

第 1 問

x の 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が, 3 つの条件

$$f(1) = 1, f(-1) = -1, \int_{-1}^1 (bx^2 + cx + d) dx = 1$$

を全て満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分

$$I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{f''(x)\}^2 dx$$

を最小にするものを求め, そのときの I の値を求めよ。ただし, $f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。

第 2 問

実数 x の小数部分を, $0 \leq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし, これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して, 無限数列 $\{a_n\}$ の各項 $a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を次のように順次定める。

$$(i) \quad a_1 = \langle a \rangle$$

$$(ii) \quad \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

第 3 問

p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件

$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, \quad b \leq c \leq a$$

を満たすものを考え、このような a, b, c を $[a, b; c]$ の形に並べたものを (p, q) パターンと呼ぶ。各 (p, q) パターン $[a, b; c]$ に対して

$$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

(1) (p, q) パターンのうち、 $w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。

また、 $w([a, b; c]) = p$ となる (p, q) パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2) s を p 以下の整数とする。 (p, p) パターンで $w([a, b; c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

第 4 問

座標平面上の 1 点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $Q(a, a^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ を、3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき、 $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ。