

1 xy 平面上に放物線 $C: y = -x^2$ がある。 $P(a, b)$ を C 上の点とする。放物線 $D: y = x^2 + px + q$ は点 P を通り、点 P における C の接線と D の接線は一致している。次の問いに答えよ。

- (1) b, p, q をそれぞれ a で表せ。
- (2) $a = 1$ のとき、放物線 C と D および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 点 $P(a, b)$ が放物線 C 上を動くとき、放物線 D の頂点の軌跡を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 3$ は無理数であることを示せ。

(2) $\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 3^{26} の桁数を求めよ。

3 四面体 $OABC$ において、 $OA \perp OB$, $OA = 3$, $OB = 4$, $OC = 5$ とする。 $\triangle OAB$ の重心を G とし、直線 CG は $\triangle OAB$ を含む平面に垂直とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{CG} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

4 箱の中に1から9までの異なる整数が1つずつ書かれたカードが9枚入っている。「箱からカードを1枚引き、カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を3回繰り返す。記録された3つの整数の最小値を m 、最大値を M とする。次の問いに答えよ。

- (1) $m = M$ となる確率を求めよ。
- (2) $5 < m$ となる確率および $M < 5$ となる確率を求めよ。
- (3) $m \leq 5 \leq M$ となる確率を求めよ。