2012（H24）年度　新潟大学　前期　入学試験　数学解説

＜理・医・歯・工学部＞

$\boxed{1}$　平面上の点P$(x，y)$を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって定められる点Q$(X，Y)$に移す移動を考える。ここで，aは実数とする。

楕円C：$x^2+4y^2=1$が与えられているとき，次の問いに答よ。

(1)　点P$(x，y)$が楕円C上を動くとき，点Q$(X，Y)$は円D：$X^2+Y^2=1$上を動くとする。このときaの値を求めよ。

(2)　点P$(x，y)$が楕円C上を動くとき，点Q$(X，Y)$は直線l：$Y=pX+q$上を動くとする。
ただし$p，q$は実数とする。このときaおよび$p，q$の値を求めよ。

(3)　(2)において，点P$(x，y)$が楕円C上を動くとき，点Q$(X，Y)$のXの最大値，最小値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$X=x+ay$，$Y=ax+2y$

$X^2+Y^2=(x+ay)^2+(ax+2y)^2=1$だから，$x^2+4y^2+(x^2+y^2)a^2+6xya=1$

したがって，$(x^2+y^2)a^2+6xya=0$，点P$(x，y)$が楕円C上を動いても，この式が成立するためには，

$a=0$　　（答）

(2)

$Y=pX+q$から，$ax+2y=p(x+ay)+q$，したがって，$(p-a)x+(ap-2)y+q=0$

点P$(x，y)$が楕円C上を動いても，この式が成立するためには，

$p=a$，$ap=a^2=2$，$p=a=\pm\sqrt{2}$，$q=0$　　（答）

(3)

$p=a=\sqrt{2}$のとき，$X=x+\sqrt{2}y$，$x=X-\sqrt{2}y$，これを楕円Cの方程式に代入すると，

$(X-\sqrt{2}y)^2+4y^2=1$，yの多項式として整理すると，$6y^2-2\sqrt{2}Xy+X^2-1=0$

この式を満足するyの実数値が存在しなければならない。その条件は2次方程式の解の判別式が正，

すなわち，$(-\sqrt{2}X)^2-6(X^2-1)\geqq 0$，したがって，$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\leqq X\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$p=a=-\sqrt{2}$のとき，$X=x-\sqrt{2}y$，$x=X+\sqrt{2}y$，これを楕円Cの方程式に代入すると，

$(X+\sqrt{2}y)^2+4y^2=1$，yの多項式として整理すると，$6y^2+2\sqrt{2}Xy+X^2-1=0$

同様に，判別式は，$(\sqrt{2}X)^2-6(X^2-1)\geqq 0$で，$p=a=\sqrt{2}$のときと同じになる。

以上によって，Xの最小値は$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，最大値は$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　（答）

＜解説＞

行列の計算から出発するが，変数変換による2次式の取り扱いの問題。

(1)

行列による(x, y)から(X, Y)への1次変換の演算を知っていなければならない。(X, Y)が満たす式に(x, y)を代入して，成立する条件を考えればよい。

(2)

(1)と同じ。

(3)

(x, y)が満たす2次式において，xの代わりにXの1次式を代入する。すると，yの2次式が求まる。yが実数であるためには，Xの値に条件が課せられる。Xがその条件を満足すれば，yの実数値が存在するはずであり，満足しなければyには実数値は存在しない。yに実数値が存在すれば，xにも実数値が存在する。

そのXの条件は，yに関する2次方程式が実数解をもつ条件，すなわち判別式が正である。そこから，最大値，最小値を求める。

$\boxed{2}$ 次の問いに答よ。

(1) k，nは不等式 $k \leqq n$ を満たす自然数とする。このとき，

$$2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1) \leqq n^k k!$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数nに対して，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

(3) $\dfrac{9}{19} < \log_{10}3 < \dfrac{1}{2}$が成り立つことを示せ。

＜解答＞

(1)

k，nは不等式 $k \leqq n$ を満たす自然数として，

明らかに，$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1) \leqq n^k$，$2^{k-1} \leqq k!$だから，

$2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1) \leqq n^k k!$ ①

(2)

