

2011 (H23)年度 東京大学 理科前期 入学試験 物理解説

2011年6月作成, 2017年3月修正 (第1問 (2), (3)およびそれらの解説)

第1問

(1)

物体Bは $l - l\cos\theta$ 降下するから, エネルギー保存の法則によって,

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos\theta), \text{ したがって } v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)} \quad (\text{答})$$

(2)

(1)のとき, 物体Bは円運動をしているので, その運動方程式は $\frac{mv^2}{l} = mg\cos\theta - F$

(1)の結果を用いて, $2mg(1 - \cos\theta) = mg\cos\theta - F$

$$\therefore F = mg\cos\theta - 2mg(1 - \cos\theta) = (3\cos\theta - 2)mg \quad (\text{答})$$

(3)

物体A が壁から離れるということは,

$\theta = \alpha$ において棒から物体B に働く力 F が0 になったということだから,

$$F = (3\cos\alpha - 2)mg = 0, \cos\alpha = \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$

(4)

$$\text{運動量は } mv = m\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = m\sqrt{\frac{2gl}{3}}$$

$$\text{その水平方向成分 } P = mv\cos\alpha = \frac{2}{3}m\sqrt{\frac{2gl}{3}} \quad (\text{答})$$

(5)

物体A がすべり始めたということは, その瞬間にAとBが水平方向には一体となった運動を始めたのだから, 水平方向の運動量が保存される。

$$\text{運動量保存の法則により, } P = (m + M)V \text{ だから, } V = \frac{P}{m + M} \quad (\text{答})$$

(6)

物体Bの初期の位置エネルギーは mgl

$$\text{物体Bが床と衝突する直前の物体A, Bの運動エネルギーは } \frac{MV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + \frac{mv_{yb}^2}{2}$$

$$\text{エネルギー保存の法則によって, } mgl = \frac{MV^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + \frac{mv_{yb}^2}{2}$$

ただし, v_{yb} はBの垂直方向の速度

床とBとが完全弾性衝突して高さ $l\cos\beta$ まで上がるので, エネルギー保存の法則によって

$$mgl\cos\beta = \frac{mv_{yb}^2}{2} = mgl - \frac{(m + M)V^2}{2} = mgl - \frac{P^2}{2(m + M)}$$

$$\text{したがって, } \cos\beta = 1 - \frac{P^2}{2(m + M)mgl} \quad (\text{答})$$

物体Aが物体Bから棒を通して水平方向に受ける力： $S = -F \sin \theta$

物体Aが床から受ける抗力： $N = Mg + F \cos \theta$

Mg は物体Aの重力

$F \cos \theta$ は物体Aが棒を通して受ける力の垂直成分

$\mu N = S$ となったとき、物体Aはずり始める。

$\theta = 60^\circ$ のとき、 $F = (3 \cos \theta - 2)mg = -\frac{mg}{2}$ 、 $S = \frac{\sqrt{3}mg}{4}$ 、 $N = Mg - \frac{mg}{4}$ だから、

$$\mu = \frac{S}{N} = \frac{\sqrt{3}m}{4M - m} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

このような運動が実際に実験可能かどうかは別として、思考実験として考えたとき、なかなか難しい問題である。物体A、Bがどのような運動をするかを的確に把握しないと、解答できない。私も頭をひねった。ただし、問題は誘導的にできていて、運動過程は半ば与えられている。

受験者なら、時間の制約の中で、もてる知識と思考力をフル稼働させて、もっとも可能性の高いと思う考え方をとれば良い。模範解答を記載する筆者はそれではすまない。的確な物理考察のもとで、運動がどのように進行するかを明らかにしなければならない。

