1 (50 点)

幅の無視できる円弧型のレールABC$\left(\text{半径}\,R,\ \text{長さ}\,\dfrac{2}{3}\pi R\right)$があり，円弧を含む面と床が垂直になるよう置かれている。レールの中央Bは常に床に固定されており，Bを通る鉛直線OBを軸としてレールは回転することができる。大きさの無視できる物体(質量M)は，レール上を運動するとき，レールに束縛されながらなめらかに運動し，両端(A, C)でのみレールから離れることができる。

物体が円弧型レール上を運動するとき，円弧の中心Oから見て，物体がOBとなす角をθとする。重力加速度の大きさをgとし，以下の問に答えよ。

〔A〕 レールが回転していないとき，質量Mの物体をAにのせ，静かにはなしたところ，物体はレール上を図1のように運動し始めた。

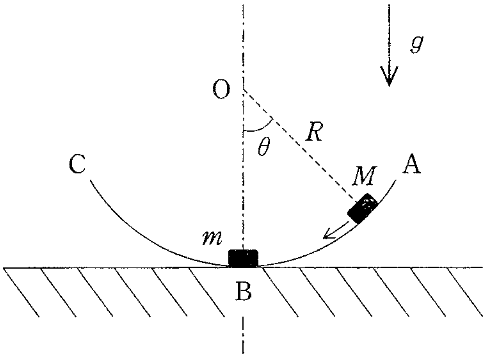


図1

(a) 物体が角$\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$の位置を運動しているとき，物体の速さ，レールから受ける垂直抗力を求めよ。

(b) 物体がレール上を運動し，Bの位置に到達したとき，レール上で静止していた大きさの無視できる物体(質量m)と衝突した。衝突後，質量mの物体はレール上をなめらかに運動し，再び衝突することなく，レールの端Cから離れた。2つの物体間の反発係数が$e\,(0<e<1)$であるとき，この運動が実現するためのmの条件を求めよ。

〔B〕 OB を軸にして，円弧型のレールを図 2 のように回転させる。このとき，レール上の物体（質量 M）はレールとともに回転運動をする。

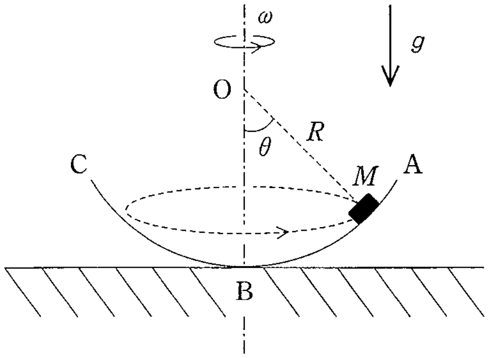


図 2

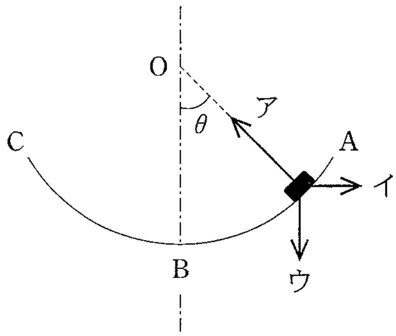


図 3

(c) ある角速度 ω でレールが回転し，角 $\theta(>0)$ の位置で物体が等速円運動している場合について考える。この運動を，回転しているレール上の観測者から見ると，物体にはたらく力は図 3 に示したようにつり合い，物体は静止して見える。この観測者から見た物体にはたらく力（図 3 ：ア，イ，ウ）の名称を書け。また，この運動は角速度 ω が $\omega_1 < \omega < \omega_2$ の条件を満たすとき実現する。このとき ω_1，ω_2 を求めよ。

