2011（H23)年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）

第１問

座標平面において，点P(0，1)を中心とする半径1の円をCとする。aを$0<a<1$を満たす実数とし，直線$y=a(x+1)$とCとの交点をQ，Rとする。

(1)　△PQRの面積$S(a)$を求めよ。

＜解答＞

図１を参照しながら考える。

Pを通り直線$y=a(x+1)$に垂直な直線は$y=\dfrac{-x}{a}+1$

したがって，両直線の交点Mの座標は$\left(\dfrac{a-a^2}{1+a^2},\ \dfrac{a+a^2}{1+a^2}\right)$

$$\mathrm{PM}=\sqrt{\left(\frac{a-a^2}{1+a^2}\right)^2+\left(\frac{a+a^2}{1+a^2}-1\right)^2}=\frac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} \quad ①$$

$$\mathrm{QM}=\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{1+a^2}}=\sqrt{\frac{2a}{1+a^2}}$$

$$\triangle\mathrm{PQR}=\mathrm{PM}\times\mathrm{QM}=S(a)=\frac{(1-a)\sqrt{2a}}{1+a^2} \quad ②$$

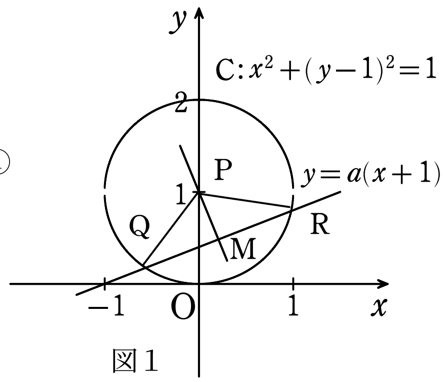

図１

(2)　aが$0<a<1$の範囲を動くとき，$S(a)$が最大となるaを求めよ。

＜解答＞

$f(a)=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{1+a^2}(1-a)$とおくと，

$$f'(a)=\frac{a^{-\frac{1}{2}}(1-a)}{2(1+a^2)}+a^{\frac{1}{2}}\frac{-1-a^2-2a(1-a)}{(1+a^2)^2}=\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{2(1+a^2)^2}\{(1-a)(1+a^2)+2a(a^2-2a-1)\}$$

$$=\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{2(1+a^2)^2}(a^3-3a^2-3a+1)=\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{2(1+a^2)^2}(a+1)(a-2-\sqrt{3})(a-2+\sqrt{3})$$

したがって，△PQRの面積は図２のように変化するから，$a=2-\sqrt{3}$で最大値をとる。

a	0		$2-\sqrt{3}$		1
$f'(a)$		＋	0	−	
$f(a)$		↗		↘	

図２

＜解説＞

題意は簡明だから，考え易い問題である。計算がやや煩瑣だから，ミスを起こさないこと。この問題の基礎は，円の弦と中心が作る三角形の面積とその最大値の条件を求めるという問題である。図３において，半径1の円の中心と弦が作る三角形の面積は，中心と弦の距離をsとすれば，

$\triangle \mathrm{PQR} = \mathrm{PM} \times \mathrm{QM} = s\sqrt{1-s^2}$

$g(s) = s\sqrt{1-s^2}$ とすれば，$g'(s) = (1-s^2)^{\frac{1}{2}} - s^2(1-s^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}(1-2s^2)$

$0 < s < 1$ で，$g(s)$ は図４のように変化するので，$s = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で△PQRは最大値をとる。

すなわち，△PQRは直角２等辺三角形で，その面積は $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ である。

さて，以上の議論を利用すると，①から，$\mathrm{PM} = \dfrac{1-a}{\sqrt{1+a^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき△PQRが最大になるのだから，$a^2 - 4a + 1 = 0$ から，$a = 2 - \sqrt{3}$ で△PQRは最大になることが分かる。この方法によれば，やや煩瑣となる②の微分を計算する必要がなくなる。

題意は簡明で結果も分かり易いので，難易度はC。

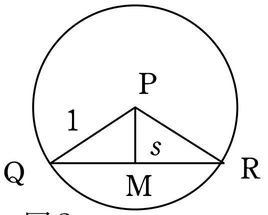

図３

s	0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		1
$g'(s)$		$+$		$-$	
$g(s)$		↗		↘	

図４

第２問

実数 x の少数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $[x]$ で表す。

実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を次のように順次定める。

注：ワープロの都合上，ここでは問題文で記号＜x＞とあるところを記号 $[x]$ で表現している。

（ｉ） $a_1 = [a]$

（ii） $a_n \fallingdotseq 0$ のとき，$a_{n+1} = \left[\dfrac{1}{a_n}\right]$

$a_n = 0$ のとき，$a_{n+1} = 0$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

＜解答＞

$a_1 = [a] = \sqrt{2} - 1$，$a_2 = \left[\dfrac{1}{a_1}\right] = \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right] = [\sqrt{2}+1] = (\sqrt{2}+1) - 2 = \sqrt{2} - 1$，

同様にして，$a_n = \sqrt{2} - 1$ $(n = 3, 4, \ldots)$

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

＜解答＞

$a_1 = [a] = a$ だから，$\dfrac{1}{3} < a < 1$ ①

$a_2 = \left[\dfrac{1}{a_1}\right] = \left[\dfrac{1}{a}\right] = a$ だから，k を適当な整数とすれば，$\left(\dfrac{1}{a} - k\right) = a$ ②

②から，$a^2+ka-1=0$，したがって①を考慮して$a=\dfrac{-k}{2}+\sqrt{\dfrac{k^2}{4}+1}$　　③

①から$\dfrac{1}{3}<\dfrac{-k}{2}+\sqrt{\dfrac{k^2}{4}+1}<1$，したがって$\sqrt{\dfrac{k^2}{4}+1}<1+\dfrac{k}{2}$，$\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{k}{2}\right)^2<\dfrac{k^2}{4}+1$，