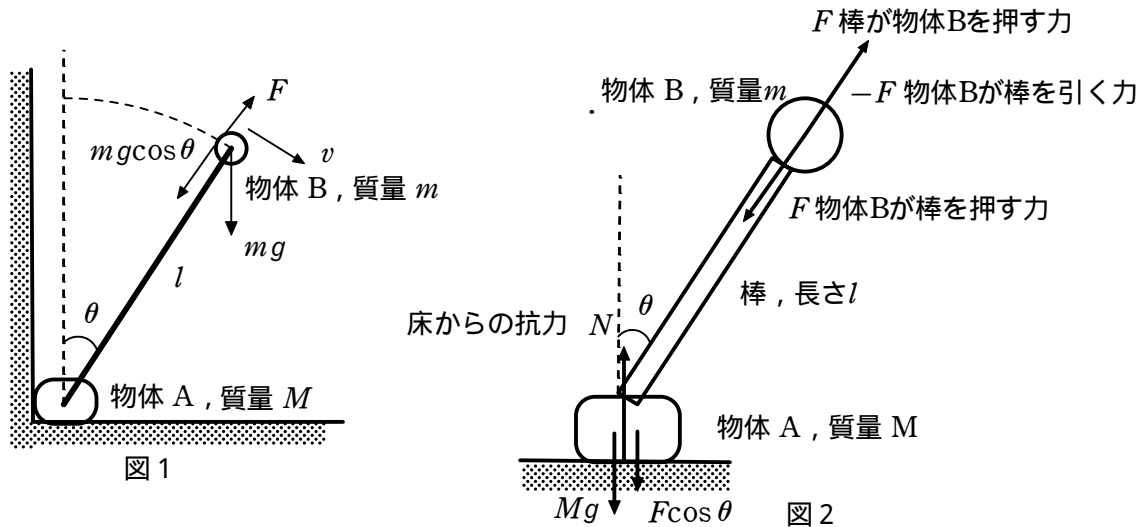


図1を参照して考える。

(1)

物体Aが壁に接したままということは、物体Bは物体Aを中心とした円運動をしながら下降していることを意味する。物体Bの位置エネルギーの減少が運動エネルギーに変換されたとして、エネルギー保存の法則によって速さを求める。

(2)

物体Bが円運動をしているので、円運動の方程式を考える。物体Bには重力の棒方向成分 $mg \cos \theta$ と棒からの力 F が働いて、円運動をする。前者は円運動の中心方向に、後者は中心とは逆方向に向いている。Bの半径方向の力のつり合いから考えることもできる。

物体Bに働く半径方向の力は、

回転中心方向に物体Bの重力の棒方向成分 $mg\cos\theta$

回転中心と逆方向に遠心力： $\frac{mv^2}{l} = 2mg(1 - \cos\theta)$ ，棒が物体Bに働く力： F

これらがつり合っているので， $mg\cos\theta = 2mg(1 - \cos\theta) + F$

$F = mg\cos\theta - 2mg(1 - \cos\theta) = (3\cos\theta - 2)mg$ (答)

(3)

物体Aが床をすべり始めたということは，物体Bが棒を押さなくなったということであり，棒から物体Bに働く力 F がなくなったということである。

すなわち，棒が倒れるに従い（すなわち θ が大きくなるに従い）物体Bの速度は増大する。すると，物体Bの遠心力は増大し，上記(2)からわかるように F （物体Bの重力の棒方向成分 - 遠心力）が0になる。さらに F が負になり，物体Bが棒を引く力が作用し，物体Aがすべり始める。

(4)

物体Bの速度は円の接線方向だから，水平方向とは θ の角度をなす。

(5)

物体Aがすべり始めると，物体Bは円運動をやめ，水平方向にはAと一体となった等速運動，垂直方向には自由落下運動となる。したがって，物体BがAの真横にきたときのAの速さは物体AがBと一体となって水平方向にすべり始めたときの速度である。物体BとAとが一体となった運動を始める前後で運動量保存の法則が成立する。

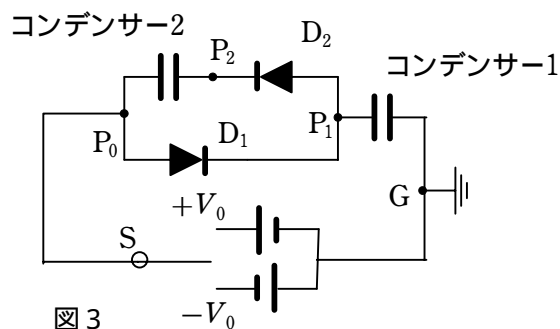
(6)