①の両辺を$k!$で除すると

$$\frac{2^{k-1}n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{2^{k-1}n!}{(n-k)!\,k!} = 2^{k-1}{}_nC_k \leqq n^k \quad ②$$

二項定理によって，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^k {}_nC_k = \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_nC_k}{n^k}$，

②によって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_nC_k}{n^k} \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$だから，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} < 3$$

(3)

$3^2=9<10$，したがって，$\log_{10}3^2 = 2\log_{10}3 < \log_{10}10 = 1$，したがって，$\log_{10}3 < \dfrac{1}{2}$

(2)において，$n=9$とすれば，$\left(\frac{10}{9}\right)^9<3$，したがって，$10^9<3\times9^9=3\times3^{18}=3^{19}$

したがって，$\log_{10}10^9<\log_{10}3^{19}$，したがって，$9<19\log_{10}3$，したがって，$\frac{9}{19}<\log_{10}3$

＜解説＞

数列に関する誘導的に構成された問題である。

(1)

一見複雑そうな証明対象の式だが，凝視すると，自明な式であることがわかる。

(2)

与えられた式①と$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$を結びつける方法を着想することが，解答には必要だ。一見，無関係そうな両式である。二項式の定理を$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$に適用することが着想である。その上で①を組合わせの表式によって表現することが着想である。この二つを着想すれば，証明は容易である。

さて自然対数の導出において，$\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=2.71828\cdots\cdots=e$という式が数IIIの教科書に記載されている。$h=\frac{1}{n}$とおけば，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.71828\cdots\cdots=e<3$である。このような解答であっても，多少の点が得られるであろう。

(3)

(2)を適用することにより，容易に示すことができる。

$\boxed{3}$　aを実数とし，xy平面上において，2つの放物線

$$C:y=x^2,\ D:x=y^2+a$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　p，qを実数として，直線l：$y=px+q$がCに接するとき，qをpで表せ。

(2)　(1)において，直線lがさらにDにも接するとき，aをpで表せ。

(3)　CとDの両方に接する直線の本数を，aの値によって場合わけして求めよ。

＜解答＞

(1)

C：$y=x^2$とl：$y=px+q$とが接するということは，$x^2=px+q$，すなわち$x^2-px-q=0$としたとき，xが重解をもつことである。すると2次方程式の解の判別式，$p^2+4q=0$だから，

$q=-\frac{p^2}{4}$　　（答）

(2)

D：$x=y^2+a$とl：$y=px+q$が接するということは，$x=(px+q)^2+a$，すなわち，$p^2x^2+(2pq-1)x+q^2+a=0$としたとき，xが重解をもつことである。

すると2次方程式の解の判別式，$(2pq-1)^2-4p^2(q^2+a)=0$だから，$4ap^2=p^3+1$

$p=0$では，(1)から$q=0$であり，l は直線にはならないので，$p \fallingdotseq 0$である。

したがって，$a=\dfrac{p^3+1}{4p^2}$　　(答)

(3)

(2)により，$p^3-4ap^2+1=0$

$f(p)=p^3-4ap^2+1$とおく。$f'(p)=3p^2-8ap=3p\left(p-\dfrac{8a}{3}\right)$

pの変化に対して，$f(p)$は下表のように変化する。

p		0		$\frac{8}{3}a$	
$f'(p)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(p)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$1-\dfrac{256a^3}{27}$	$\nearrow$

したがって，$1-\dfrac{256}{27}a^3$の正負によって，$f(p)=0$の解の個数が決まる。解の個数が直線lの本数に対応する。すなわち，

$a<\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{8}$のとき$f(p)=0$は1つの解しか存在しないので，$l$ は1本

$a=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{8}$のとき，$f(p)=0$は2つの解をもつので，$l$ は2本

$\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{8}<a$のとき，$f(p)=0$は3つの解をもつので，$l$ は3本

＜解説＞

放物線（2次式）に直線（1次式）が接する条件の問題である。それらには，交わる，接する，交わらないの３つの関係がある。両式を満足するxの条件は2次方程式になる。

(1)

接するということは，2次方程式が重解をもつということに着眼すれば良い。

(2)