したがって　$0<k<\dfrac{8}{3}$，したがって　$k=1,\ 2$

③から$k=1$で$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$k=2$で$a=-1+\sqrt{2}$

(3)　aが有理数であるとする。aを整数pと自然数qを用いて$a=\dfrac{p}{q}$と表すとき，q以上のすべての自然数nに対して，$a_n=0$であることを示せ。

＜解答＞

$p=k_1q+r_1$としてk_1，r_1は整数，$0\leqq r_1<q$とおくことができる。

すると$a_1=[a]=\left[\dfrac{p}{q}\right]=\left[k_1+\dfrac{r_1}{q}\right]=\dfrac{r_1}{q}$，$a_2=\left[\dfrac{1}{a_1}\right]=\left[\dfrac{q}{r_1}\right]$

$q=k_2r_1+r_2$としてk_2，r_2は整数，$0\leqq r_2<r_1<q$とおくことができる。

すると，$a_2=\left[\dfrac{1}{a_1}\right]=\left[\dfrac{q}{r_1}\right]=\left[k_2+\dfrac{r_2}{r_1}\right]=\dfrac{r_2}{r_1}$，$a_3=\left[\dfrac{1}{a_2}\right]=\left[\dfrac{r_1}{r_2}\right]$

$r_1=k_3r_2+r_3$としてk_3，r_3は整数，$0\leqq r_3<r_2<r_1<q$とおくことができる。

すると，$a_3=\left[\dfrac{1}{a_2}\right]=\left[\dfrac{r_1}{r_2}\right]=\left[k_3+\dfrac{r_3}{r_2}\right]=\dfrac{r_3}{r_2}$

このようにしていくと，$a_n=\dfrac{r_n}{r_{n-1}}$，$r_{n-2}=k_nr_{n-1}+r_n$，$0\leqq r_n\leqq q-n$となる。

したがって，少なくとも$n=q$となれば，$r_n=0$となり$a_n=0$となるから，題意によりq以上のすべての自然数nに対して，$a_n=0$となる。

ただし上記の議論において，$r_i=0$　$(i=1,2,\ldots,n-1)$の場合には，$a_i=0$　$(i<n)$となるから，当然$a_n=0$　$(q\leqq n)$である。

＜解説＞

数列の問題であり，題意を的確に捉えることが必要である。(1)は問題なく，即答したい。(2)は少々工夫が必要だ。数列の規則からaが満足すべき式を導き，aの範囲との関係から実数aを求める。

(3)はさらに工夫が必要だ。ここでは，p，qを整数の商と剰余に展開して表現することに気がつけば，a_nを漸化的に求めることができる。題意を的確に理解することも必要であり，数学的着想や論理性も問われるので，難易度はB＋。

第３問

Lを正定数とする。座標平面のx軸上の正の部分にある点$\mathrm{P}(t,\ 0)$に対し，原点Oを中心とし点Pを通る円周上を，Pから出発して反時計回りに道のりLだけ進んだ点を$\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$と表す。

(1)　$u(t)$，$v(t)$を求めよ。

＜解答＞

　図５を参照する。

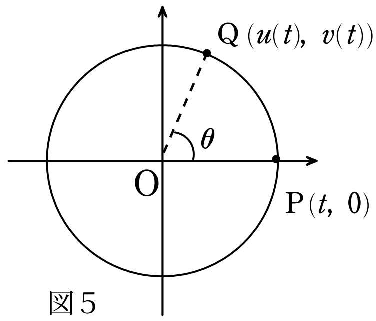

図５

$\angle$QOP$=\theta$とおく。$L=t\theta$，$\theta=\dfrac{L}{t}$だから，

$u(t)=t\cos\theta=t\cos\dfrac{L}{t}$，$v(t)=t\sin\theta=t\sin\dfrac{L}{t}$

(2)　$0<a<1$の範囲の実数aに対し，積分

$$f(a)=\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ。

＜解答＞

$u'(t)=\cos\dfrac{L}{t}+\dfrac{L}{t}\sin\dfrac{L}{t}$，$\{u'(t)\}^2=\cos^2\dfrac{L}{t}+\dfrac{2L}{t}\sin\dfrac{L}{t}\cos\dfrac{L}{t}+\dfrac{L^2}{t^2}\sin^2\dfrac{L}{t}$

$v'(t)=\sin\dfrac{L}{t}-\dfrac{L}{t}\cos\dfrac{L}{t}$，$\{v'(t)\}^2=\sin^2\dfrac{L}{t}-\dfrac{2L}{t}\sin\dfrac{L}{t}\cos\dfrac{L}{t}+\dfrac{L^2}{t^2}\cos^2\dfrac{L}{t}$

したがって，$\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2=1+\dfrac{L^2}{t^2}$，したがって，$f(a)=\displaystyle\int_a^1\sqrt{1+\frac{L^2}{t^2}}\,dt=\int_a^1\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}dt$

$r=\sqrt{t^2+L^2}$とおくと，$\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+L^2}}=\dfrac{t}{r}$，$dt=\dfrac{r}{t}dr$，

したがって$\displaystyle\int\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}dt=\int\frac{r^2}{t^2}dr=\int\left(1+\frac{L^2}{r^2-L^2}\right)dr=r+\frac{L}{2}\int\left(\frac{1}{r-L}-\frac{1}{r+L}\right)dr$

$$=r+\frac{L}{2}\log(r-L)-\frac{L}{2}\log(r+L)=r+\frac{L}{2}\log\frac{r-L}{r+L}=r+\frac{L}{2}\log\frac{(r-L)^2}{r^2-L^2}$$

したがって，$\displaystyle\int\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}dt=\sqrt{L^2+t^2}+L\log\frac{(\sqrt{t^2+L^2}-L)}{t}$

したがって，$f(a)=\displaystyle\int_a^1\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}dt=\left[\sqrt{t^2+L^2}+L\log\frac{(\sqrt{t^2+L^2}-L)}{t}\right]_a^1$

$$=\sqrt{1+L^2}+L\log(\sqrt{1+L^2}-L)-\sqrt{a^2+L^2}-L\log\frac{(\sqrt{a^2+L^2}-L)}{a}$$