物体Bは床に垂直に落下し完全弾性衝突するので，衝突直前の垂直方向の速度に基づく運動エネルギーが保存される。

図2を参照して考える。物体Aと床との間に摩擦があると，棒が物体Bを押す力 F が0になっても，まだ物体Aはすべり始めない。さらに物体Bの速さが速くなって， F が負になる，すなわち $-F (> 0)$ という棒を引く力が発生すると，棒を通して物体Aがすべり始める。棒が物体Aを水平方向に引く力は $-F\sin\theta$ である。

一方，物体Aから重力 Mg と棒から $F\cos\theta$ とが床を押す。これに対して床から同じ大きさの抗力 N が物体Aに作用して，物体Aの静止摩擦力 μN を発生させる。

第2問



(1)

スイッチSが V_0 に接続した直後はまだ充電が始まる前で、コンデンサーには電荷は存在しないので、Gと P_1 の電位は等しい。同様に P_0 と P_2 の電位は等しい。
したがって $V_1=0, V_2=V_0$ (答)

(2)

コンデンサーへの充電が終わっているので、 $V_1=V_0$ (答)

ダイオード D_2 は接続状態になり、 V_2 は V_1 と同電位になるので、 $V_2=V_0$ (答)

コンデンサー1に蓄えられている電荷量が CV_0 だから、静電エネルギーは $U=\frac{CV_0^2}{2}$ (答)

電池がした仕事は、電荷 CV_0 が電池によって電位 V_0 を与えられたので、 $W=CV_0^2$ (答)

(3)

ダイオード D_1 は逆電圧なので切れた状態だから $V_1=V_0$ (答)

コンデンサー2には電荷がないから、 $V_2=-V_0$ (答)

(4)

コンデンサー1, 2, 電池の直列接続回路になるので、 P_1, P_2 は同電位で $V_1=V_2=0$ (答)

< 解説 >

ダイオードとコンデンサーを含む電気回路の問題である。問題として提示されている回路の書き方は、表現としては良いが、現象を考える上では、分かり難い。電池、コンデンサー、ダイオードなどの接続関係(直列か、並列かなど)が直截に分かるような回路図に書き直して考えると良い。問題図2-2を書き直したのが図3である。各部品の直列、並列などの接続関係が分かり易い。

(1)

図1から、コンデンサー1に電荷が溜まっていないので、 P_1 の電位はGに等しい。電位がGに等しくないと、電荷が溜まっていることになる。同様に、 P_2 の電位は P_0 に等しい。

(2)

図1から、電池、スイッチ、 D_1 、コンデンサー1、G、電池という回路が閉じるので、電流が流れて、コンデンサー1に電荷が溜まるのが分かる。一方、充電が進むにつれ電流は減少して、 P_0 と P_1 は同電位になるので、コンデンサー2には電荷は溜まらない。

コンデンサーに蓄積される静電エネルギーや電池がする仕事についての考え方を理解していなければならぬ。

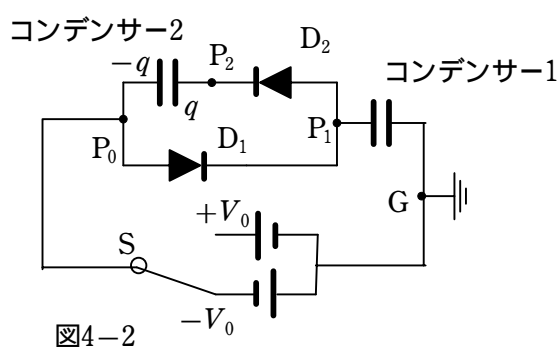
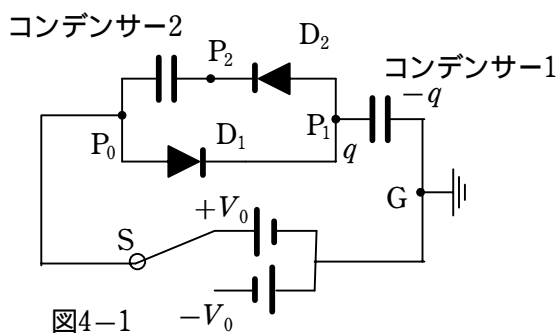
(3)