(d) 問(c)において，レールの角速度を $\omega_0(\omega_1 < \omega_0 < \omega_2)$ に固定する。このとき，回転しているレール上の観測者から見ると，角 θ_0 の位置で物体にはたらく力はつり合い，物体は静止して見える。つぎに，物体をつり合いの位置から少し動かしはなしたところ，物体はレール上を運動し始めた。このとき，円弧型レールを含む平面内で物体にはたらく力は，図 3 の 3 種類である。物体が角 $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}\right)$ の位置で運動しているとき，物体にはたらくレールに沿った方向の力の大きさを，重力加速度 g を用いずに表せ。

(e) 問(d)において，角 θ_0 からの変位 $\Delta\theta(=\theta-\theta_0)$ が十分小さい場合について考える。このとき，物体にはたらくレールに沿った方向の力は，つり合いの位置からの距離に比例し，その方向は常につり合いの位置を向いているため，物体は単振動をする。この単振動の周期を重力加速度 g を用いずに表せ。

ただし，$|\Delta\theta|$ が十分小さいとき，$(\Delta\theta)^2$ の項は無視することができ，必要ならばつぎの式を用いよ。

$$\sin(\theta_0+\Delta\theta) \fallingdotseq \sin\theta_0+\Delta\theta\cos\theta_0$$

$$\cos(\theta_0+\Delta\theta) \fallingdotseq \cos\theta_0-\Delta\theta\sin\theta_0$$

(f) 問(c)の状態から，レールの角速度 ω をゆっくりと増加させた。この過程において角速度の変化は十分小さいため，短い時間における物体の運動は角速度 ω の等速円運動とみなすことができる。角速度が $\omega=\omega_2$ に達したとき，物体はレールの端Aから離れた。このとき，レールを真上から見ると，床面で定義されている x 軸と，図4のように重なって見えた。その後，レールから離れた物体はしばらくして床に落下し，レールは角速度 ω_2 を保ったまま回転した。物体が落下した時，物体とレールを真上から見ると，図5のように見えた。

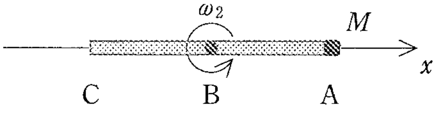


図4

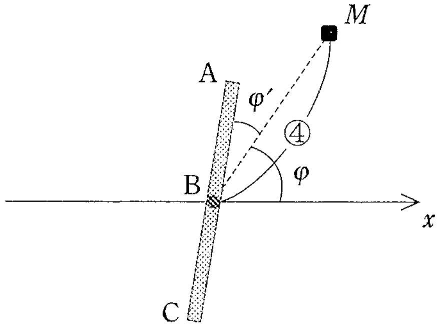


図5

この運動を2つの異なる座標系から考えてみる。以下の空欄に入る適切な数または数式を答えよ。

床で静止している観測者から物体の運動を考える。物体がレールから離れた直後，物体にはたらく力は，x 軸の正の向きに $\boxed{\quad ① \quad}$ ，鉛直下向きに $\boxed{\quad ② \quad}$ である。そのため，時間 $\boxed{\quad ③ \quad}$ ののち，物体はレールの中央Bから見て，x 軸と角 φ をなし，距離 $\boxed{\quad ④ \quad}$ だけ離れた位置に落下する。ここで角 φ は $\tan\varphi =$ $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ を満たす。

つぎに，レールの中央Bでレールとともに回転している観測者から物体の運動を考える。物体がレールから離れた直後，物体は静止しているとみなすことができ，物体にはたらく力はレールを含む平面内の力のみとなる。その後，物体はレールを含む面から離れ，その面と角 φ'（>0）をなす位置に時間 $\boxed{\quad ③ \quad}$ ののち落下する。ここで，$\varphi' =$ $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ $-\varphi$ である。このことから，回転している座標系において物体が運動しているとき，レールを含む面から離れる方向にもみかけの力がはたらいていることがわかる。

2 (50 点)