(3)　極限$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$を求めよ。

＜解答＞

$\displaystyle\lim_{a\to+0}\log a=-\infty$だから，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=\lim_{a\to+0}\frac{-L\log\dfrac{(\sqrt{a^2+L^2}-L)}{a}}{\log a}$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{L\log a-L\log(\sqrt{a^2+L^2}-L)}{\log a}=L+\lim_{a\to+0}\left\{-\frac{L\log(\sqrt{a^2+L^2}-L)}{\log a}\right\}$$

ここで，$a\to+0$では，$\sqrt{a^2+L^2}\to L+\dfrac{a^2}{2}$だから，$\log(\sqrt{a^2+L^2}-L)=2\log a-\log 2$

したがって，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=L+\lim_{a\to+0}\frac{-L(2\log a-\log 2)}{\log a}=L-2L=-L$

<解説>

題意は簡明だから，取り組みやすい問題だ。(1)は問題なかろう。(2)の不定積分の求め方がポイントだ。置換積分のための変数変換を思い立つだろう。上で示したように，$r=\sqrt{t^2+L^2}$ という変換をすると，きれいに有理関数の積分に変換でき，さらに部分分数の積分に展開される。これを思いつくかどうかが分かれ道になってしまうが，無理関数の不定積分の例題は教科書に出ていて，このような置換積分，変数変換，部分分数展開が紹介されている。このあたりを勉強していれば大丈夫だろう。対数の計算などが的確にできることが必要だ。

(3)は(2)が正しく解けていることが前提だが，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\log a=-\infty$であることは当然知っておかねばならない。また$a\to+0$では，$\sqrt{a^2+L^2}\to L+\dfrac{a^2}{2}$という近似も教科書に出てくるので，活用したい。この近似は物理などでも多用されるが，忘れた場合は次のように確認すると良い。

$(\sqrt{a^2+L^2})^2=a^2+L^2$，$\left(L+\dfrac{a^2}{2}\right)^2=L^2+a^2+\dfrac{a^4}{4}$，$a\to+0$では，$a^2$より$a^4$が先に0に近づくから，

$a\to+0$で$\left(L+\dfrac{a^2}{2}\right)^2=a^2+L^2$の近似が成立する。難易度はB。

第４問

座標平面上の1点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$をとる。放物線$y=x^2$上の2点$\mathrm{Q}\,(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}\,(\beta,\ \beta^2)$を，3点P，Q，RがQRを底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQRの重心$\mathrm{G}\,(X,Y)$の軌跡を求めよ。

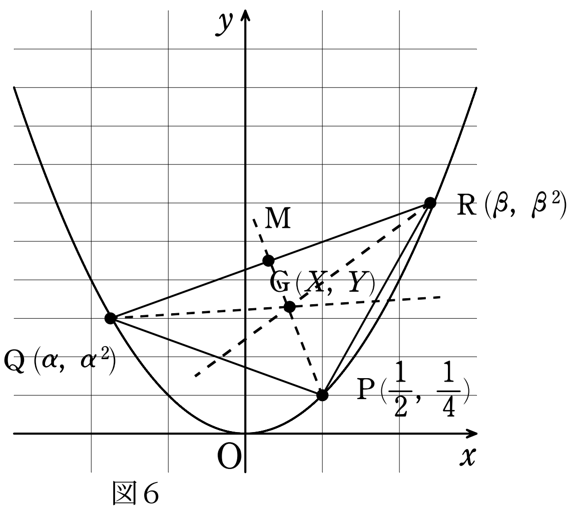

図６

<解答>

図６を参照して考える。PQ＝PRだから，

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2 \qquad ①$$

QRの中点をM$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$とすれば，重心GはPMを2：1に内分する点だから，

$$X=\frac{1}{3}\left(2\times\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{2}\right) \quad ②,\qquad Y=\frac{1}{3}\left(2\times\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\frac{1}{4}\right) \quad ③$$

①を変形すると，

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$=(\alpha+\beta-1)(\alpha-\beta)+\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{1}{2}\right)(\alpha^2-\beta^2)=0$$

$\alpha\fallingdotseq\beta$だから，$(\alpha+\beta-1)+\left(\alpha^2+\beta^2-\dfrac{1}{2}\right)(\alpha+\beta)=0$　　④

②から$\alpha+\beta=3X-\dfrac{1}{2}$，③から$\alpha^2+\beta^2=3Y-\dfrac{1}{4}$，これらを④に代入すると，

重心Gの軌跡として，$\left(3X-\dfrac{1}{2}\right)\left(3Y+\dfrac{1}{4}\right)=1$　　⑤

ただし，明らかに$X<\dfrac{1}{2}$，また$\alpha+\beta>0$だから，$X>\dfrac{1}{6}$，したがって$\dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}$

⑤を図示すると，図７のようになる。

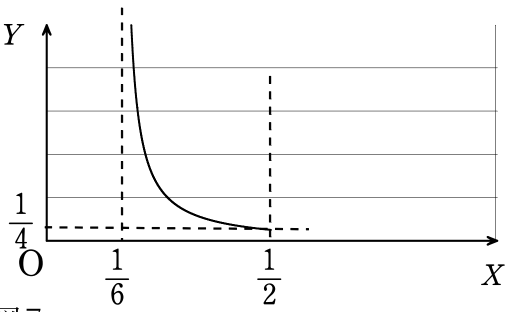

図７

＜解説＞

題意は簡明だから，図を描いてていねいに計算すれば良い。ポイントは重心の座標X, Yをα，βによって表現し，与えられた条件を用いてX, Yの関係式を求めることである。重心の座標を中線の交点として計算しても良いが，できれば中線を2：1に内分する点として記憶しておきたい。時間を節約できる。題意は簡明で，考え方も容易だから，難易度はC。

第５問

p，qを2つの正の整数とする。整数a，b，cで条件

$$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p, \qquad b\leqq c\leqq a$$

を満たすものを考え，このようなa，b，cを$[a,\ b\ ;\ c]$の形に並べたものを$(p,\ q)$パターンと呼ぶ。

各$(p,\ q)$パターン$[a,\ b\ ;\ c]$に対して

$$w([a,\ b\ ;\ c])=p-q-(a+b)$$ とおく。

(1)　$(p,\ q)$パターンのうち，$w([a,\ b\ ;\ c])=-q$となるものの個数を求めよ。

また，$w([a,\ b\ ;\ c])=p$となる$(p,\ q)$パターンの個数を求めよ。

＜解答＞

$w([a,\ b\ ;\ c])=p-q-(a+b)=-q$だから，$p=a+b$，しかるに$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$だから，$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq a+b$となって，$b=0$，$a=p$となる。したがって，$0\leqq c\leqq p$だから，$c$は$(p+1)$個ある。したがって，$w([a,\ b\ ;\ c])=-q$となるものの個数は$(p+1)$個である。

$w([a,\ b\ ;\ c])=p=p-q-(a+b)$だから，$-q=a+b$，しかるに$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$だから，$a+b\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$となって，$a=0$，$b=-q$となる。したがって，$-q\leqq c\leqq 0$だから，$c$は$(q+1)$個ある。したがって，$w([a,\ b\ ;\ c])=p$となる$(p,\ q)$パターンの個数は　$(q+1)$個である。

以下$p=q$の場合を考える。

(2)　sを整数とする。$(p,\ q)$パターンで$w([a,\ b\ ;\ c])=-p+s$となるものの個数を求めよ。

＜解答＞

$w([a,\ b\ ;\ c])=-p+s=p-q-(a+b)$だから，$a+b=p-s$，したがって$b=p-s-a$

$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$に代入すると，$-p\leqq p-s-a\leqq 0\leqq a\leqq p$,

したがって，$p-s\leqq a\leqq 2p-s$　　①，$0\leqq a\leqq p$　　②

①，②を満足する$[a,\ b\ ;\ c]$の個数を求める。

ｉ) $p<p-s$，すなわち$s<0$のとき

①，②を満足するaは存在しないので，個数は0

ii) $0\leqq p-s\leqq p$，すなわち$0\leqq s\leqq p$のとき

$(2p-s)-p=p-s\geqq 0$だから，$p-s\leqq a\leqq p$

さらに$b\leqq c\leqq a$だから，$p-s-a\leqq c\leqq a$

$(a,\ c)$は図８－１の台形内（線上を含む）の整数の座標だから，その数は台形の面積に等しい。

すなわち$\dfrac{\{p-(p-s)+1\}\{(p-s+1)+(p+s+1)\}}{2}$

$=(s+1)(p+1)$個

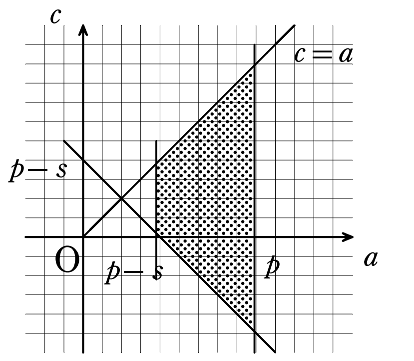

図８－１

iii) $0\leqq 2p-s$かつ$p-s<0$，すなわち$p<s\leqq 2p$のとき

$(2p-s)-p=p-s<0$だから，$0\leqq a\leqq 2p-s$

さらに$b\leqq c\leqq a$だから，$p-s-a\leqq c\leqq a$

$(a,\ c)$は図８－２の台形内（線上を含む）の整数の座標だから，その数は台形の面積に等しい。

すなわち$\dfrac{(2p-s+1)\{(s-p+1)+(3p-s+1)\}}{2}$

$=(2p-s+1)(p+1)$個

iv) $2p-s<0$すなわち$2p<s$のとき

①，②を満足するaは存在しないので，個数は0

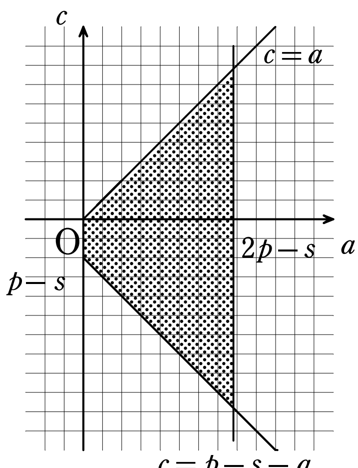

図８－２

(3)　$(p,\ q)$パターンの総数を求めよ。

＜解答＞

$-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$,　　$b\leqq c\leqq a$を満足する整数の$(a,\ b,\ c)$の点数を求めれば良い。

$k\leqq c\leqq j$，$k=-p,\ -p+1,\ldots,\ -1,\ 0$，$j=0,\ 1,\ldots,\ p-1,\ p$とおくことができる。

$k \leqq c \leqq j$を満足するcの個数をN_{kj}とおけば，$N_{kj}=j-k+1$

k，jの変化範囲のcの個数Mが求める$(p,\ q)$パターンの総数である。

$$M=\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=-p}^{0}N_{kj}=\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=-p}^{0}(j-k+1)=\sum_{j=0}^{p}\sum_{k=p}^{0}(j+k+1)=\sum_{j=0}^{p}\left\{(j+1)(p+1)+\sum_{k=p}^{0}k\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{p}\left\{(j+1)(p+1)+\frac{p(p+1)}{2}\right\}=(p+1)\sum_{j=0}^{p}\left(j+1+\frac{p}{2}\right)=(p+1)\left\{\left(1+\frac{p}{2}\right)(p+1)+\sum_{j=0}^{p}j\right\}$$

$$=(p+1)\left\{\left(1+\frac{p}{2}\right)(p+1)+\frac{p(p+1)}{2}\right\}=(p+1)^2\left(1+\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\right)=(p+1)^3$$

したがって$(p,\ q)$パターンの総数は$(p+1)^3$

＜解説＞

難解な問題ではない。数列の問題に帰着する。しかし題意を的確に捉えることが難しい。むしろ題意を難しく表現しようとする意図を感じる。「$[a,\ b\ ;\ c]$の形に並べたものを$(p,\ q)$パターン」という表現の意味を理解することに躓くと先が見えなくなる。$b\ ;\ c$とは何か？私は，初め$b\ ;\ c$を$b:c$と間違え，$\dfrac{b}{c}$を意味すると考え，$\dfrac{b}{c}$が同じものは，同じ$(p,\ q)$パターンだと考えてしまったりした。すると$(p,\ q)$パターンの個数を数えることができなくなる。混乱させられる。単に$[a,\ b,\ c]$なら，混乱しない。ここでは，このように考えよう。

(1)ではa，bが定まり，cの範囲が定まるので，cの個数に相当するパターンの個数がある。(2)は題意の把握は問題なかろう。aの範囲が定まり，bはaによって一意に定まる。cはaの１次直線によって定まる範囲に存在するので，その範囲に存在する整数$(a,\ c)$の個数がパターンの個数である。

上の解答では図８の領域の面積を求めたが，級数計算によって求める方法もある。

ii)$p-s \leqq a \leqq p$，$p-s-a \leqq c \leqq a$を満足する整数の組$(a,\ c)$の個数を求める。

$p-s-k \leqq c \leqq k \quad (k=p-s,\ p-s+1,\ ...,\ p-1,\ p)$とおくことができる。

$p-s-k \leqq c \leqq k$を満たすcの個数をN_kとおけば，$N_k=2k-p+s+1$

kが$p-s$からpまで1づつ変化したときのN_kの個数Mが求める整数$(a,\ c)$の個数

$$M=\sum_{k=p-s}^{p}N_k=\sum_{k=p-s}^{p}(2k-p+s+1)=(s+1-p)(s+1)+2\sum_{k=p-s}^{p}k$$

$$=(s+1-p)(s+1)+(2p-s)(s+1)=(s+1)(p+1)$$

iii)$0 \leqq a \leqq 2p-s$，$p-s-a \leqq c \leqq a$を満足する整数の組$(a,\ c)$の個数を求める。

$p-s-k \leqq c \leqq k \quad (k=0,\ 1,\ ...,\ 2p-s-1,\ 2p-s)$とおくことができる。

$p-s-k \leqq c \leqq k$を満たすcの個数をN_kとおけば，$N_k=2k-p+s+1$

kが0から$2p-s$まで1づつ変化したときのN_kの個数Mが求める整数の組$(a,\ c)$の個数

$$M=\sum_{k=0}^{2p-s}N_k=\sum_{k=0}^{2p-s}(2k-p+s+1)=(s+1-p)(2p-s+1)+2\sum_{k=0}^{2p-s}k$$

$$=(s+1-p)(2p-s+1)+(2p-s)(2p-s+1)=(2p-s+1)(p+1)$$

(3)で悩む生徒が多いだろう。(1)，(2)と(3)の関係が見えない。ここにとらわれると，問題が難しくなる。なぜ難しくなるかといえば，再び「$[a,\ b\ ;\ c]$の形に並べたものを$(p,\ q)$パターン」とい

うことが良く分からないから躓くだろう。上記のように単純に$[a, b, c]$という表現と考えれば，考え方は容易になる。

この問題をなぜこのような表現で出題したのか，首をひねった。単純には，ある条件を満足する三つの整数の組の数を求めるという問題である。あえて「$[a, b ; c]$の形に並べたものを(p, q)パターン」という分かり難い表現を使うことによって，問題の本質を見抜く力を見たかったのだろうか。

難易度はA－。

第６問

(1)　x, yを実数とし，$x>0$とする。tを変数とする2次関数$f(t)=xt^2+yt$の$0 \leqq t \leqq 1$における最大値と最小値の差を求めよ。

<解答>

$f'(t)=2xt+y$，$t=\dfrac{-y}{2x}$で$f'(t)=0$となる。

したがって，$\dfrac{-y}{2x}$の値によって，$f(t)$の最大値，最小値は以下のようになる。

(a)　$\dfrac{-y}{2x} \leqq 0$のとき，すなわち$0 \leqq y$のとき，

最小値は$f(0)=0$，最大値は$f(1)=x+y$，最大値と最小値の差は　$x+y$

(b)　$0<\dfrac{-y}{2x} \leqq \dfrac{1}{2}$のとき，すなわち，$-x \leqq y<0$のとき，

最小値は$f\left(\dfrac{-y}{2x}\right)=-\dfrac{y^2}{4x}$，最大値は$f(1)=x+y$，最大値と最小値の差は　$x+y+\dfrac{y^2}{4x}$

(c)　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{-y}{2x} \leqq 1$のとき，すなわち，$-2x \leqq y<-x$のとき，

最小値は$f\left(\dfrac{-y}{2x}\right)=-\dfrac{y^2}{4x}$，最大値は$f(0)=0$，最大値と最小値の差は　$\dfrac{y^2}{4x}$

(d)　$1<\dfrac{-y}{2x}$のとき，すなわち，$y<-2x$のとき，

最小値は$f(1)=x+y$，最大値は$f(0)=0$，最大値と最小値の差は　$-(x+y)$

(2)　次の条件を満たす点(x, y)全体からなる座標平面内の領域をSとする。

$x>0$かつ，実数zで$0 \leqq t \leqq 1$の範囲の全ての実数tに対して

$0 \leqq xt^2+yt+z \leqq 1$

を満たすようなものが存在する。Sの概形を図示せよ。

<解答>

$-z \leqq xt^2+yt \leqq 1-z$だから，$xt^2+yt$の最大値が$1-z$，最小値が$-z$である。したがって，実数$z$にかかわらず，(1)で求めた最大値と最小値の差が1以下の領域がSである。したがって

(a)　$0 \leqq y$のとき，$0 \leqq x+y \leqq 1$　　①

(b)　$-x \leqq y < 0$のとき，$0 \leqq x + y + \dfrac{y^2}{4x} \leqq 1$　　②

(c)　$-2x \leqq y < -x$のとき，$0 \leqq \dfrac{y^2}{4x} \leqq 1$　　③

(d)　$y < -2x$のとき，$0 \leqq -(x+y) \leqq 1$　　④

①～④の領域を図示すると図８のようになる。すなわち点A，B，C，D，Eを結ぶ線によって囲まれた領域である。

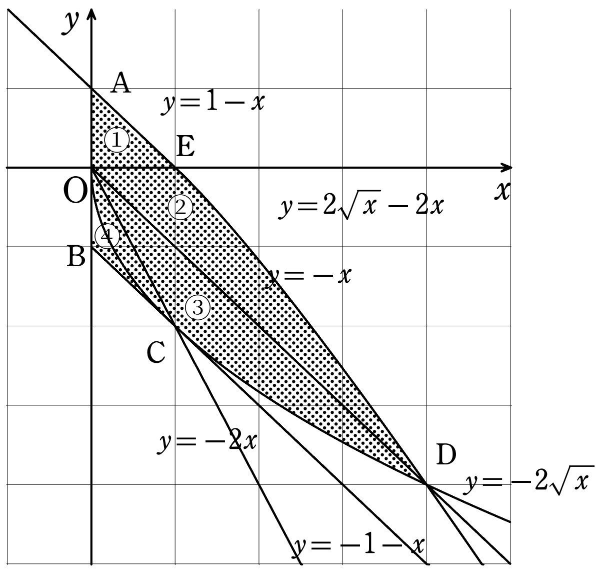

図８

(3)　次の条件を満たす点$(x,\ y,\ z)$全体からなる座標空間内の領域をVとする。

$0 \leqq x \leqq 1$かつ，$0 \leqq t \leqq 1$の範囲の全ての実数tに対して，$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$が成り立つ。

Vの体積を求めよ。

＜解答＞

条件を満たす$(x,\ y,\ z)$の範囲を求める必要がある。

$t=1$で$0 \leqq x+y+z \leqq 1$，$t=0$で$0 \leqq z \leqq 1$となる。さらに，$-z \leqq xt^2 + yt \leqq 1-z$だから，(1)で求めた最小値と最大値がこの範囲に入る必要がある。

(a)　$0 \leqq y$のとき，$-z \leqq 0$，$x+y \leqq 1-z$，したがって$x+y+z \leqq 1$

すなわち，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y$，$0 \leqq z \leqq 1$，$x+y+z \leqq 1$を満たす領域がVの一部である。これは，三角錐の体積だから，$V_a = \dfrac{1 \times 1}{2} \times 1 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

(b)　$-x \leqq y < 0$のとき，$-z \leqq \dfrac{-y^2}{4x}$，$x+y \leqq 1-z$，

すなわち$0 \leqq x \leqq 1$，$-x \leqq y < 0$，$\dfrac{y^2}{4z} \leqq x$，$y \leqq 1-z-x$を満たす領域がVの一部である。

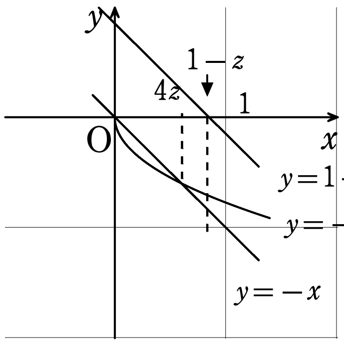

図９－１(a)　$0 \leqq z < \dfrac{1}{5}$

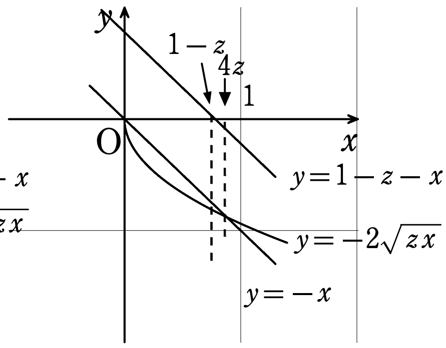

図９－１(b)　$\dfrac{1}{5} \leqq z < \dfrac{1}{4}$

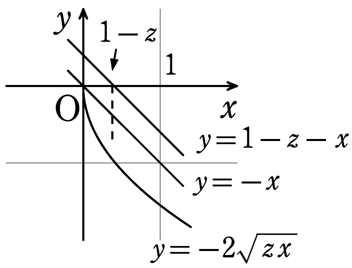

図９－１(c)　$\dfrac{1}{4} \leqq z \leqq 1$

zでの断面（xy平面）の面積を$S(z)$とすれば，$V=\int_0^1 S(z)dz$

図９－１に示すように，zの値に応じて，条件を満たす$(x,\ y)$の領域が異なる。

$$S(z)=\frac{(4z)^2}{2}+\int_{4z}^{1-z} 2\sqrt{zx}\,dx+\int_{1-z}^{1}(1-z-x+2\sqrt{zx})dx$$

$$=8z^2+\left[\frac{4\sqrt{z}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{4z}^{1-z}+\left[(1-z)x-\frac{x^2}{2}+\frac{4\sqrt{z}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{1-z}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{z}-\frac{19z^2}{6}\qquad\left(0\leqq z<\frac{1}{5}\right)$$

$$S(z)=\frac{(1-z)^2}{2}+(1-z)(5z-1)+\int_{4z}^{1}(1-z-x+2\sqrt{zx})dx$$

$$=\frac{(1-z)^2}{2}-5z^2+6z-1+\left[(1-z)x-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\sqrt{z}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_{4z}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{z}-\frac{19z^2}{6}\qquad\left(\frac{1}{5}\leqq z<\frac{1}{4}\right)$$

$$S(z)=\frac{1-z^2}{2}\qquad\left(\frac{1}{4}\leqq z\leqq 1\right)$$

したがって，$V_b=\int_0^1 S(z)dz=\left[\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}-\frac{19}{18}z^3\right]_0^{\frac{1}{4}}+\left[\frac{z}{2}-\frac{z^3}{6}\right]_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{11}{36}$