切り替えた直後ということは、電荷移動などの現象が起こる前ということだから、コンデンサー1の電荷はそのままなので、(Gの電位+コンデンサーの帯電による電位)ということで、 V_1 は変化しない。コンデンサー2には、もともと電荷はなかったから、 P_0 の電位がそのまま現れる。

(4)

図4-1にスイッチを電池の正極側につないだ場合の回路、図4-2には負極側につないだ場合の回路を示す。図4-1ではダイオード D_1, D_2 は導通状態で、電荷はコンデンサー1にのみ溜まる。したがって、 P_0, P_1, P_2 は同電位で V_0 となる。

図4-2にスイッチが切り替わると、 D_1 は切断状態となり、 D_2 は導通状態のままだから、コンデンサー-1から2へ電荷の移動が起こり、電荷 q がコンデンサー-2に溜まる。 G, P_1, P_2 は同電位で0となる。



P_{2n-1} と P_{2n+1} 間のコンデンサーに溜まる電荷による電位は $2V_0$ で、スイッチSを $+V_0$ 側に接続したとき、 $V_1=V_0$ だから、 $V_{2N-1}=V_0+2(N-1)V_0=(2N-1)V_0$ (答)

また同様に、 P_{2n-2} と P_{2n} 間のコンデンサーに溜まる電荷による電位は $2V_0$ で、スイッチを V_0 側にしたときの P_0 の電位は V_0 だから、 $V_{2N}=V_0+2NV_0=(2N+1)V_0$ (答)

< 解説 >

難問である。スイッチを切り替えるごとに電荷がどのように移動し、どのくらい電荷がコンデンサーに充電されるか、と考えるとなかなか難しくなってしまう。それよりも、「スイッチを何度も切り替えた結果、切り替えても回路中での電荷移動が起こらなくなった」という記述に着目する。

切り替えても電荷移動が起きないとは、切り替え前後でのコンデンサーの両端の電位差が変化しないということである。したがってSが $+V_0$ と $-V_0$ に切り替わると、 P_0 の電位は同様に $+V_0$ と $-V_0$ に変化する。これによって、 P_{2n} の電位 V_{2n} は $\pm V_0$ 増減する。

一方、 P_1 の電位は、 P_1 とG間のコンデンサーに $+V_0$ で充電されている状態で安定しているはずだから（スイッチSの切り替えで電荷移動がないということは、コンデンサーに $+V_0$ で充電されている状態で安定していることを意味する）、 P_1 の電位はスイッチSの切り替えに関わらず、 $+V_0$ に固定されている。Sが $-V_0$ のとき、 P_1 と P_2 の電位は等しくて $+V_0$ 、Sが $+V_0$ のとき P_0 の電位が $2V_0$ 上昇するので、 P_2 の電位も $2V_0$ 上昇して $3V_0$ となる。すなわち、 P_0 と P_2 間のコンデンサーの両端の電位差は $2V_0$ であることが分かる。このとき、 P_2 と P_3 の電位は等しいので、 P_1 と P_3 間のコンデンサーの両端の電位差も $2V_0$ であることが分かる。

同様の考えを繰り返して行けば、Gに接続されているコンデンサー以外の全てのコンデンサーの両端の電圧が $2V_0$ であることが分かる。このようにして、Sの切り替えによるコンデンサーへの充電のプロセスを考慮しなくても、解答に至ることができる。それでは、このプロセスはどのようなもので、なぜ電荷移動のない安定な状態になって、結果として高電圧を得ることができるのだろうか。これを、まともに考えてしまうと、解答には至らず、得点を得られないかも知れない。しかし、物理の勉強という点ではとても大事なことなので、ここで考察してみよう。