面積 S の同じ形状を持つ導体極板 A と B が間隔 d で向かい合わせに配置された平行板コンデンサーを，真空中に置く。このコンデンサーの極板間に，導体極板と同じ形状を持つ面積 S の金属板 P を，極板 A から距離 x を隔てて極板に対して平行に置く。真空の誘電率を ε_0 として以下の問に答えよ。ただし，極板端面および金属板端面における電場の乱れはなく，電気力線は極板間に限られるものとする。導線，極板，金属板の抵抗，重力は無視する。また金属板の厚さも無視する。

〔A〕 図 1 のように，極板 A と B は，スイッチ SW を介して接続され，極板 A は接地されている。

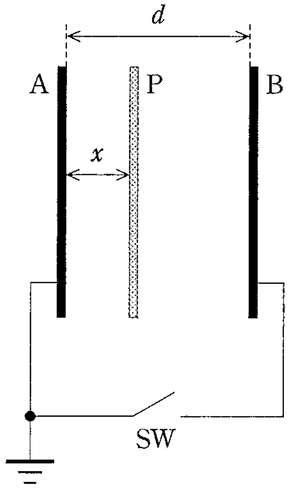


図 1

(a) スイッチ SW が開いている時，極板 A，B 間の電気容量を求めよ。

(b) スイッチ SW を閉じた後，金属板 P を電気量 Q の正電荷で帯電させる。この電荷によって極板 A と B に誘導される電気量を，それぞれ求めよ。

(c) 問(b)において，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーを求めよ。

(d) 問(b)の状態から，金属板Pを電気量Qの正電荷で帯電させたまま，金属板の位置をxから$x + \Delta x$まで微小変位させる。この変位による，コンデンサーに蓄えられている静電エネルギーの変化量を求めよ。ただし，x，dに比べて$|\Delta x|$は十分小さく，$(\Delta x)^2$は無視できるものとする。微小変位によりエネルギーが変化するということは，金属板Pは力を受けていることを意味する。微小変位の間は金属板Pにはたらく力の大きさは一定であるとみなして，この力を求めよ。ただし，極板AからBに向かう向きを力の正の向きとする。

〔B〕 つぎに，質量mの金属板Pを電気量Qの正電荷で帯電させたまま，図2のように自然長$\frac{d}{2}$，ばね定数kの2つの同じ絶縁体のばねに接続する。ばねの他端は，固定された極板AとBにそれぞれつながれている。この金属板は，極板A，Bと平行を保ったまま，極板に垂直な方向にのみ動くことができる。極板AとBは，電流計を介して接続され，極板Aは接地されている。ばねを接続したことによる電気容量の変化，電流計の抵抗，金属板の振動による電磁波の発生は無視する。

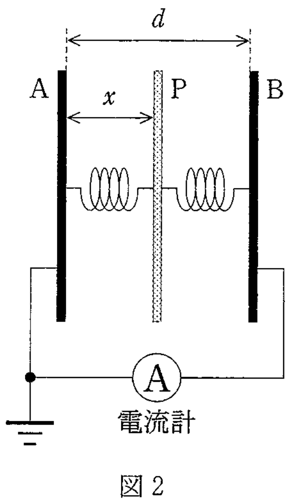


図2

(e) 金属板Pの位置を$x=\dfrac{d}{4}$に移動させてからはなす。このとき，金属板Pが単振動するために必要となるQに求められる条件をk，ε_0，S，dを用いて表せ。また，この条件を満たすとき，単振動の角振動数を求めよ。

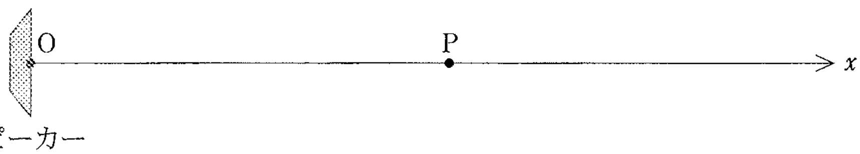
(f) 問(e)の条件で金属板Pが単振動しているとき，電流計には振動電流が観測される。この電流の最大値$I_{\max}$を求めよ。導線を流れる電流Iは，微小時間Δtの間に導線の断面をΔqの電荷が通過するとき，$I=\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$と定義される。