(c)　$-2x \leqq y < -x$のとき，$-z \leqq -\dfrac{y^2}{4x}$，$0 \leqq 1-z$，

すなわち$0 \leqq x \leqq 1$，$-2x \leqq y < -x$，$\dfrac{y^2}{4z} \leqq x$，$0 \leqq z \leqq 1$を満たす領域がVの一部である。

条件を満たす$(x,\ y)$は図９－２に示すようになる。

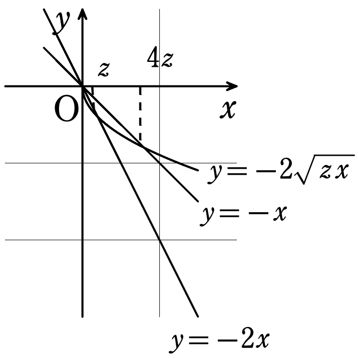

図９－２(a)　$0 \leqq z < \frac{1}{4}$

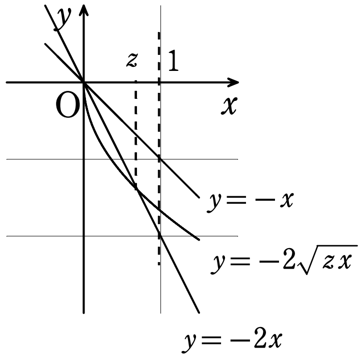

図９－２(b)　$\frac{1}{4} \leqq z \leqq 1$

$$S(z)=\int_0^z(-x+2x)dx+\int_z^{4z}(-x+2\sqrt{zx})dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^z+\left[\frac{-x^2}{2}+\frac{4\sqrt{z}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_z^{4z}=\frac{7z^2}{3} \qquad \left(0 \leqq z < \frac{1}{4}\right)$$

$$S(z)=\int_0^z(-x+2x)dx+\int_z^{1}(-x+2\sqrt{zx})dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^z+\left[\frac{-x^2}{2}+\frac{4\sqrt{z}}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_z^{1}=\frac{-z^2}{3}+\frac{4\sqrt{z}}{3}-\frac{1}{2} \qquad \left(\frac{1}{4} \leqq z \leqq 1\right)$$

したがって，$V_c=\int_0^1 S(z)dz=\left[\frac{7z^3}{9}\right]_0^{\frac{1}{4}}+\left[\frac{-z^3}{9}+\frac{8}{9}z^{\frac{3}{2}}-\frac{z}{2}\right]_{\frac{1}{4}}^1=\frac{11}{36}$

(d)　$y<-2x$のとき，$-z \leqq x+y$，$0 \leqq 1-z$

すなわち$0 \leqq x \leqq 1$，$y<-2x$，$0 \leqq x+y+z$，$0 \leqq z \leqq 1$を満たす領域がVの一部である。

条件を満たす$(x,\ y)$はzにかかわらず図９－３のようになるから，$S(z)=\frac{z^2}{2}$

$$V_d=\int_0^1 S(z)dz=\left[\frac{z^3}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

以上をまとめると，$V=V_a+V_b+V_c+V_d=\frac{1}{6}+\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+\frac{1}{6}=\frac{17}{18}$

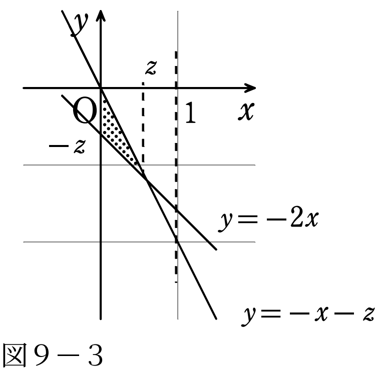

図９－３

<解説>

一見簡単のようだが，場合分けが多く骨の折れる問題である。(1)は問題なかろう。tの2次関数の最大値最小値問題である。$f'(t)=0$となるtと$0\leqq t\leqq 1$の関係によって，最大値，最小値が変わるから，極値を与えるtによって，場合分けして考える必要がある。

(2)は$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$を満足する実数zが存在すれば良いのだから，(1)の結果を援用する。すなわち，$min\leqq xt^2+yt\leqq max$だから，$0\leqq xt^2+yt-min\leqq max-min$となる。したがって，$max-min\leqq 1$であれば，$-min=z$として，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$を満足する。したがって，(1)で求めた最大値と最小値の差が1以下であるような領域が求めるSとなる。

(3)では，zに応じて，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$を満たす領域を考える必要がある。ここでは，$0\leqq x\leqq 1$という条件がついているので，考え易い。(1)で求めた，最大値，最小値とzの関係から，条件を満たす領域$(x,\ y)$をzの値に応じて求める。この領域の面積をzの関数として求め，これを$0\leqq z\leqq 1$の範囲で積分することによって，体積を求める。

場合分けが多く，式のグラフも丁寧に描かないと不正確になって理解を困難にするので，時間のかかる問題である。難易度はA。

<総評>

全体として的確な数学力を問う骨のある問題が揃っている。しかし飛躍的な着想や思考力を要する難問ではない。時間を要する煩瑣な問題が含まれているから，題意が簡明な問題から確実に解答して行きたい。たとえば第１，４，３，２問の順序で確実に解答して，５，６問に取り組んで，70%前後の得点を得たい。