まず図5-1(問題では図2-2)を参照しながら、Sの切り替えにより、コンデンサーの電荷がどのようになるかを考えよう。電荷 $q=CV_0$ とすれば、

S	$+V_0$	$-V_0$	$+V_0$	$-V_0$	$+V_0$	$-V_0$	$+V_0$	$-V_0$	$+V_0$	$-V_0$
コンデンサー-1	q	0	q	$\frac{q}{2}$	q	$\frac{3q}{4}$	q	$\frac{7q}{8}$	q	$\frac{15q}{16}$
コンデンサー-2	0	q	q	$\frac{3q}{2}$	$\frac{3q}{2}$	$\frac{7q}{4}$	$\frac{7q}{4}$	$\frac{15q}{8}$	$\frac{15q}{8}$	$\frac{31q}{16}$

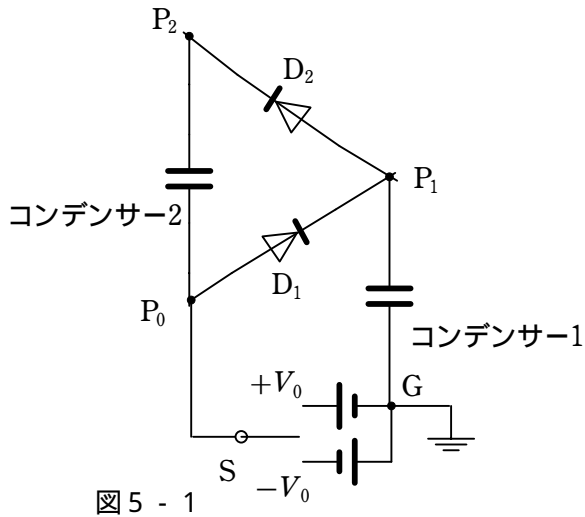


図 5 - 1

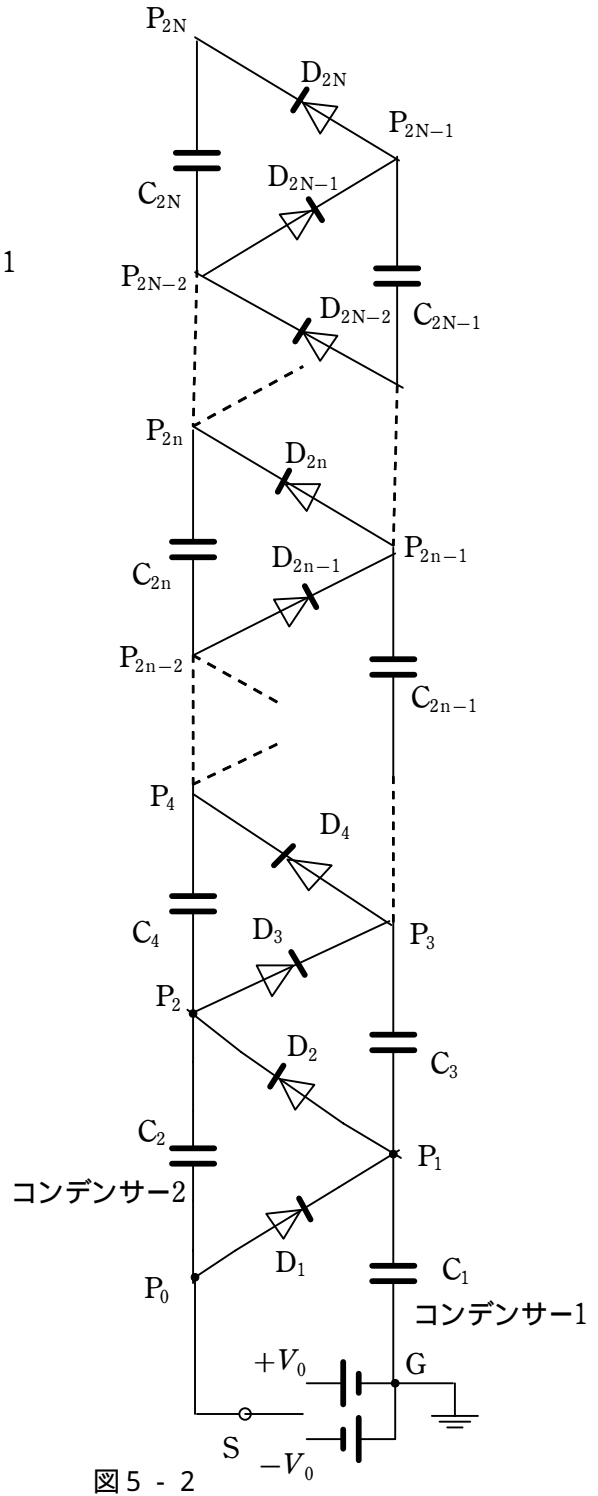


図 5 - 2

この経過から、Sが $-V_0$ でもコンデンサー1の電荷は次第に q になり、コンデンサー2の電荷は $2q$ になることが分かる。つまり、Sが $+V_0$ のときコンデンサー1に電荷 q が溜まり、その電荷の一部が $-V_0$ のときコンデンサー2に移動するのである。移動する電荷量はSの切り替えごとに $\frac{q}{2}, \frac{q}{4}, \frac{q}{8}, \frac{q}{16}, \dots$ である。これらの和は q だから、コンデンサー2に溜まる電荷は $2q$ となる。

次に、図5-2(問題では図2-3)のように、コンデンサーとダイオードが多段に接続された場合はどうなるかを考えよう。図5-1の C_1, C_2 にそれぞれ $q, 2q$ の電荷が溜まった状態で C_3, D_3 が接続されたとしよう。すると、Sが $+V_0$ のとき、 $V_0 \geq V_1, V_2 \geq V_3$ 、だから C_2 の電荷の一部が C_3 に移動する。Sが $-V_0$ になると、 $V_1 \geq V_2$ だから、 C_1 の電荷の一部が C_2 に移動する。Sが $\pm V_0$ と変化するたびに、このような過程を繰り返し、 C_1 に電池から充電され、 C_2, C_3 と電荷が移動していく。各コンデンサーが充電され、電荷の移動がなくなると、 C_2, C_3 には $2q$ の電荷が溜まり、両端の電圧は $2V_0$ となる。