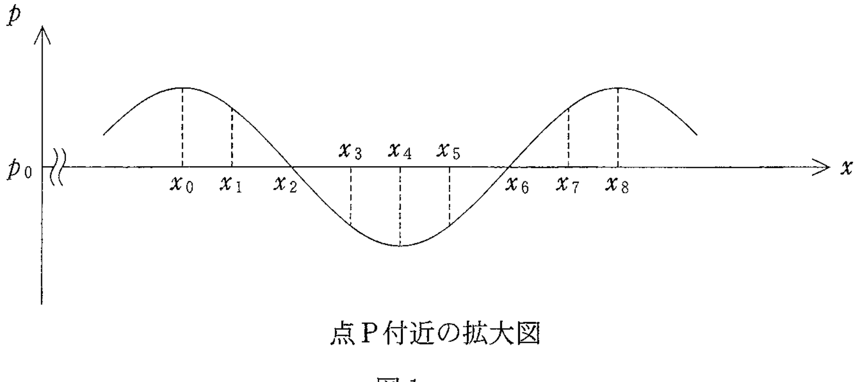
3 (50 点)

〔A〕 図1上図のように原点Oにスピーカーを置き，一定の振幅で，一定の振動数fの音波をx軸の正の向きに連続的に発生させる。空気の圧力変化に反応する小さなマイクロホンを複数用いて，x軸上($x>0$)の各点で圧力pの時間変化を測定する。

ある時刻において，x軸上($x>0$)の点P付近の空気の圧力pをxの関数として調べたところ，図1下図のグラフのようになった。ここで距離OPは音波の波長よりも十分長く，また音波が存在しないときの大気の圧力をp_0とする。圧力pが最大値をとる$x=x_0$から，つぎに最大値をとる$x=x_8$までのxの区間を8等分し，x_1，x_2，…，x_7と順にx座標を定める。

(a) x_1からx_8までの各位置の中で，x軸の正の向きに空気が最も大きく変位している位置，およびx軸の正の向きに空気が最も速く動いている位置はそれぞれどれか。





点P付近の拡大図

図1

つぎに点Pで空気の圧力pの時間変化を調べたところ，図2のグラフのようになった。圧力pが最大値をとる時刻$t=t_0$から，つぎに最大値をとる時刻$t=t_8$までの1周期を8等分し，t_1，t_2，…，t_7と順に時刻を定める。

