2012 (H24) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部･医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻･検査技術科学専攻）
･歯学部･薬学部･工学部･農学部

$\boxed{1}$　s，t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x=s+t+1$，$y=s-t-1$とおく。s，t が$s\geqq 0$，$t\geqq 0$の範囲を動くとき，点$(x,\ y)$の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2)　$x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$とおく。s，t が実数全体を動くとき，点$(x,\ y)$の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

<解答>

(1)

$x=s+t+1$　①，$y=s-t-1$　②

①＋②から，$x+y=2s$，①－②から，$x-y-2=2t$，したがって$x+y\geqq 0$，$x-y-2\geqq 0$

したがって，$y\geqq -x$，$y\leqq x-2$

この範囲を図１(a)に示す。

(2)

$x=st+s-t+1$　①，$y=s+t-1$　②

②から，$t=y-s+1$，これを①に代入してsについて整理すると

$s^2-(y+3)s+x+y=0$　③

③はsの2次方程式だから，sが実数をとるためには，2次方程式が実数解をもつ条件

$(y+3)^2\geqq 4(x+y)$を満たす必要がある。これを変形すると，$x\leqq\dfrac{1}{4}\{(y+1)^2+8\}$

この範囲を図１(b)に示す。

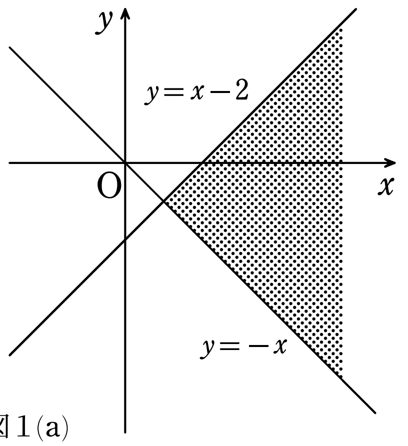

図１(a)

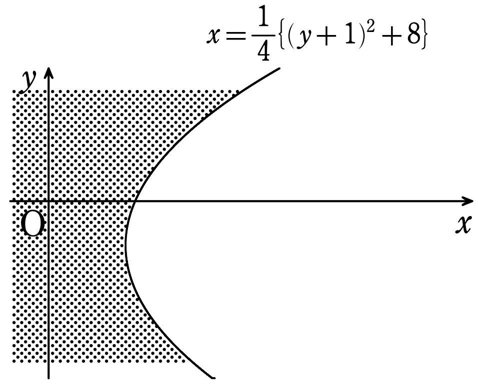

図１(b)

＜解説＞

解答の方針に迷うことはないだろう。s，t が満たすべき条件をx，y によって表現することにより，x，yが満たすべき条件（範囲）が求まる。(2)では，sの2次方程式が条件となる。sが実数ということは，実数の解の条件を満足しなければならない。2次方程式の解の判別式で実数解をもつ条件である。この種の問題の常套手段である。

$\boxed{2}$　mを実数とする。座標平面上で直線$y=x$に関する対称移動を表す１次変換をfとし，直線$y=mx$に関する対称移動を表す１次変換をgとする。以下の問いに答よ。

(1)　１次変換gを表す行列Aを求めよ。

(2)　合成変換$g\circ f$を表す行列Bを求めよ。

(3)　$B^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$となる$m$をすべて求めよ。

＜解答＞

(1)

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$とする。$y=mx$上の点は$A$によって動かないから，

$\begin{pmatrix}x\\ mx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ mx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+bmx\\ cx+dmx\end{pmatrix}$，したがって$x=ax+bmx$，$mx=cx+dmx$

すなわち，$1=a+bm$，$m=c+dm$　①

$m\fallingdotseq 0$として，$y=mx$と直交する直線$y=-\dfrac{x}{m}$上の点はAによって符号が反転するから，

$\begin{pmatrix}-x\\ \dfrac{x}{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \dfrac{-x}{m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax-\dfrac{bx}{m}\\ cx-\dfrac{dx}{m}\end{pmatrix}$，したがって，$-x=ax-\dfrac{bx}{m}$，$\dfrac{x}{m}=cx-\dfrac{dx}{m}$

すなわち，$-1=a-\dfrac{b}{m}$，$\dfrac{1}{m}=c-\dfrac{d}{m}$　②

①，②によって，$a=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$，$b=\dfrac{2m}{1+m^2}$，$c=\dfrac{2m}{1+m^2}$，$d=\dfrac{m^2-1}{1+m^2}$

$m=0$の場合，直線はx軸となり，対象移動は$(x,y)\to(x,-y)$である。このとき$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$であるから，$m=0$の場合の$a,b,c,d$と一致する。

したがって，行列$A=\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}$　（答）

(2)

fが表す行列は，Aにおいて，$m=1$として，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

したがって，合成変換$g\circ f$を表す行列$B=\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 2m & 1-m^2 \\ m^2-1 & 2m \end{pmatrix} \quad （答）$$

(3)

$B=\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$とおくことができる。ただし，$p=\dfrac{2m}{1+m^2}$，$q=\dfrac{m^2-1}{1+m^2}$

しかるに，$p^2+q^2=1$だから，$p=\cos\theta$，$q=\sin\theta$とおくことができる。

すると，$B=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$は原点を中心とし，回転角が$\theta$の回転移動を示す。

したがって，$B^3=\begin{pmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$0\leqq\theta<2\pi$すなわち$0\leqq 3\theta<6\pi$だから，$\cos 3\theta=1$によって，$3\theta=0, 2\pi, 4\pi$

ｉ) $\theta=0$のとき

$\dfrac{2m}{1+m^2}=\cos\theta=1$，したがって$m=1$

$\dfrac{m^2-1}{1+m^2}=\sin\theta=0$，したがって$m=\pm 1$

両式を満足するのは，$m=1$

ⅱ) $\theta=2\pi/3$のとき

$\dfrac{2m}{1+m^2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$m^2+4m+1=0$，$m=-2\pm\sqrt{3}$