この状態で C_4, D_4 が接続されると、Sが $-V_0$ のとき、 $V_1 \geq V_2, V_3 \geq V_4$ だから、 C_3 の電荷の一部が C_4 に移動する。同様にSが $\pm V_0$ と変化するたびに電池から電荷が供給されて、 C_2, C_3, C_4 に $2q$ の電荷が溜まっていく。以上を繰り返して、 C_1 を除くコンデンサーには $2q$ の電荷が溜まり、両端の電圧は $2V_0$ になっていく。

さて、問題文にもあるように、この回路によって高電圧を得ることができることが分かるであろう。すなわち、電池の電圧 V_0 の $(2N+1)$ 倍の電圧を得ることができる。

第3問

(1)

液体の体積は $V_l = \frac{hS}{2}$ 、液体の質量を M_l とすれば、 $M_l g = P_0 S$

したがって液体の密度は $\frac{M_l}{V_l} = \frac{2P_0}{gh}$ (答)

(2)

気体がした仕事は液体を $\frac{h}{2}$ 上昇させるという仕事だから、 $\frac{M_l g h}{2} = \frac{P_0 S h}{2}$ (答)

(3)

気体が吸収した熱量 = (気体の内部エネルギーの増加) + (気体のした仕事)

気体の初期の体積と温度を V_0, T_0 、加熱後のそれらを V_1, T_1 とすれば、

状態方程式として、 $P_0 V_0 = n R T_0, P_0 V_1 = n R T_1$ 、ただし n は気体のモル数

しかるに、 $V_1 = 2V_0$ だから、 $T_1 = 2T_0$ 、

気体の内部エネルギーの増加は $\frac{3nR}{2}(T_1 - T_0) = \frac{3nRT_0}{2} = \frac{3P_0 V_0}{2} = \frac{3P_0 S h}{4}$

