1

(30 点)

次の各問に答えよ.

(1) 2 つの曲線 $y = x^4$ と $y = x^2 + 2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ.

(2) n を 3 以上の整数とする. 1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある. これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて, 札を 1 枚ずつ 3 回取り出し, 取り出した順にその番号を X_1, X_2, X_3 とする. $X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ. ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする.

2

(30 点)

正四面体 OABC において, 点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる. ただし P, Q, R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする. △PQR が正三角形ならば, 3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ.

3

(30 点)

実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

4 (30 点)

次の命題 (p), (q) のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ．

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが $60°$ である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である．

(q)　$\triangle \mathrm{ABC}$ と $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ において，$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$，$\mathrm{BC} = \mathrm{B'C'}$，$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{A'}$ ならば，これら 2 つの三角形は合同である．

5 (30 点)

次の条件 (*) を満たす正の実数の組 $(a,\ b)$ の範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

(*)　$\cos a\theta = \cos b\theta$ かつ $0 < \theta \leqq \pi$ となる θ がちょうど 1 つある．

問題は，このページで終わりである．