(1)と同じ。

(3)

qはpによって決まるから，pのとり得る実数値の個数によって，直線の本数が決まる。pの条件は3次方程式になる。3次方程式は少なくも1つの実数解をもつ。多くても3つしか実数解をもたない。図１に示すような，3次式のグラフを描いて考察すると，$1-\dfrac{256}{27}a^3$の正負によって，$f(p)=0$の解の個数が決まることがわかる。

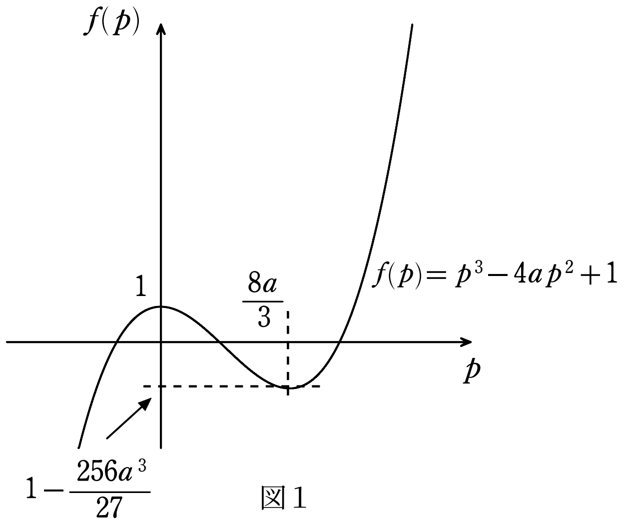

図１

$\boxed{4}$　箱の中に1から9までの異なる整数が1つずつ書かれたカードが9枚入っている。「箱からカードを1枚引き，カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を3回繰り返す。記録された3つの整数の最小値をm，最大値をMとする。次の問いに答よ。

(1)　$5<m$となる確率および$M<5$となる確率を求めよ。

(2)　$m\leqq 5\leqq M$となる確率を求めよ。

(3)　$k=1,2,\cdots\cdots,9$に対して，$m\leqq k\leqq M$となる確率を$p(k)$とする。$p(k)$の最大値，最小値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$5<m$となる確率は，3回続けて6以上を引く確率である。6以上を引く確率は$\frac{4}{9}$だから，$5<m$となる確率は$\left(\frac{4}{9}\right)^3=\frac{64}{729}$　　（答）

$M<5$となる確率は，3回続けて4以下を引く確率である。4以下を引く確率は$\frac{4}{9}$だから，$M<5$となる確率は$\left(\frac{4}{9}\right)^3=\frac{64}{729}$　　（答）

(2)

$m\leqq 5\leqq M$となる場合は，$5<m$となる場合と$M<5$となる場合を除くということである。
したがって，$m\leqq 5\leqq M$となる確率は，$5<m$となる場合と$M<5$となる場合は排反事象だから，確率1から$5<m$となる確率と$M<5$となる確率を除いて，

$1-\frac{64}{729}-\frac{64}{729}=\frac{601}{729}$　　（答）

(3)

(2)の考え方とおなじように，$p(k)$は$k<m$となる確率と$M<k$となる確率を除いた確率である。

$k<m$となる確率は，$\left(\frac{9-k}{9}\right)^3$

$M<k$となる確率は，$\left(\dfrac{k-1}{9}\right)^3$

したがって，$p(k)=1-\left(\dfrac{9-k}{9}\right)^3-\left(\dfrac{k-1}{9}\right)^3=1-\left(\dfrac{4+5-k}{9}\right)^3-\left(\dfrac{4-5+k}{9}\right)^3$

ここで，xを実数として，$x=5-k$，$f(x)=1-\left(\dfrac{4+x}{9}\right)^3-\left(\dfrac{4-x}{9}\right)^3$とおく。

$1\leqq k\leqq 9$だから，$-4\leqq x\leqq 4$，また$f(x)=f(-x)$だから$f(x)$は偶関数

$f'(x)=-\dfrac{16}{243}x$，したがって，$f(x)$は下表のように変化し，$x=0$で最大値，$x=\pm4$で最小値となる。

すなわち，$p(k)$は，$k=5$で最大値，$k=1$および9で最小値をとる。

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{601}{729}$	$\searrow$

$f(0)=1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^3-\left(\dfrac{4}{9}\right)^3=\dfrac{601}{729}$，だから，最大値は$p(5)=\dfrac{601}{729}$　　（答）

