の立体の体積は，$2\pi r dxdy$．したがって，$dxdy$の存在範囲全体で積分すれば，全体の体積が求まる．すなわち，$\iint 2\pi r dxdy$である．2重積分は高校数学の範囲外であるが，この問題では積分範囲が2変数間で独立なので扱いやすい．一方の変数の定積分では，他方の変数は定数として扱えば良い．

このように考えれば，解答のように被積分関数の場合分けなどを考慮することもなく，容易に積分を実行できる．

＜総評＞

$\boxed{1}$～$\boxed{3}$の難易度はほぼ同じと思う．数学的思考力や計算力を必要とする歯ごたえのある問題である．受験者の得意，不得意で難易度は左右されるであろう．得意分野の問題から着手して，完答したい．

$\boxed{4}$は難問である．とはいえ，直感的には正答は分かるので，その直感を論理的に記述すれば良いのだが，自明と思える論理をどこまで記述するかが難しい．計算もやや煩瑣になる．しかし，$\boxed{1}$～$\boxed{3}$を的確に扱い，余裕をもって$\boxed{4}$に取り組みたい．

$\boxed{1}$

行列による1次変換から始まる問題．2次曲線を含む積分，数列の和の問題に帰着する．考え方の方針が固まり，1次変換を正確に行えば，難しいところはなかろう．標準レベルの問題で，難易度はB．

$\boxed{2}$

三角関数の絶対値の定積分に関する問題．絶対値を外して，具体的に積分可能とするための工夫を必要とする．積分計算そのものは難しいものではない．標準レベルの問題で，難易度はB．

$\boxed{3}$

図形と方程式に関する問題．上手に図形の方程式を記述することが重要である．難易度はB－．

$\boxed{4}$

数学的表現をしているので，一読して題意を把握するのは難しく感じるかも知れないが，Dが正方形と唯一点で交わる直線は，正方形の頂点を通る直線であることが分かる．すると，この直線を軸とするDの回転体の体積が最大になることは，当たりまえのように思える．しかし，これを完全に証明することは難しい．示せという要求だから，上記のような解答で十分であろう．完璧な証明を考え始めると時間が不足するであろう．

このような証明問題で感じることは，採点基準である．証明問題であるから，論理が完成しており，正しい結論が導かれていれば満点である．しかし，論理の流れの記述に飛躍や推論があったりして，途切れていても，正しい結論に至ることが十分考えられる．そのような解答に対して，どのような点数を与えるのか，ということである．部分点を与えるのか，それとも0点なのか．

さらに，多くの受験者の解答を一人が採点するのか，複数で採点するのか．複数で採点する場合に採点者間での採点のばらつきはないのか．当然，採点基準のようなものは予め作成されているだろうが，解答が採点基準に対応するように記載されているとは限らないから，採点者個人の判断が必要とされよう．採点のばらつきが出るのは避けがたい．

こうした疑問は残るが，このような証明問題は受験者の数学の学力を問う上では良問だと思う．的確に論理の流れを思考させ，表現させるからである．

⑵は⑴で頂点を通る直線だという結論が得られれば，考え方は難しくはない．しかし，示した解答では，1変数の積分になるが，被積分関数の場合分けが必要で，計算もやや煩瑣になる．解説で示した別解では，2 変数の2 重積分になり，高校数学の範囲を逸脱するが，考え方も計算も容易である．
難易度A．

111229