1

(35 点)

次の各問に答えよ.

(1) a が正の実数のとき $\lim_{n \to \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1 + x^2}\, dx$ の値を求めよ.

2

(30 点)

正四面体OABCにおいて, 点P, Q, Rをそれぞれ辺OA, OB, OC上にとる. ただしP, Q, Rは四面体OABCの頂点とは異なるとする. △PQRが正三角形ならば, 3辺PQ, QR, RPはそれぞれ3辺AB, BC, CAに平行であることを証明せよ.

3

(30 点)

実数x, yが条件$x^2 + xy + y^2 = 6$を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

4 (35 点)

(1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ.

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ.

5 (35 点)

次の命題 (p)，(q) のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ.

(p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが $60°$ である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である.

(q) $\triangle$ABC と $\triangle$ABD において，AC $<$ AD かつ BC $<$ BD ならば，$\angle$C $>$ $\angle$D である.

6 (35 点)

さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする．さらに

$$Y_1=X_1,\quad Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2,\cdots,n)$$

によって Y_1，Y_2，…，Y_n を定める.

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ.

問題は，このページで終わりである.