$f(4)=f(-4)=1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^3=\dfrac{217}{729}$，だから，最小値は$p(1)=p(9)=\dfrac{217}{729}$　　（答）

＜解説＞

確率の問題は題意を的確にとらえて，これを解答の論理過程に乗るように表現し直すことが必要である。そのような着想，着眼が求められる。

(1)

5＜mとなる確率は，3回続けて6以上を引く確率である，ということに着眼すれば容易である。
同様に，M＜5となる確率は，3回続けて4以下を引く確率であるということを着想する。

(2)

$m\leqq5\leqq M$ということは，5＜mではなく，M＜5ではない，ということである。

したがって，3つの数の組み合わせの中から，5＜mであるものと，M＜5であるものを除く。5＜mであることとM＜5であることは排反事象である（同時に成立することはないということ）。したがって，単純に，確率1から5＜mとなる確率とM＜5となる確率を引けば良い。

(3)

誘導的な問題で，(2)において，5をkとして考えれば良い。逆に，(2)を誤ると正答するのが難しい。最大値を求めるために，ちょっとした工夫を記載したが，必ずしもこれは必要ではない。明らかに，$p(1)=p(9)$，$p(2)=p(8)$，$p(3)=p(7)$，$p(4)=p(6)$だから，$p(1)$から$p(5)$まで直接計算して最大値，最小値を求める方が速い。

$p(1)=p(9)=\dfrac{217}{729}$，$p(2)=p(8)=\dfrac{385}{729}$，$p(3)=p(7)=\dfrac{505}{729}$，$p(4)=p(6)=\dfrac{577}{729}$，$p(5)=\dfrac{601}{729}$

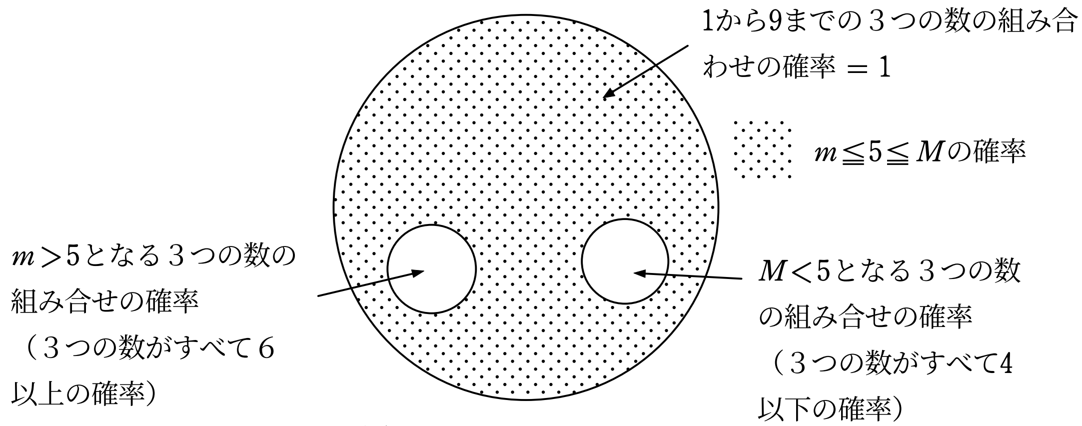

図２

$\boxed{5}$　次の問いに答よ。

(1)　実数$x \geqq 0$に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x-\frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq x$$

(2)　数列$\{a_n\}$を

$$a_n=n^2\int_0^1 \log(1+x)\,dx \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ。

(3)　数列$\{b_n\}$を

$$b_n=\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，$\lim_{n\to\infty} b_n$を求めよ。

＜解答＞

(1)

$f_1(x)=x-\frac{1}{2}x^2$，$f_2(x)=\log(1+x)$，$f_3(x)=x$とおく。

$f_1(0)=0$，$f_1{}'(x)=1-x$，$f_1{}'(0)=1$

$f_2(0)=0$，$f_2{}'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f_2{}'(0)=1$

$f_3(0)=0$，$f_3{}'(x)=1$，$f_3{}'(0)=1$

したがって，$f_1(0)=f_2(0)=f_3(0)=0$，$f_1{}'(x) \leqq f_2{}'(x) \leqq f_3{}'(x)$，$f_1{}'(0)=f_2{}'(0)=f_3{}'(0)=1$

以上によって，実数$x \geqq 0$に対して，$f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x)$が成立する。

(2)

(1)により，$n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx \leqq n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\log(1+x)\,dx \leqq n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x\,dx$

$$n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=n^2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}$$

$$n^2\int_0^{\frac{1}{n}}xdx=n^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

したがって，$\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}\leqq a_n\leqq\frac{1}{2}$だから，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}\right)=\frac{1}{2}\leqq\lim_{n\to\infty}a_n\leqq\frac{1}{2}$

したがって，$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$　　（答）

(3)

$$b_n=\log\left(1+\frac{1}{n^2}\times1\right)+\log\left(1+\frac{1}{n^2}\times2\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{n^2}\times n\right)$$

$$\frac{1}{n^2}b_n=\frac{1}{n^2}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\times1\right)+\frac{1}{n^2}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\times2\right)+\cdots+\frac{1}{n^2}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\times n\right)$$

$$>\int_0^{\frac{1}{n}}\log(1+x)\,dx$$

また，$\frac{1}{n^2}b_n<\int_0^{\frac{1}{n}}\log\left(1+\frac{1}{n^2}+x\right)dx$　だから

$$n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\log(1+x)\,dx<b_n<n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\log\left(1+\frac{1}{n^2}+x\right)dx=n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\left(x+\frac{1}{n^2}\right)dx=n^2\left(\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$$

したがって，$a_n<b_n<n^2\left(\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n<\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$，$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$だから，

$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$　　（答）

＜解説＞

微積分により数式の大小関係や数列の極限値を求める問題である。

(1)

数式の大小関係を求める場合，直接に数式の差分の正負を論じることができれば良いが，そうもいかない場合が多い。ここでは，式を見つめて，およそのグラフを描いてみて，どのような方針で証明するかを考える。すると，$x=0$での値と傾きが同じ関数の不等式の大小を比較するということに気づく。

(2)

(1)の不等式を利用するということは，式を見つめれば，分かるだろう。(1)の不等式から容易に求めることができる。

(3)

これは，ちょっとした着想が必要となる。式を凝視すると，何となく(2)を利用できないかという思いに駆られる。当然であろう。誘導的に問題が構成される場合が多いこともある。直ぐに方針が立つ

受験生はさすがである。

着眼すべきことは，b_nが積分$\int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x)\,dx$の離散的な表現と関係するのではないかということである。すると，$\log(1+x)$の区間$\left[0,\frac{1}{n}\right]$を$n$分割してできる幅$\frac{1}{n^2}$，長さ$\log\left(1+\frac{1}{n^2}\times k\right)$の短冊のそれぞれの面積を足したものではないかと気づく。図３のグラフを描いてみる。$\frac{1}{n^2}b_n$が区間$\left[0,\frac{1}{n}\right]$における$\log(1+x)$の積分と$\log\left(1+\frac{1}{n^2}+x\right)$の積分の間に挟まれることが分かる。

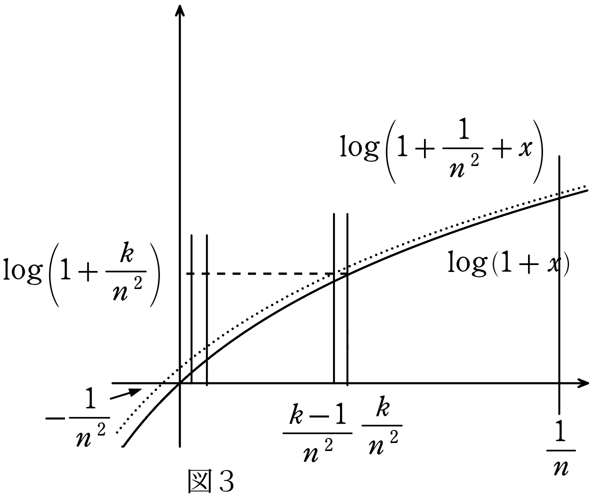

図３

<総評>

難問はないが，難易取り混ぜた問題が揃っている。$\boxed{1}$，$\boxed{3}$は完答したい。$\boxed{2}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$は7割以上得点したい。昨年よりは難化しているように思う。

$\boxed{1}$

行列による1次変換から始まるが，2次方程式の取り扱いの問題である。変数がある式を満足するように変化するとき，別の式を満足するように動くことはできない。したがって，別の式が成立しなくなる条件，すなわち多項式の係数が0となることが必要になるという数学的理解を問うている。

この点さえ理解していれば，題意は簡明で，計算も容易である。着実に正答したい。難易度はC。

$\boxed{2}$

与えられた式を変形して組合せの表式を用いることを着想することがポイントである。また二項定理の表式を理解して，これを用いることを着想することも必要である。誘導的に構成されている問題だが，このような着想がないと正答が難しいので，難易度はＡ－。

$\boxed{3}$

放物線と直線が接するときの条件を求める問題。接するということを，2次方程式が重解をもつことと理解することが必要である。題意は簡明であり，完答したい。難易度はＢ－。

$\boxed{4}$

確率の問題で，題意も簡明である。確率の問題では特に問題文を注意深く読んで，題意を的確に把握し，正答に至る論理を着想することが重要である。。難易度はＢ。

$\boxed{5}$

微分積分に関する題意が簡明な問題。(1)，(2)は確実に正答できるようにしたい。(3)はやや思考を深めることが必要である。しかし，関数を短冊に分割した面積の和の極限が積分であるという基本的理解を問うているので，極端に難しい問題というわけではない。難易度は(1)，(2)はC，(3)はA－。

＜人文・教育・経済・農学部＞

$\boxed{1}$　xy平面上に放物線C：$y=-x^2$がある。P$(a\ ,\ b)$をC上の点とする。放物線D：$y=x^2+px+q$は点Pを通り，点PにおけるCの接線とDの接線は一致している。次の問いに答よ。

(1)　b，p，qをそれぞれaで表せ。

(2)　$a=1$のとき，放物線CとDおよびy軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3)　点P$(a\ ,\ b)$が放物線C上を動くとき，放物線Dの頂点の軌跡を求めよ。

＜解答＞

(1)

P$(a\ ,\ b)$はC上の点だから，$b=-a^2$　　①

P$(a\ ,\ b)$はD上の点でもあるから，$b=a^2+pa+q$　　②

点PにおけるCの接線とDの接線は一致しているので，点Pにおける両者の傾きが等しい。

Cの導関数は$y'=-2x$，Dの導関数は$y'=2x+p$，したがって$-2a=2a+p$　　③

①，②，③から，$b=-a^2$，$p=-4a$，$q=2a^2$　　（答）

(2)

$a=1$のとき，放物線Dは，$y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$

放物線CとDの接点は$(1,\ -1)$，したがって，放物線CとDおよびy軸で囲まれた図形の面積は

$$\int_0^1(x^2-4x+2+x^2)dx=2\int_0^1(x^2-2x+1)dx=2\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\frac{2}{3}\qquad（答）$$

(3)

放物線D：$y=x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{4}+q$

頂点の座標$(X\ ,\ Y)$は，$X=-\dfrac{p}{2}=2a$，$Y=-\dfrac{p^2}{4}+q=-2a^2$

両式からaを消去することにより，放物線Dの頂点の軌跡は，$Y=-\dfrac{X^2}{2}$　　（答）

＜解説＞

題意は簡明な放物曲線の微分，積分に関する問題。図１のようなグラフを描いて考える。

(1)

両放物線の接点Pにおける傾きは同じ。

(2)

両放物線のグラフを描いてみればよい。

(3)