したがって、気体が吸収した熱量は $\frac{3P_0 S h}{4} + \frac{P_0 S h}{2} = \frac{5P_0 S h}{4}$

(1)

$$PS(h+x) = nRT_1$$

$$\text{液体の高さは, } \left(\frac{h}{2} - x\right) + \frac{x}{2} = \frac{h-x}{2}$$

液体による圧力 (液体の高さ×液体の密度×重力の加速度) = 気体の圧力だから,

$$P = \frac{h-x}{2} \times \frac{2P_0}{gh} \times g = \frac{(h-x)P_0}{h} \quad \text{ただし } 0 \leq x \leq \frac{h}{2} \quad (\text{答})$$

(2)

$$P_0V_1 = P_0Sh = nRT_1$$

$$PS(h+x) = nRT$$

$$\frac{T}{T_1} = \frac{PS(h+x)}{P_0Sh} = \frac{h^2 - x^2}{h^2}, \quad T = \frac{h^2 - x^2}{h^2} T_1 \quad (\text{答})$$

(3)

$$\text{気体の体積は } V = S(h+x)$$

気体の高さが微小量 dx 変化すると, 体積は微小量 $dV = Sdx$ 変化する。それによって, 気体がす

る仕事 $dW = PdV = \frac{(h-x)SP_0}{h} dx$, したがって高さが h から $h+x$ まで変化したとき, 気体がし

$$\text{た仕事は, } W = \int_0^x PdV = \int_0^x \frac{(h-x)SP_0}{h} dx = SP_0 \left(x - \frac{x^2}{2h} \right) \quad (\text{答})$$

(4)

$$\text{気体の内部エネルギーは } U = \frac{3nRT}{2}$$

$$\text{気体の状態方程式は } PV = \frac{(h-x)P_0}{h} \times S(h+x) = \frac{(h^2 - x^2)P_0S}{h} = nRT$$

$$\text{したがって, } U = \frac{3(h^2 - x^2)P_0S}{2h}$$

$$\text{気体の高さが } dx \text{ 変化したとき, 気体のする仕事は } W = \frac{(h-x)SP_0}{h} dx$$

$$\text{内部エネルギーの変化は } \Delta U = \frac{3nR}{2} \Delta T = -\frac{3xP_0S}{h} dx$$

熱力学の第一法則 $Q = W + \Delta U$ を用いて

$$Q = \frac{(h-x)SP_0}{h} dx + \frac{-3xP_0S}{h} dx = \frac{(h-4x)P_0S}{h} dx$$

$$\text{気体を加熱するエネルギー } Q \text{ が } 0 \text{ になるのは } x = X = \frac{h}{4}$$

すなわち $x = \frac{h}{4}$ になると, 加熱をしなくても, 内部エネルギーを失いながら, 気体は膨張して

いく。

< 解説 >

単原子分子の理想気体の状態変化に関する問題で、は特段に難しいところはない素直な問題である。になると少々深い物理的思考力を必要とする。

(1)

液体の重力による圧力と気体の圧力が釣り合っていることから求める。密度の定義は前提である。

(2)

液体を $\frac{h}{2}$ 上昇させる仕事と、気体が膨張してする仕事とが等しいことが分かる。液体が乗った状態で気体が膨張するので、気体の圧力は変化しない(定圧変化)。

(3)

気体が吸収した熱量 = (気体の内部エネルギーの増加) + (気体のした仕事) の関係は的確に理解していなければならない。また、気体の内部エネルギーは $\frac{3}{2}nRT$ であることも同様である。問題は誘導的にできているから、(2)の結果を利用する。

(1)

液体がシリンダーの断面積 S から $2S$ へと上昇するので、液体の高さが小さくなる。したがって、気体に加わる圧力は低下していく。ゆっくり加熱しながら、気体を膨張させてゆくの、瞬間瞬間には気体の圧力と液体の圧力が釣り合っているとす。

(2)

問題文によれば、液体の圧力が減少することに対応して気体の圧力は減少しつつ膨張し、気体の温度は下がっていく。このことを理解しておかなければならない。そんな変化はあるのか?と疑問を感じる生徒もいるだろう。図6に3本の等温変化の曲線を示すが、温度が T_a から T_b, T_c へと低下しながら、圧力を下げ膨張していく曲線を示した。