第１問

図形の方程式と微分積分の問題。題意は簡明で特段の着想を必要としないので難易度はＣで，完答したい。

第２問

数列の問題で，まずは題意を的確に把握することを要し，解答には着想と論理性を必要とするので，難易度はＢ＋。完答はできなくても，80%以上の解答を期待したい。

第３問

不定積分のための置換積分や部分分数展開，極限における近似など数学技巧を要するが、題意は簡明だから，計算ミスのないように完答したい。難易度はＢ。

第４問

題意は簡明な図形と方程式の問題。重心座標の性質は頭に入っていること。計算ミスのないように完答したい。難易度はＣ。

第５問

整数の領域の問題で，級数計算などを含む。題意の表現がことさら難しくて戸惑うが，それを超える数学力を求めるのだろうか。本質的には良い問題だが，題意表現が不適切だと思う。食らいついて，80%以上得点したい。素直な題意表現なら，難易度はＢだが，題意把握に戸惑うことを考慮してＡ－。

第６問

題意把握に考察を必要とし，場合分けが多く，積分計算などの計算量も多いので，なかなか骨の折れる問題だ。解答のための特別の着想や難しい計算が必要というわけではないので，難問ではないが，

時間がかかる。ミスしないように焦らず取り組んで，80%以上の得点をあげたい。難易度はA。

数学（文科）

第１問

xの3次関数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$が，3つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$$

を全て満たしているとする。このような$f(x)$の中で定積分

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$$

を最小にするものを求め，そのときのIの値を求めよ。ただし，$f''(x)$は$f'(x)$の導関数を表す。

＜解答＞

$f(1)=a+b+c+d=1$　①

$f(-1)=-a+b-c+d=-1$　②

①＋②から，$b+d=0$　③

$a+c=1$　④

$$\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=\left[\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+dx\right]_{-1}^{1}=\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d+\frac{b}{3}-\frac{c}{2}+d=\frac{2b}{3}+2d=1 \quad ⑤$$

③，⑤から$b=\dfrac{-3}{4}$，$d=\dfrac{3}{4}$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c,\ f''(x)=6ax+2b=6ax-\frac{3}{2},\ \{f''(x)\}^2=36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}$$

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}\right)dx=\left[12a^2x^3-9ax^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{3a^2}{2}-\frac{9a}{4}+\frac{9}{8}+12a^2+9a+\frac{9}{4}=\frac{27a^2}{2}+\frac{27a}{4}+\frac{27}{8}=\frac{27}{2}\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}$$

したがって，$a=\dfrac{-1}{4}$のとき$I=\dfrac{81}{32}$となって最小値をとる。このとき，④から$c=\dfrac{5}{4}$で，

$$f(x)=\frac{-x^3}{4}-\frac{3x^2}{4}+\frac{5x}{4}+\frac{3}{4}=\frac{-1}{4}(x^3+3x^2-5x-3)$$，である。

＜解説＞

題意は簡明であり，特段の着想も必要としないので，ていねいに計算して行けば良い。難易度はC

第２問（理科の第２問 (1) (2)に同じ。理科の(3)はない。解答と解説は理科を参照のこと）

第３問（理科第５問と(1)は同じ，(2)は少々変更，理科の(3)は文科にはない）

p, qを2つの正の整数とする。整数a, b, cで条件

$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$,　　$b \leqq c \leqq a$

を満たすものを考え，このようなa, b, cを$[a,\ b\ ;\ c]$の形に並べたものを$(p,\ q)$パターンと呼ぶ。

各$(p,\ q)$パターン$[a,\ b\ ;\ c]$に対して

$w([a,\ b\ ;\ c]) = p - q - (a+b)$　とおく。

(1)（理科の第５問 (1) に同じ。解答と解説は理科を参照のこと）

(2)（理科の第５問 (2)を少々変更した問題）

以下$p=q$の場合を考える。

sをp以下の整数とする。$(p,\ q)$パターンで$w([a,\ b\ ;\ c]) = -p+s$となるものの個数を求めよ。

＜解答＞

$w([a,\ b\ ;\ c]) = p - q - (a+b) = -p+s$だから，$b = p-s-a$　　①

①を$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$に代入すると$-p \leqq p-s-a \leqq 0 \leqq a \leqq p$,

したがって$0 \leqq p-s \leqq a \leqq 2p-s$　　②，$0 \leqq a \leqq p$　　③

②，③を満足するaが存在するためには，②の上限あるいは下限が③のaの条件を満足する必要がある。すなわち

$0 \leqq 2p-s \leqq p$，したがって$p \leqq s \leqq 2p$　　④

あるいは$0 \leqq p-s \leqq p$，したがって$0 \leqq s \leqq p$　　⑤

④は題意から成立しない。

ｉ)$s \leqq 0$の場合は，条件を満足するaは存在しないから個数は0

ⅱ)$0 \leqq s \leqq p$の場合

②，③を満足するaの条件は，$p-s \leqq a \leqq p$　　⑥

$b \leqq c \leqq a$に①を代入して，$p-s-a \leqq c \leqq a$　　⑦

⑥，⑦を満たす$(a,\ c)$の整数の座標の数が求める個数。

図１に示す台形の中（境界線を含む）の$(a,\ c)$の整数の座標の数は台形の面積に等しい。

台形の面積は$\dfrac{(s+1)(p-s+1+s+p+1)}{2} = (s+1)(p+1)$

したがって求める個数は$(s+1)(p+1)$個

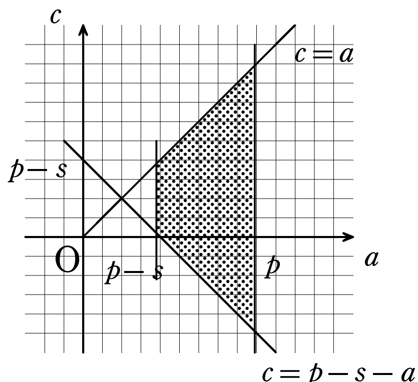

図１

＜解説＞

理科の解説を参照のこと。

第４問（理科第４問に同じ。解答と解説は理科を参照のこと）

＜総評＞

第１問

難易度はCだから，完答したいところだ。

第２問

理科にある(3)はないので，難易度はＣとなり，完答したいところだ。

第３問

理科にある(3)はないので，難易度はＢ－となり，完答したいところだ

第４問

文系でもこの程度の問題は確実に解けるようでありたい。難易度はＣ

110429