$\dfrac{m^2-1}{1+m^2}=\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$m=\pm(2+\sqrt{3})$

両式を満足するのは，$m=-2-\sqrt{3}$

ⅲ) $\theta=4\pi/3$のとき

$\dfrac{2m}{1+m^2}=\cos\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$m^2+4m+1=0$，$m=-2\pm\sqrt{3}$

$\dfrac{m^2-1}{1+m^2}=\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$m=\pm(2-\sqrt{3})$

両式を満足するのは，$m=-2+\sqrt{3}$

以上によって，$B^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$となる$m$は，$m=1$，$-2\pm\sqrt{3}$　（答）

＜解説＞

題意は簡明である。計算を的確に進めること。

(1)

行列Aの要素を一般的に求めることが必要である。１次変換の行列を求める基本的な問題だから，習熟している生徒も多いであろう。この問題では，対称軸となる直線上の点は不変であること，原点を通り直交する直線上の点は原点に関して対称な点に変換されること，この２条件から行列の要素を求めるのが簡単だろう。もちろん，他の方法もある。

(2)

行列の計算をすれば良いから，特段の困難はなかろう。

(3)

B^3の計算をまっとうに行うと，mの6次式が表れて，計算が面倒になりそうだ。何か工夫がほしいところだ。そこで，行列Bを凝視して考える。すると，その特徴が何かに結びついて見えてくる。教科書に出ていた，原点を中心とする回転移動である。

行列による座標の変換の練習問題をこなしてきた生徒は，回転移動とピーンときて，解答のような変数変換を行うことができるかも知れない。

原点を通る2本の直線による対称移動の合成は回転移動になる，ということを練習問題で解いた経験があると，Bは回転移動とピーンとくるであろう。そこでBが回転移動となること説明しておこう。

図２を参照する。

任意の点P_1を$y=x$に関して対称移動した点をP_2，P_2を$y=mx$に関して対称移動した点をP_3とする。直線$y=x$と$y=mx$の交角をα，$\angle P_1OP_2=\gamma_1$，$\angle P_2OP_3=\gamma_2$，とすれば，

$\alpha=\angle OP_2P_1-\angle OP_2P_3$

$=\frac{1}{2}(\pi-\angle P_1OP_2)-\frac{1}{2}(\pi-\angle P_3OP_2)$

$=\frac{1}{2}(\pi-\gamma_1)-\frac{1}{2}(\pi-\gamma_2)=\frac{1}{2}(\gamma_2-\gamma_1)$

したがって，$\angle P_1OP_3=\gamma_2-\gamma_1=2\alpha$

明らかに，$OP_1=OP_2=OP_3$だから，

P_3はP_1を原点に関して2α回転した点である。

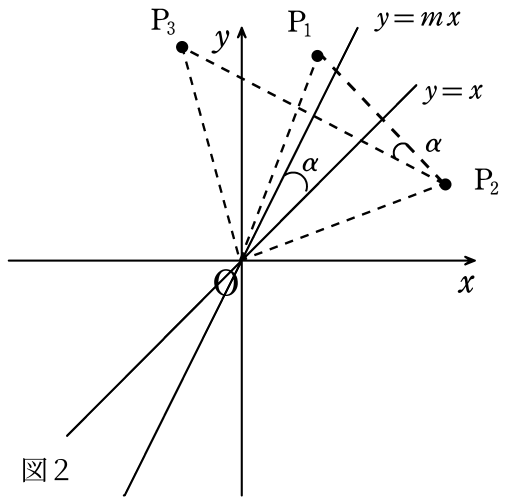

図２

以上によって，原点を通る2本の直線による対称移動の合成は回転移動になることが示された。

さて，回転角は2直線のなす角の2倍である。このことを，解答の回転角θにおいて確認してみよう。

$\tan\theta=\dfrac{m^2-1}{2m}$，$m=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$，

したがって，$\tan\theta=\dfrac{m^2-1}{2m}=\dfrac{1-\tan\alpha}{2(1+\tan\alpha)}\left\{\left(\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}\right)^2-1\right\}=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\tan 2\alpha$

$\theta=2\alpha$であることが分かる。

一方，行列Bが回転移動を示すということに気がつかない生徒がいるかも知れない。するとごりごり計算をすることになるか。そうするにしても，ちょっとした工夫がほしいところだ。そこで逆行列を利用して，計算を容易化することを紹介する。

Bの逆行列は，$\Delta=\left(\dfrac{1}{1+m^2}\right)^2\{4m^2+(m^2-1)^2\}=1$

したがって，$B^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}2m & m^2-1\\ 1-m^2 & 2m\end{pmatrix}=\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}2m & m^2-1\\ 1-m^2 & 2m\end{pmatrix}$

$B^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$とすれば，両辺に左から$B^{-1}$を乗じると，$B^2=B^{-1}$　③

$$B^2=\left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2\begin{pmatrix}2m & 1-m^2\\ m^2-1 & 2m\end{pmatrix}^2=\left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2\begin{pmatrix}4m^2-(m^2-1)^2 & 4m(1-m^2)\\ 4m(m^2-1) & 4m^2-(m^2-1)^2\end{pmatrix}$$

すると，③で行列の要素が等しいことから，

$4m^2-(m^2-1)^2=2m(1+m^2)$　④

$4m(1-m^2)=(1+m^2)(m^2-1)$　⑤

⑤から$m^2=1$とすれば，④において$4m^2=4m$，したがって，$m=1$　（答）

⑤において$m^2\fallingdotseq 1$とすれば，$1+m^2=-4m$，これを④に代入すると同様に，$m^2+4m+1=0$

したがって，$m=-2\pm\sqrt{3}$　（答）

$\boxed{3}$　袋A，袋Bのそれぞれに，1からNの自然数がひとつずつ書かれたN枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答よ。

(1)　$N=4$とする。袋A，袋Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し，数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし，取り出したカードは元に戻さないものとする。4回のカードの取り出し操作が終わった後，数字が一致していた回数をXとする。$X=1$，$X=2$，$X=3$，$X=4$となる確率をそれぞれ求めよ。また，Xの期待値を求めよ。