頂点の軌跡を求めるのだから，頂点のx座標，y座標の関係式を求めればよい。

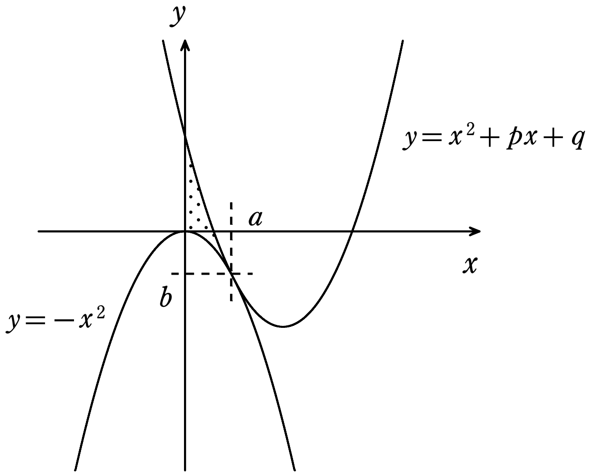

図１

$\boxed{2}$ 次の問いに答よ。

(1) $\log_{10}3$は無理数であることを示せ。

(2) $\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$が成り立つことを示せ。

(3) 3^{26}の桁数を示せ。

＜解答＞

(1)

$\log_{10}3$は無理数ではない，すなわち有理数だとする。

するとm，nを正の整数として，$\log_{10}3=\dfrac{n}{m}$，すると$10^{\frac{n}{m}}=3$だから，$3^m=10^n=(2\times5)^n$ ①

しかるに3，2，5は素数だから，①が成立することはありえない。

したがって，$\log_{10}3$は無理数ではない，としたことが誤りである。

したがって，$\log_{10}3$は無理数である。

(2)

$\dfrac{1}{2}=\log_{10}10^{\frac{1}{2}}$，$3<\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}$，$\therefore\ \log_{10}3<\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3$ならば，$6<13\log_{10}3$，$10^6<3^{13}=3\times9^6$

逆に，$10^6<3\times9^6$ならば，$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3$だから，$10^6<3\times9^6$を示せばよい。

$9^6=9^3\times9^3<700\times700=49\times10^4$，したがって，$3\times9^6>140\times10^4=1.4\times10^6>10^6$

$\therefore\ \dfrac{6}{13}<\log_{10}3$

(3)

$$\log_{10}3^{26}=26\log_{10}3\text{，(2)より，}26\times\frac{6}{13}=12<26\log_{10}3=\log_{10}3^{26}<26\times\frac{1}{2}=13$$

したがって，3^{26}の桁数は$(12+1)=13$桁　　（答）

<解説>

題意は簡明なわかり易い問題だが，案外手こずるかも知れないので，注意深く取り組む。

(1)

背理法によって示すとよい。背理法とは，命題を否定したとき，矛盾が生じることを示し，命題の否定が誤りであるとする、すなわち命題の成立を示す方法である。ここでは，無理数ではない、すなわち有理数だとして、矛盾を導く。素数の概念は，数学の基礎であるから，理解していること。

(2)

具体的な数値での大小関係の証明問題である。したがって，具体的な数値で証明してもよい。

(3)

3^{26}がn桁とする。すると，$10^{n-1}\leqq 3^{26}<10^{n}$だから，$n-1\leqq\log_{10}3^{26}=26\log_{10}3<n$

$n-1=12$だから，$n=13$

$\boxed{3}$　四面体OABCにおいて，OA⊥OB，OA=3，OB=4，OC=5とする。△OABの重心をGとし，直線CGは△OABを含む平面に垂直とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおく。次の問いに答よ。

(1)　$\overrightarrow{CG}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2)　内積$\vec{a}\cdot\vec{c}$および$\vec{b}\cdot\vec{c}$を求めよ。

(3)　四面体OABCの体積を求めよ。

<解答>

(1)

$$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OG}=-\vec{c}+\overrightarrow{OG},\ \overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\text{，したがって，}\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}\qquad\text{（答）}$$

(2)

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$は△OABを含む平面に含まれるから，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CG}=0$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CG}=0$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}\cdot\vec{c}=3+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=3-\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ \therefore\ \vec{a}\cdot\vec{c}=3\qquad\text{（答）}$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{16}{3}-\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{16}{3}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0,\ \therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{16}{3}\qquad\text{（答）}$$