(b) t_1からt_8までの各時刻の中で，x軸の正の向きに空気が最も大きく変位しているのはどの時刻か。

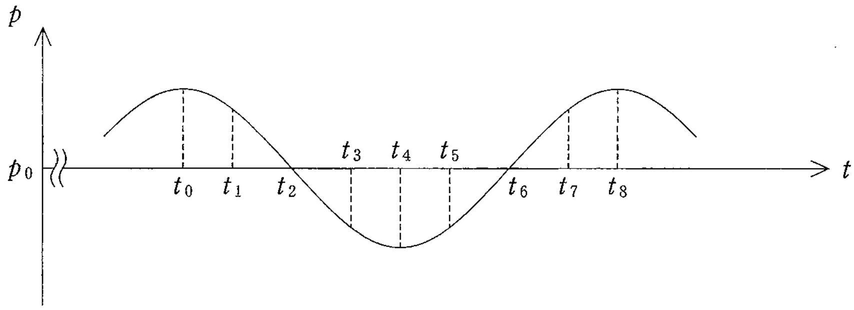


図2

図3のように，原点Oから見て点Pより遠い側の位置に，x軸に対して垂直に反射板を置くと，圧力が時間と共に変わらず常にp_0となる点がx軸上に等間隔に並んだ。

(c) これらの隣接する点の間隔dはいくらか。なお，音波の速さをcとする。

(d) 問(c)の状態から気温が上昇したところ，問(c)で求めたdは増加した。その理由を説明せよ。

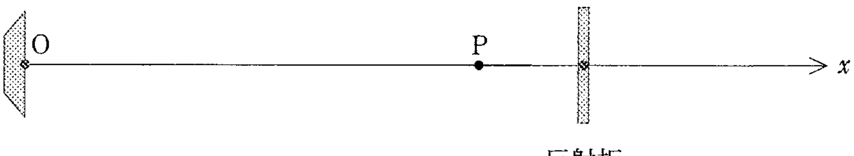
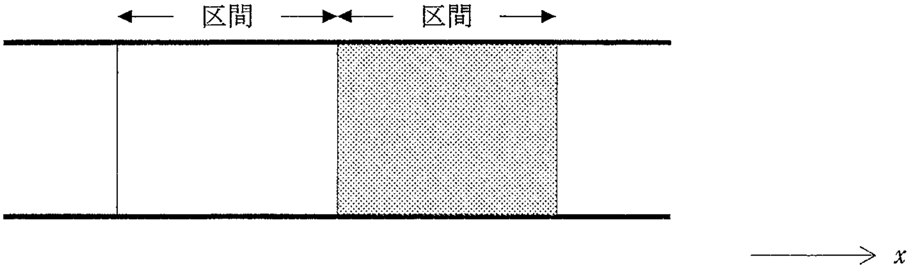


図3

〔B〕 音波が空気中を伝わるとき，各部分では空気の圧縮と膨張がくり返されている。圧縮と膨張は熱の伝達よりはやく起こるため，断熱変化とみなすことができる。音波が空気中をどのように伝わるかについて手がかりを得るため，空気を理想気体として以下のような簡単なモデルを考える。

図4上図のように空気を x 軸方向に細かく等間隔に分割し，各区間をピストン付きの円筒断熱容器内に閉じ込められた空気で置き換える。図4下図はそのひとつの部分を示したものである。ここでピストンはなめらかに動くことができ，また大気圧 p_0 における容器内の空気の体積を V_0 とする。

音波が到達することによりピストンは隣接する空気から力を受け，容器内の空気の圧力が $p_0 + \Delta p$ に増加し $(\Delta p > 0)$，体積が $V_0 - \Delta V$ に減少 $(\Delta V > 0)$ したとしよう。ただし，Δp と ΔV は，それぞれ p_0 と V_0 に比べ十分小さい量とする。以下の計算では，微小量どうしの積 $\left(\dfrac{\Delta p}{p_0}\right)\left(\dfrac{\Delta V}{V_0}\right)$ は無視してよい。また必要ならば，微小量 h（$|h|$ は1に比べて十分小さい），ゼロでない数 n に対して成り立つ近似式 $(1 + h)^n \fallingdotseq 1 + nh$ を用いよ。



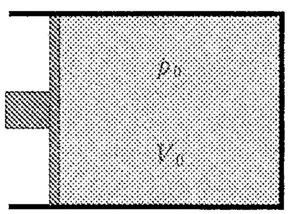


図4

(e)　容器内に閉じ込められた空気の圧力の増加量 Δp と体積の減少率 $\dfrac{\Delta V}{V_0}$ の比を $K = \left(\dfrac{\Delta p}{\Delta V}\right) V_0$ とおく。断熱変化のもとでは，圧力 p と体積 V の間に $pV^{\gamma} =$ 一定 の関係が成り立つことを用いて K を求めよ。ここで γ は，定圧モル比熱を定積モル比熱で割った定数である。

(f)　空気中を伝わる音波の速さ c は，K と空気の密度 ρ とを用いて $c = K^{\alpha}\rho^{\beta}$ と表せることがわかっている。両辺の次元を比べることにより，α と β の値を求めよ。

(g)　問(e)と問(f)の結果より，0 ℃ 付近の音波の速さ c は，摂氏温度 θ を用いて，$c = c_0(1 + a\theta)$ という近似式で表せることがわかる。空気の 1 モル当たりの質量を M，気体定数を R とし，0 ℃ における音波の速さ c_0 を式で表せ。また，定数 a の値を有効数字 2 桁で求めよ。