(2)　$N=3$とし，nは自然数とする。袋A，袋Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，それらのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのがn回目で起こる確率p_nとし，n回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率をq_nとする。p_nとq_nを求めよ。

<解答>

(1)

袋A，Bから出る4つの数字の組合せの場合の数は，$4!=4\times3\times2\times1=24$通り

$X=4$すなわち，4つすべての数字が一致する場合の数は，明らかに1通り

$X=3$すなわち，3つの数字が一致する場合の数は，残りの数字も一致するはずだから，0通り

$X=2$すなわち，2つの数字が一致する場合の数は，4つの数字から2つの数字を選ぶ場合の数（${}_4C_2$通り）と残り2つの数字が不一致である場合の数（1通り）の積だから，${}_4C_2=6$通り

$X=1$すなわち，1つの数字が一致する場合の数は，4つの数字から1つの数字を選ぶ場合の数（${}_4C_1$通り）と残り3つの数字が不一致である場合の数（2通り）の積だから，${}_4C_1\times2=8$通り

以上によって，

$X=1$の確率は$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$，$X=2$の確率は$\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$，$X=3$の確率は0，$X=4$の確率は$\frac{1}{24}$　（答）

また，Xの期待値は$1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+3\times0+4\times\frac{1}{24}=1$　（答）

(2)

2つの袋から同時に一枚ずつカードを取り出したとき，数字が一致する確率は，$\frac{1}{3}$

一致しない確率は，$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

したがって，$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ （答）

n回の操作ですべてのカードが取り除かれるのは，$(n-1)$回目の操作で2度目の数字の一致があったときである。そこで，$1\leqq m\leqq n-2$のmで最初の一致があったとすれば，n回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率は$q_{m,n}=p_m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-m}\frac{1}{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-m}$

したがって，$q_n=\sum_{m=1}^{n-2}q_{m,n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{m=1}^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{m}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，ただし$3\leqq n$ （答）

また，当然，$q_1=q_2=0$

＜解説＞

(1)

数字が一致する回数Xの確率とは，4回のカード取り出し操作を可能な限り数多く繰り返したとき，一致した回数がXである場合の数を操作回数で除したものである。ということは，数字a, b, c, dと数字a, b, c, d二つの数字の組合せで同じ数字の組の数がXである場合の数を全体の場合の数で除したものということができる。

二つの数字の組合せの場合の数は，4!，なぜなら，袋Aから出した最初の数字には，袋Bの4つの数字のうち1つを選べる。袋Aの2番目の数字には，袋Bの3つの数字のうち1つを選べる。袋Aの3番目の数字には，袋Bに残された2つの数字のうち1つを選べる。

$X=1$である場合の組合せの数

4つの数字から1つを選ぶ場合の数は，${}_4C_1$通り

A，B2つの袋に残された3つの数字から選んだ2つの数字が全て不一致になる場合の数は，2通り

すなわち3つの数字がb，c，dとすれば，$[(b, c);(c, d);(d, b)]$と$[(b, d);(c, b);(d, c)]$の2通り

したがって，$X=1$である場合の組合せの数は両者の積で，${}_4C_1\times2$通り

$X=2$である場合の組合せの数は

4つの数字から2つを選ぶ場合の数は，${}_4C_2$通り

A，B2つの袋に残された2つの数字から選んだ2つの数字が全て不一致になる場合の数は，1通り

すなわち，2つの数字がc，dとすれば，$[(c, d);(d, c)]$の1通り

したがって，$X=2$である場合の組合せの数は両者の積で，${}_4C_2\times1$通り

$X=3$である場合，残る1つの数字も一致するはずだから，$X=4$になる。したがって，$X=3$になることはない。

$X=4$，すなわち4つの数字が一致する場合は，1通りしかないことは自明である。

(2)

n回目でカードの数字が初めて一致したということは，$(n-1)$回目まで一致しなかったということだから，p_nは$(n-1)$回目まで一致しない確率×1回取り出して一致する確率である。

n回の操作ですべてのカードが取り除かれるのは，$(n-1)$回目の操作で2度目の数字の一致があったときである。これを図３に示す。

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & & & & m & & & & & & & n-1 & n \\ \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \times & \bigcirc & \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \times & \bigcirc & \bigcirc \end{array}$$

×は不一致
○は一致

図３

$1 \leqq m \leqq n-2$のmで最初の一致があったのだから，n回目の操作ですべての　カードが取り除かれる確率$q_{m,n}$は，（m回目で初めて一致する確率）×（$(n-2-m)$回不一致が続く確率）×（$(n-1)$回目で一致する確率）である。

すなわち，$q_{m,n}=p_m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-m}\frac{1}{2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-m}$

mを$1 \leqq m \leqq n-2$として変化させたときの$q_{m,n}$の和を取れば，q_nが求まる。

$\boxed{4}$　$0 \leqq x \leqq \pi$に対して，関数$f(x)$を

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$$

と定める。$f(x)$の$0 \leqq x \leqq \pi$における最大値と最小値を求めよ。

＜解答＞

ｉ) $0 \leqq x \leqq \pi/2$のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt=\int_0^{x}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$$

$$=\int_0^{x}\frac{\cos(x-t)}{1+\sin(x-t)}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t-x)}{1+\sin(t-x)}dt$$

$\alpha=\sin(x-t)$とおくと，$\frac{d\alpha}{dt}=-\cos(x-t)$だから，

$$\int\frac{\cos(x-t)}{1+\sin(x-t)}dt=-\int\frac{1}{1+\alpha}d\alpha=-\log(1+\alpha)$$

$\beta=\sin(t-x)$とおくと，$\frac{d\beta}{dt}=\cos(t-x)$

$$\int\frac{\cos(t-x)}{1+\sin(t-x)}dt=\int\frac{1}{1+\beta}d\beta=\log(1+\beta)$$

$$=\Big[-\log(1+\alpha)\Big]_{\sin x}^{0}+\Big[\log(1+\beta)\Big]_0^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\log(1+\sin x)+\log(1+\cos x)$$

$$=\log\{(1+\sin x)(1+\cos x)\}$$

$g(x)=(1+\sin x)(1+\cos x)$を考える。

$g'(x)=(1+\cos x)\cos x-(1+\sin x)\sin x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1)$

$\quad=(\cos x-\sin x)\{\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)-1\}$

$x=\pi/4$で$g'(x)=0$となるので，$g(x)$は図４のように変化するから，

$g(x)$の最大値は，$g(\pi/4)=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{2}$，最小値は$g(0)=g(\pi/2)=2$

したがって，$0\leqq x\leqq \pi/2$のとき，$f(x)$の最大値は$\log\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{2}$，最小値は$\log 2$

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

図４

ⅱ) $\pi/2\leqq x\leqq \pi$のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x-t)}{1+\sin(x-t)}dt$$

$$=\Big[-\log(1+\alpha)\Big]_{\sin x}^{-\cos x}=-\log(1-\cos x)+\log(1+\sin x)=\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\right)$$

$\pi/2\leqq x\leqq \pi$のとき，$1+\sin x$は単調減少，$1-\cos x$は単調増加だから，

$f(x)$は単調減少関数となり，最大値$f(\pi/2)=\log 2$，最小値$f(\pi)=-\log 2$をとる。

以上によって，$f(x)$の$0\leqq x\leqq \pi$における最大値は$\log\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{2}$，最小値は$-\log 2$

<解説>

絶対値記号を外すことを考える。$0\leqq t\leqq \pi/2$だから，$\pi/2<x$なら，$t<x$である。そこで，$0\leqq x\leqq \pi/2$のときと，$\pi/2\leqq x\leqq \pi$のときとに，分けてけて考えれば良いことに気づく。

$0\leqq x\leqq \pi/2$のときは，積分範囲を$0\leqq t\leqq x$と$x\leqq t\leqq \pi/2$とに分けて考えれば，絶対値記号を外すことができる。ここでの三角関数の積分では，$\alpha=\sin(x-t)$などのように，変数変換をすることがポイントである。

不定積分$\displaystyle\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$の公式は覚えていなければならない。

$\boxed{5}$　長さ1の線分ABを直径とする円周C上に点Pをとる。ただし，点Pは点A，Bとは一致していないとする。線分AB上の点Qを$\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$となるようにとり，線分BPの長さを$x$とし，線分PQの長さを$y$とする。以下の問いに答えよ。

(1)　yをxを用いて表せ。

(2)　点Pが2点A，Bを除いた円周C上を動くとき，yが最大となるxを求めよ。

<解答>

(1)

図５の△BPQに正弦定理を適用する。$\dfrac{y}{\sin\theta}=\dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-\theta\right)}$

$\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$

$\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

$y=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}\,x+\sqrt{1-x^2}}$　（答）

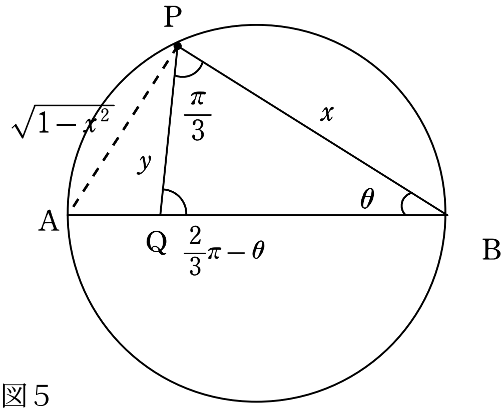

図５

(2)

$$\frac{y}{\sin\theta}=\frac{x}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}$$

したがって，$y=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\dfrac{\sin2\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta}$

$\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{2\cos^3\theta(\sqrt{3}-\tan^3\theta)}{(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)^2}=\dfrac{2\cos^3\theta(p-\tan\theta)(p^2+p\tan\theta+\tan^2\theta)}{(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)^2}$，ただし$p=\sqrt[6]{3}$

$\tan\theta=p$となるθをθ_mとすれば，図６のように，yは$\theta=\theta_m$で最大値をもつ。

$\theta=\theta_m$となるxをx_mとする。$x_m=\cos\theta_m=\sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\theta_m}}=\sqrt{\dfrac{1}{1+p^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}}}$

すなわち，yが最大値をとるのは，$x=\sqrt{\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}}}$　（答）

θ	0		θ_m		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y		↗		↘	

図６

＜解説＞

(1)

図を描けば，yをxによって表すことは，容易に分かるであろう。ABが直径だから，△APBが直角三角形になることは，直ちに分かるはずだ。正弦定理を使うことを着想する。

(2)

(1)が存外，簡単に求まったので，その勢いで，yをxの関数として，極大値を求めようとして，微分しても，導関数が複雑で焦ってしまう。ここは，一呼吸おいて，計算の方針を考える。

すると，(1)で用いたように，$x=\cos\theta$で，yはθの比較的簡単な関数であることに気づく。そこで，θの関数として扱うという着想が生まれる。この導関数もやや複雑だが，ていねいに実行すれば，簡単な式に整理できる。

もう少し，導関数を簡単にする方法を紹介する。

明らかに$0<y<1$だから，

$Y=\dfrac{1}{y}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta}$とおくと，$Y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos\theta}$，$y$の最大値は$Y$の最小値だから，$Y$が最小値をもつ条件を求める。

$$\frac{dY}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}(\tan^3\theta-\sqrt{3})$$

$$=\frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}(\tan\theta-p)(\tan^2\theta+p\tan\theta+p^2\tan^2\theta)\text{，ただし}p=\sqrt[6]{3}$$

$\tan\theta=p$となるθをθ_mとすれば，Yは$\theta=\theta_m$で最小値をもつ。すなわちyは最大値をもつ。

$\theta=\theta_m$となるxをx_mとする。$x_m=\cos\theta_m=\sqrt{\dfrac{1}{1+\tan^2\theta_m}}=\sqrt{\dfrac{1}{1+p^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}}}$

$\boxed{6}$ 数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $n\geqq2$のとき，$a_n>1$となることを示せ。

(2) $\alpha^2=\dfrac{4\alpha+4}{2\alpha+3}$を満たす正の実数$\alpha$を求めよ。

(3) すべての自然数nに対して$a_n<\alpha$となることを示せ。

(4) $0<r<1$を満たすある実数rに対して，不等式

$$\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。さらに，極限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$を求めよ。

＜解答＞

(1)

$n\geqq2$において，

$$a_n=\sqrt{\frac{3a_{n-1}+4}{2a_{n-1}+3}}=\sqrt{\frac{2a_{n-1}+3}{2a_{n-1}+3}+\frac{a_{n-1}+1}{2a_{n-1}+3}}=\sqrt{1+\frac{a_{n-1}+1}{2a_{n-1}+3}}$$

$a_{n-1}>0$だから，$\dfrac{a_{n-1}+1}{2a_{n-1}+3}>0$，したがって$a_n=\sqrt{1+\dfrac{a_{n-1}+1}{2a_{n-1}+3}}>1$　$(n=2,\ 3,\ \cdots)$

(2)

$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$，すると$2\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha-4=0$，$(\alpha+1)(2\alpha^2+\alpha-4)=0$

$2\alpha^2+\alpha-4=0$，したがって，$\alpha=-\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{\sqrt{33}}{4}$，したがって，正の実数$\alpha$は，$\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$　（答）

(3)

数学的帰納法で示す。$1<\alpha$だから，$n=1$では，$a_1=1<\alpha$となって，成立する。$n=k$で成立するとする。すなわち，$a_k<\alpha$とする。

$\alpha^2-{a_{k+1}}^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}-\dfrac{4a_k+4}{2a_k+3}=\dfrac{\alpha-a_k}{(2\alpha+3)(2a_k+3)}>0$

したがって，$\alpha>0$，$a_{k+1}>0$だから，$a_{k+1}<\alpha$

以上によって，すべてのkで成立するから，すべての自然数nに対して$a_n<\alpha$となる。

(4)

$\alpha^2-{a_{n+1}}^2=(\alpha+a_{n+1})(\alpha-a_{n+1})=\dfrac{\alpha-a_n}{(2\alpha+3)(2a_n+3)}$

したがって，$\dfrac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}=\dfrac{1}{(\alpha+a_{n+1})(2\alpha+3)(2a_n+3)}$，しかるに，$1\leqq a_n<\alpha$だから，

$\dfrac{1}{(\alpha+a_{n+1})(2\alpha+3)(2a_n+3)}<1$，したがって，$\dfrac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}<1$

したがって，$0<r<1$を満たすある実数rに対して，不等式

$$\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ。

したがって，$\alpha-a_n\leqq r(\alpha-a_{n-1})\leqq r^2(\alpha-a_{n-2})\leqq\cdots\leqq r^{n-1}(\alpha-a_1)=r^{n-1}(\alpha-1)$

したがって，$\alpha-r^{n-1}(\alpha-1)\leqq a_n<\alpha$，しかるに，$0<r<1$だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\alpha-r^{n-1}(\alpha-1)\}=\alpha$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$　（答）

＜解説＞

誘導的に問題が構成されているので，一つ一つ丁寧に解答していけば，自ずと完答できるだろう。

(1)

数式を適切に変形すれば良い。

(2)

3次方程式の解を求めるのだが，因数分解して2次方程式の解を求めることに帰着する。

(3)

数学的帰納法を用いるのが常套的方法である。

$a_{k+1}<\alpha$を導く別の方法を紹介する。

$f(x)=\dfrac{3x+4}{2x+3}$なる関数について，$f'(x)=\dfrac{1}{(2x+3)^2}>0$だから，$f(x)$は単調増加関数である。

したがって，$\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x+3}}$ も単調増加である。

したがって，$a_k<\alpha$だから，$a_{k+1}=\sqrt{\dfrac{3a_k+4}{2a_k+3}}<\sqrt{\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}}=\alpha$

(4)

別解を示す。

$a_n{}^2-a_{n+1}{}^2=a_n{}^2-\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}=\dfrac{2a_n{}^3+3a_n{}^2-3a_n-4}{2a_n+3}$

$f(x)=2x^3+3x^2-3x-4=(x+1)(2x^2+x-4)$なる関数について，

$f(x)=0$となるのは，(2)のように，$x=-1$，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$

$f'(x)=6x^2+6x-3=0$となるのは，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

したがって，$f(x)$を図示すると，図７のようになり，$0<x<\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}=\alpha$では，$f(x)<0$

$1<a_n<\alpha$であるから，$a_n{}^2-a_{n+1}{}^2<0$，したがって，$1<a_n<a_{n+1}<\alpha$が成立する。

すると，$0<\alpha-a_{n+1}<\alpha-a_n$だから，　$\dfrac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}<1$

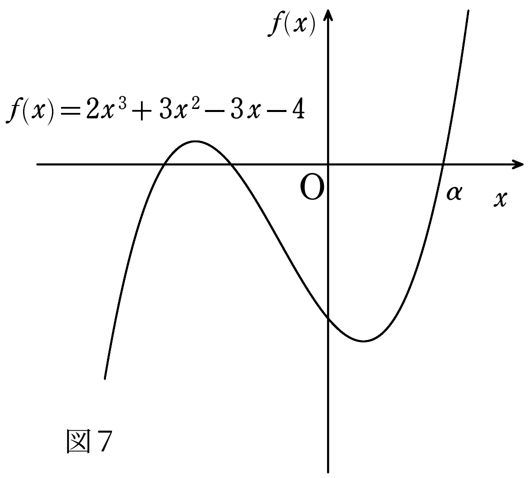

図７

問題は誘導的にできていて，当然に，$\dfrac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r$　を利用して，極限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$を求める。

別解を示す。

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$とする。$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}}$ の両辺で，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\beta$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}}=\sqrt{\dfrac{3\beta+4}{2\beta+3}}$

したがって，$\beta^2=\dfrac{3\beta+4}{2\beta+3}$，これは(2)の$\alpha$と等しいので，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta=\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$

ただし，この方法は暗黙のうちに，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$の存在を前提としている。解答では，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$の存在そのものも含まれるので，より優れた方法である。別解で，満点がもらえるかどうか，心配ではある。

＜総評＞

　問題をざっと見て，容易に解答方針が決まりそうな問題から手をつけるということだろう。私は１→５→６→２→４→３の順に手をつけたいと思った。実際に手をつけてみて，その通りであった。このことは，生徒一人一人の得意分野や勉強経過によって異なるであろうが，受験では，問題を一覧して，手をつける順序を判断することが重要である。

$\boxed{1}$

　変数の範囲に関する問題。題意は簡明であり，常套的方法によって対応できる。難易度C。

$\boxed{2}$

　題意は簡明な１次変換を表す行列の問題。⑴，⑵は基本的な問題だから，完答したい。⑶は計算を容易にするための工夫が必要だ。回転移動に気づくと，容易である。まともに扱うと時間に追われる。⑴，⑵は難易度Ｃ，⑶はＢ。

$\boxed{3}$

　確率の問題は，問題の過程通りに発生する場合の数などを計算し始めると，とても難しくなってしまう場合がある。問題文を熟読し，しばし解答の方針を考える必要がある。この解答方針に時間のかかる問題ほど後回しに取り組みたいところだ。つまり題意が簡明で，解答方針の考案に時間のかからない問題に先に取り組みたい。

　この問題も一読すると簡単そうなのだが，実はそうでもない。後回しにしたいところだ。

　さて，解答の方針だが，問題の過程に沿って，事象の発生を考えると迷路にはまり込む。なぜなら，1回目の取り出しで一致する場合，一致しない場合，2回目の取り出しで一致する場合，一致しない場合，などと考えていくと，場合の数が増えて，収拾がつかなくなる。

　この過程が意味するところを，取扱い易い別の過程（あるいは表現）に置き換えることが必要だ。確率の問題で難しいと感じたら，問題の過程と等価の取扱い易い過程に置き換える，ことを心がける。すると，ああそうか，と簡単な問題になってくる。この問題では，袋Aの数字a, b, c, dと袋Bの数字a, b, c, dの二つの数字からなる4つの組の場合の問題と理解すれば，一般的な組み合わせの問題に帰着して，容易に解答できる。⑵では，m回目に初めて一致するという考え方の着想が必要である。難易度Ａ－。

$\boxed{4}$

　分母，分子に三角関数を含む積分の問題。絶対値記号を外す方策がポイントだが，難しいものではない。不定積分の公式は知っておかなければならない。難易度Ｂ。

$\boxed{5}$

　題意は簡明だから，取り組みやすい。⑴は容易だろう。⑵はまともに扱うと煩雑な計算が待っている。一呼吸おいて賢明な方法に着眼したい。難易度Ｂ－。

$\boxed{6}$

　無限遠にて収束する数列の問題。問題が誘導的に構成されているので難しいものではない。証明問題では，数学的帰納法を利用する。難易度Ｂ。

121112

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

$\boxed{1}$　aを正の実数とし，$a \fallingdotseq \frac{1}{2}$とする。曲線$C$：$y=x^2$上の2点$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$と$\mathrm{Q}(a, a^2)$をとる。点Pを通りPにおける$C$の接線と直交する直線を$l$とし，点Qを通りQにおける$C$の接線と直交する直線を$m$とする。$l$と$m$の交点が$C$上にあるとき，以下の問いに答よ。

(1)　aの値を求めよ。

(2)　2直線l，mと曲線Cで囲まれた図形のうちでy軸の右側の部分の面積を求めよ。

<解答>

(1)

$y'=2x$だから，PにおけるCの接線の傾きは，1

したがって，直線lの傾きは-1，直線lの式は$y=-(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{4}$　①

QにおけるCの接線の傾きは$2a$だから，直線mの傾きは$-\frac{1}{2a}$，

直線mの式は$y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2$　②

①，②の交点がC上にあるのだから，$y=x^2$を①に代入すると，$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

$x=-\frac{3}{2}$のとき，②から$\frac{9}{4}=\frac{1}{2a}(\frac{3}{2}+a)+a^2$，$(a-1)(2a+3)(2a-1)=0$，$a=-\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$，1

$x=\frac{1}{2}$のとき，②から$\frac{1}{4}=-\frac{1}{2a}(\frac{1}{2}-a)+a^2$，$(2a-1)(2a^2+a+1)=0$，$a=\frac{1}{2}$

aは正の実数で，$a \fallingdotseq \frac{1}{2}$だから，$a=1$　（答）

(2)

求める図１の打点の部分の面積Sは台形S_1とS_2の和である。

$S=S_1+S_2$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)\right\}\times\frac{1}{2}$

$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-x^2\right)dx$

$=\frac{7}{16}+\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$=\frac{7}{16}+\frac{13}{48}=\frac{17}{24}$　（答）

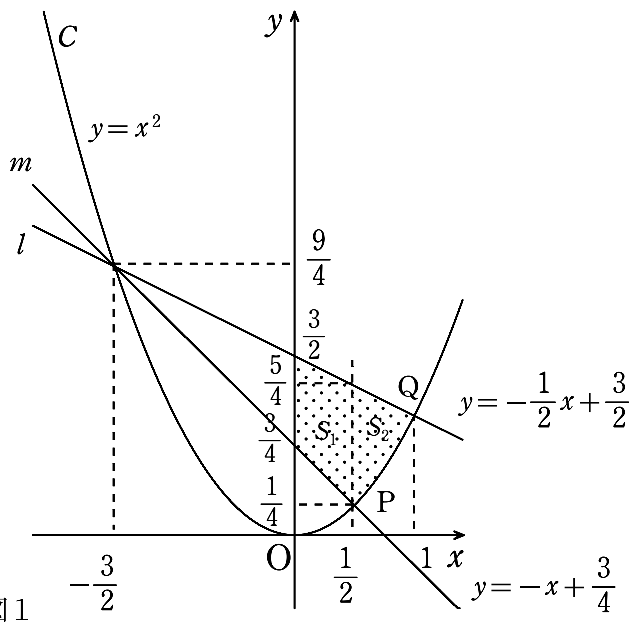

図１

＜解説＞

(1)

2次曲線の微分に関する基礎的な問題。接線の式，直交する式などはすらすら出てこなければならない。

(2)

図１のような図を描いて考える。難しい式の図ではないので，スムーズに描けるようでありたい。S_1は台形の面積として求めたが，当然，積分として求めることもできる。

$$S_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)-\left(-x+\frac{3}{4}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{16}$$

$\boxed{2}$　関数$f(x)$を

$$f(x)=\left|2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\frac{5}{4}\right|$$

と定める。以下の問いに答よ。

(1)　$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$とおく。$f(x)$をtの関数として表せ。

(2)　xが$0\leqq x\leqq 90^\circ$の範囲を動くとき，tのとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　xが$0\leqq x\leqq 90^\circ$の範囲を動くとき，$f(x)$のとりうる値の範囲を求めよ。また，$f(x)$が最大値をとるxは，$60^\circ<x<75^\circ$を満たすことを示せ。

＜解答＞

(1)

$$2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\frac{5}{4}$$

$$=(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2-(\sin^2 x+\cos^2 x)+t-\frac{5}{4}=t^2-1+t-\frac{5}{4}=t^2+t-\frac{9}{4}$$

したがって，$f(x)=\left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|$　（答）

(2)

$$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(-\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right)$$

$$=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$0\leqq x\leqq 90^\circ$すなわち$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$とすると，$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$は$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$から$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$まで単調に変化するから，$-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$　（答）

(3)

$$f(x)=\left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|=\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}\right|=g(t)\text{を描くと図２のようになる。}$$

したがって，最大値は$t=-\frac{1}{2}$，$\sqrt{3}$のいずれかに対応する$f(x)=g(t)$である。

$g\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$，$g(\sqrt{3})=\dfrac{3}{4}+\sqrt{3}<\dfrac{3}{4}+1.74<\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{4}=\dfrac{5}{2}$

したがって，$f(x)$の最大値は$\dfrac{5}{2}$だから，$0\leqq f(x)\leqq\dfrac{5}{2}$　（答）

このとき$-\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=t=-\dfrac{1}{2}$

したがって，$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{4}$

$\cos\left(60^\circ+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

$\cos\left(75^\circ+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{4\pi}{12}+\dfrac{3\pi}{12}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-1}{4}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}=\frac{6-2-1-2\sqrt{2}}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}=\frac{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}=\frac{1}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}>0$$

したがって，$\cos\left(75^\circ+\dfrac{\pi}{6}\right)<\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)<\cos\left(60^\circ+\dfrac{\pi}{6}\right)$

余弦関数$\cos\alpha$は$90^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ$では単調減少だから，$60^\circ+\dfrac{\pi}{6}<x+\dfrac{\pi}{6}<75^\circ+\dfrac{\pi}{6}$

したがって，$60^\circ<x<75^\circ$

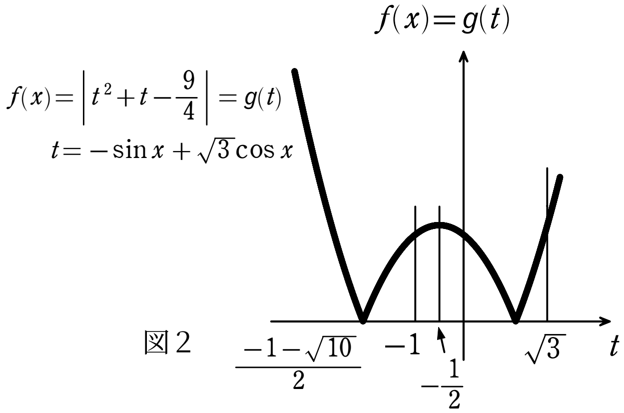

図２

＜解説＞

(1)

$2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2-(\sin^2 x+\cos^2 x)$に気づけば容易である。

どうしたら気づくか？$3\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x=(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2$が閃けば良い。

もっと必然性のある導き方は，$2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$を$t$の関数として表現してみる。すると，

$2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=at^2+bt+c=a(-\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2+b(-\sin x+\sqrt{3}\cos x)+c$

$=3a\cos^2 x-2\sqrt{3}a\sin x\cos x+a\sin^2 x+b(-\sin x+\sqrt{3}\cos x)+c$

$=2a\cos^2 x-2\sqrt{3}a\sin x\cos x+a\cos^2 x+a\sin^2 x+b(-\sin x+\sqrt{3}\cos x)+c$

$=a(2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x)+a+b(-\sin x+\sqrt{3}\cos x)+c$

したがって，$a=1$，$b=0$，$c=-1$，すなわち$2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=t^2-1$

(2)

$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$は常套的手法だから，すらすら導きたい。

(3)

図を描いて考える。三角関数の加法定理，角度と弧度の対応などはすらすら扱えなければならない。

$60°=\dfrac{\pi}{3}$，$75°=\dfrac{5\pi}{12}$である。

$\boxed{3}$　理系の問題$\boxed{3}$と同じ問題である。上記を参照のこと。

$\boxed{4}$　平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$$

を満たすとする。ただし，記号$\vec{a}\cdot\vec{b}$はベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　実数p，qに対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおく。このとき，次の条件

$$|\vec{c}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ p>0$$

を満たす実数p，qを求めよ。

(2)　平面上のベクトル$\vec{x}$が

$$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq 1,\ 1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq 2$$