ただし，上記の計算で，OA⊥OBだから，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$を用いた。

(3)

四面体OABCをCを頂点とする三角錐とみなせば，その体積は，$\frac{1}{3}$△OABの面積×CG

△OABの面積$=\frac{3\times4}{2}=6$

$CG^2=\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CG}=\frac{1}{9}\vec{a}^{\,2}+\frac{1}{9}\vec{b}^{\,2}-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}+\vec{c}^{\,2}=\frac{25}{9}-\frac{50}{9}+25=\frac{200}{9}$, $\therefore$ $CG=\frac{10\sqrt{2}}{3}$

$\frac{1}{3}$△OABの面積×CG$=\frac{20\sqrt{2}}{3}$　　（答）

＜解説＞

ベクトルによる立体の取り扱いの問題。図２のような図を描いて考える。

(1)

$\overrightarrow{CG}$を既知のベクトルの和によって表現することを考える。容易にわかる。

(2)

直線CGが△OABを含む平面に垂直であるということから，△OABに含まれるベクトルとベクトルCGが直交することに着目できれば，容易である。

(3)

三角錐の体積を求めることに帰着することに容易に気がつくだろう。三角錐の体積の公式は覚えておく。

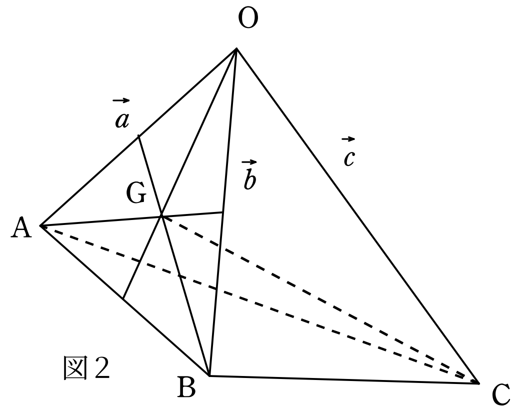

図２

$\boxed{4}$　箱の中に1から9までの異なる整数が1つずつ書かれたカードが9枚入っている。「箱からカードを1枚引き，カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を3回繰り返す。記録された3つの整数の最小値をm，最大値をMとする。次の問いに答よ。

(1)　$m=M$となる確率を求めよ。

(2)　$5<m$となる確率および$M<5$となる確率を求めよ。（理系学部の問題$\boxed{4}$の (1)に同じ）

(3)　$m\leqq 5\leqq M$となる確率を求めよ。（理系学部の問題$\boxed{4}$の (2)に同じ）

＜解答＞

(1)

$m=M$となることは，3回のカードの数が全て同じということである。1回目は何を引いても良いが，2回目，3回目は同じ数字を引かなければならない。

したがって，$m=M$となる確率は$\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{81}$　　（答）

(2)

理系学部の問題$\boxed{4}$の (1)の解答を参照

(3)

理系学部の問題 $\boxed{4}$ の (2)の解答を参照

＜解説＞

理系学部の問題 $\boxed{4}$ に(1)が付加され，(3)が除かれている。理系学部の問題 $\boxed{4}$ の解説を参照

＜総評＞

文系学部の数学の問題ということで，理系学部の問題より，かなり容易である。しかし，数学の基本事項の理解がなければ，正答は難しい。的確な数学思考力を求めている問題だから，受験生間で得点にばらつきがでやすいだろう。したがって，数学が合否のキーになる可能性が高い。

$\boxed{1}$

放物線（2次方程式）の微分，積分に関する問題だが，題意は簡明であり，煩瑣な計算も必要としないので，難易度はC。

$\boxed{2}$

題意は簡明で，煩瑣な計算も必要としないが，的確な数学思考力や着想を必要とする。難易度はB。

$\boxed{3}$

ベクトルの基礎の理解が立体図形の取り扱いを通して求められている。難易度はB。

$\boxed{4}$

確率の問題である。問題文から題意を的確に把握するためには，問題文と等価な表現に変えて考えることが必要だ。難易度はB－。

120520