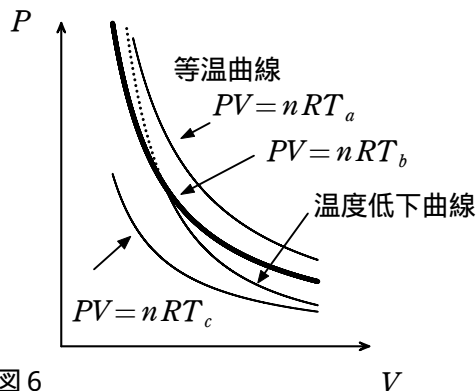


図6

(3)

図6の温度低下曲線に沿って、 PV が変化するので、気体がなす仕事はその曲線と x 軸との間の面積である。したがって、この PV 曲線下の面積を求める積分を実行すれば良い。

(4)

問題は誘導的にできているので、(1)~(3)までの結果を使いながら考えてゆく。しかし、これはなかなかの難問である。何が難しいのだろうか。ピストンが上昇するということは、気体が膨張することである。膨張は加熱によって起きる。膨張させるに必要な熱量が0になるということは、どうい

うことだろうか。

熱力学の第一法則によって、加えた熱は気体の内部エネルギーと気体のする仕事となる。温度が低下していくのだから、加えた熱は全て気体の仕事に変わる。しかも、膨張に必要な熱量が0なのに加熱すると、いっそう膨張が加速される。

このような理解の上で、「ピストンを上昇させるために必要な熱量が0になる」ということから、そのような条件になる x を求める。熱力学の第一法則を利用すると、失う内部エネルギーが気体のする仕事になる場合である。

< 総評 >

各問とも、難しい問題設定であるが、小問が基礎的なことからの確かな物理思考を要する問題まで、誘導的に構成されている。したがって、初めの数問は確実に解答すること。その上で、各問の最後の難しい問題に諦めずに取り組むようにしたい。

第1問

力学の問題。的確な物理的知識と思考力を持っているかどうか問われる。この運動がどのように進行していくかの全体像を描きながら解答していくと良い。誘導的にできているから、前の問題を後の問題に利用していくのだが、逆に後の問題から前の問題解決のヒントを得ることもできるだろう。したがって、まずは問題文全体を読んで、全体を理解して、前から順に取り組んでいくこと。当たり前だが。難易度は (1)~(4)(6)はB, (5)はA。

第2問

コンデンサー、ダイオード、電池からなる電気回路の問題。電池の極性をスイッチによって切り替え、コンデンサーに加わる電位と電荷を求める。この回路は問題文にもあるように、コッククロフト・ウォルトン回路と呼ばれ、高電圧を得る目的で使われる。はコンデンサーの充電の基礎を的確に理解していれば、確実にできる。問題は誘導的に構成されている。は、まともに考えると、なかなか難しいのだが、問題文を良く読んで求める結果を予測することによって、意外に容易な問題になるから、落ち着いて、難しいと諦めず食らいついていく姿勢が大事だ。

ここではスイッチで印加電圧を $\pm V$ と変化させているが、電源を交流とすることで、同様にコンデンサーを充電させ、高電圧を発生させることができる。100Vの交流電圧はピーク値 $\pm 100\sqrt{2}$ Vと変化するから、20個のコンデンサーを使えば $21 \times 100\sqrt{2} \approx 2.97$ kVの直流高電圧を発生する。こうした高電圧は、電子やイオンなどの荷電粒子の放出や加速などに利用される。身近なところでは、カメラのストロボ照明の放電電源がある。

難易度は はB, はA。

第3問

理想気体の状態変化の問題である。は定圧変化であり、特段に難しいところはない。では気体が膨張しつつ、圧力が次第に低下し、温度も低下していくという過程で、やや難しくなる。膨張につれ、加わる圧力が低下していくように設定されているので、膨張が急速に進む。難易度は がB, がA。

110620