を満たすとき，$|\vec{x}|$のとりうる値の範囲を求めよ。

<解答>

(1)

$|\vec{c}|^2=(\vec{c})^2=(p\vec{a}+q\vec{b})^2=p^2(\vec{a})^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2(\vec{b})^2=p^2-pq+q^2=1$　①

$\vec{c}\cdot\vec{c}=(p\vec{a}+q\vec{b})\cdot\vec{c}=p\vec{a}\cdot\vec{c}+q\vec{b}\cdot\vec{c}=q\vec{b}\cdot\vec{c}=q\vec{b}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=q\vec{b}\cdot p\vec{a}+q^2(\vec{b})^2=-\dfrac{1}{2}pq+q^2=1$　②

①，②を解くと，$p=0$，$q=\pm1$　および　$p=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$q=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$（符号同順）

しかるに$p>0$だから，$p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$q=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　（答）

(2)

$\vec{x}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=p(\vec{a})^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=p-\dfrac{q}{2}$，したがって，$-1\leqq p-\dfrac{q}{2}\leqq 1$　①

$\vec{b}\cdot\vec{x}=\vec{b}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=p\vec{b}\cdot\vec{a}+q(\vec{b})^2=-\dfrac{p}{2}+q$，したがって，$1\leqq-\dfrac{p}{2}+q\leqq 2$　②

$|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{(\vec{x})^2}=\sqrt{p^2-pq+q^2}$　③

①，②を満たす$(p,\ q)$は図３の平行四辺形の辺を含む内部である（打点部）。

この$(p,\ q)$に対して，③の範囲を考える。

$p^2-pq+q^2=\left(p-\dfrac{q}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}q^2$，しかるに①から，$0\leqq\left(p-\dfrac{q}{2}\right)^2\leqq1$

したがって，$0\leqq p^2-pq+q^2\leqq1+\dfrac{3}{4}q^2$，図３より，$|q|$の最大値は$\dfrac{10}{3}$だから，

$0\leqq p^2-pq+q^2\leqq\dfrac{28}{3}$　④

$p^2-pq+q^2=\left(q-\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}p^2$，しかるに②から，$1\leqq\left(q-\dfrac{p}{2}\right)^2\leqq4$，

したがって，$1+\dfrac{3}{4}p^2\leqq p^2-pq+q^2\leqq4+\dfrac{3}{4}p^2$，図３より$|p|$の最小値は0，最大値は$\dfrac{8}{3}$だから，

$1\leqq p^2-pq+q^2\leqq\dfrac{40}{3}$　⑤

④，⑤を満たすのは，$1\leqq p^2-pq+q^2\leqq\dfrac{28}{3}$，すなわち$1\leqq\left(\vec{x}\right)^2\leqq\dfrac{28}{3}$

したがって，$1\leqq\left|\vec{x}\right|\leqq\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$　（答）

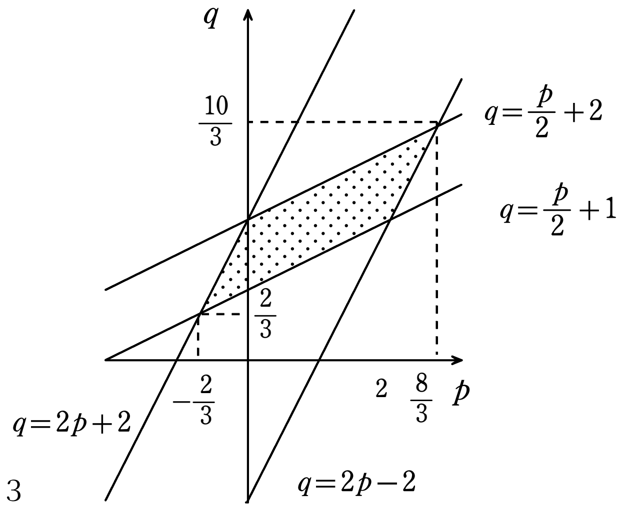

図３

＜解説＞

(1)

$\left|\vec{c}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$の計算をして，p，qに関する条件式を求めれば良い。$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{\vec{c}\cdot\vec{c}}=1$の代わりに，$\vec{c}\cdot\vec{c}=\left(\vec{c}\right)^2=1$の計算を行う。

(2)

(1)を利用することを考える。前問が後問のヒントになるように誘導的に問題が構成される場合が多いことは承知しているだろう。どのように利用するか。

$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$のように，他のベクトルをベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$によって表現できることに気づかなかればならない。$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$であるから$\vec{a}$，$\vec{b}$は１次独立である。任意のベクトルは１次独立な２つのベクトルの結合によって表される。このことは教科書に載っている。しかも，$\vec{c}$に与えらられた条件を満たすp，q

を求める問題が(1)だから，(2)でも$\vec{x}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおいて，$\vec{x}$の条件を$p$，$q$の条件として考えれば良い，ということに想到したいところだ。

　すると，うまい具合に問題が作られていて，①，②，③のような式が得られる。計算には少々工夫が必要だが，③を①，②によって上手く表現できる。

＜総評＞

　文系の問題としては，なかなか骨のある問題が揃っている。受験生の平均得点はどのくらいなのだろう。難易度からみると１，２，４，３の順に手をつけたいところだ。60点以上獲得には，１は完答，２は8割，３，４は5割ほどの出来栄えが必要だ。

$\boxed{1}$

　2次曲線の微分および積分の問題。題意は簡明。難易度はＣ。

$\boxed{2}$

　三角関数の式の変形と値の範囲の問題。難易度はＢ－。

$\boxed{3}$

　理系の $\boxed{3}$ と同じ問題。文系受験者には少々難しいか。難易度はＡ。

$\boxed{4}$

　ベクトルの問題。内積の理解，計算等には習熟していなければならない。(1)は難易度Ｂ－。(2)は解答方針の考察を要するので，文系の問題としては難しい部類だろう。Ａ

121123