2012（H24）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

$\boxed{1}$（50点）

(1)　辺の長さが1である正四面体OABCにおいて辺ABの中点をD，辺OCの中点をEとする．2つのベクトル$\overrightarrow{DE}$と$\overrightarrow{AC}$との内積を求めよ．

(2)　1から6までの目がそれぞれ$\dfrac{1}{6}$の確率で出るさいころを同時に3個投げるとき，目の積が10の倍数になる確率を求めよ．

<解答>

(1)

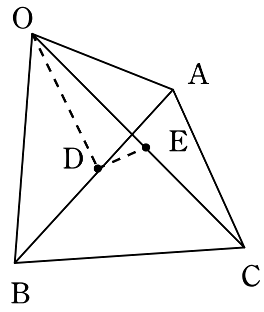

図1

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

しかるに，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}$だから，

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB})\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\cos 60^\circ-\cos 60^\circ=0$$

したがって，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}$　（答）

(2)

3個のさいころの目の積が10の倍数になる場合は，$5\times2=10$，$5\times4=20$，$5\times6=30$のように，5の目と偶数の目を含む場合である。このような場合の数は，以下のような場合の数の和になる。

ｉ) 2個のさいころが5と偶数の目，残るさいころの目が1，3となる場合の数
偶数の目が出る場合の数は3通り，1，3の目が出る場合の数は2通り
さいころの組合せは$3!=6$通りだから，合計の場合の数は$3\times2\times6=36$通り

ii) 2個のさいころが5と偶数の目，残るさいころの目が5となる場合の数
偶数の目が出る場合の数は3通り，5の目が出る場合の数は1通り
さいころの組合せは${}_3C_1=3$通りだから，合計の場合の数は$3\times1\times3=9$通り

iii) 2個のさいころが5と偶数の目，残るさいころの目が偶数となる場合の数
偶数の目が出る場合の数は3通り，さいころの組合せは${}_3C_1=3$通りだから，
合計の場合の数は$3\times3\times3=27$通り

3個の目による積が10の倍数になる場合の数は，これらを合計して，72通り

3個のさいころの目の組合せの数は6^3だから，3個の目の積が10の倍数になる確率は$\dfrac{72}{6^3}=\dfrac{1}{3}$　（答）

<解説>

(1)

立体図形のベクトル表示の問題。$\overrightarrow{DE}$を△ABCあるいは△ACOの各辺のベクトルで表せば，$\overrightarrow{AC}$との内積が容易に計算できる。$\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{OD}$のように，ベクトルの起点を逆にすると，符号が変わることに注意する。

(2)

まず，目の積が10の倍数になる場合とは，どのような場合かを考える。それは，10を素因数分解すると，10=2×5であることから，偶数（2，4，6）と5の積を含む場合である。この場合の数を求めるために，この場合をさらに三つの場合に分けて考える。

ⅰ)では，3個のさいころの目が異なるので，さいころの組合せは3!=6通りあることに注意する。ここで，奇数の目ではなく，1と3の目としているのは，5の目では2つの目のさいころが同じになるからである。ⅱ)では，2個のさいころの目が同じ5になるので，さいころの目の組合せは${}_3C_1=3$通りとなる。ⅲ)では，2個のさいころの目が偶数だから，さいころの目の組合せは${}_3C_1=3$通りとなる。

さて，別の考え方を紹介しよう。

（3個の目の積が10の倍数となる確率）=1−（3個の目の積が10の倍数にならない確率）

（3個の目の積が10の倍数にならない場合）とは（5と偶数の目が同時に含まれない場合）である。

これは，以下の5つの場合からなる。

ⅰ) 3個のさいころの目が全て偶数からなる。

$3\times3\times3=27$通り

ⅱ) 2個のさいころの目が偶数で，1個のさいころの目が1と3からなる。

$3\times3\times2\times{}_3C_1=54$通り

ⅲ) 1個のさいころの目が偶数で，2個のさいころの目が1と3からなる。

$3\times2\times2\times{}_3C_1=36$通り

ⅳ) 3個のさいころの目が1と3の場合が$2\times2\times2=8$通り

ⅴ) 5の目の出る場合は，下記のように19通り

5の目のさいころが1個と1と3の目のさいころ2個の場合が$2\times2\times{}_3C_1=12$通り

5の目のさいころが2個と1と3の目のさいころ1個の場合が$2\times{}_3C_1=6$通り

5の目のさいころが3個の場合が1通り

以上によって，（5と偶数の目が同時に含まれない場合の数）=27+54+36+8+19=144通り

したがって，（3個の目の積が10の倍数にならない確率）$=\frac{144}{6^3}=\frac{2}{3}$

（3個の目の積が10の倍数となる確率）$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$　（答）

$\boxed{2}$　（50点）

(1)　$\log_{10}3=0.4771$として，$\sum_{n=0}^{99}3^n$の桁数を求めよ．

(2)　実数aに対して，aを超えない最大の整数を$[a]$で表す．10000以下の正の整数nで$[\sqrt{n}]$がnの約数

となるものは何個あるか.

＜解答＞

(1)

初項1公比3の等比数列の和の公式により，$\sum_{n=0}^{99} 3^n = \frac{3^{100}-1}{3-1} = \frac{3^{100}-1}{2}$

$3^{99} < \frac{3^{100}-1}{2} < \frac{3^{100}}{2}$，$\log_{10} 3^{99} = 99\log_{10} 3 > 47.2$，

$\log_{10}\left(\frac{3^{100}}{2}\right) = 100\log_{10} 3 - \log_{10} 2 < 47.8 - 0.3 = 47.5$

したがって，$47.2 < \log_{10}\left(\frac{3^{100}-1}{2}\right) < 47.5$，したがって$\log_{10}\left(\frac{3^{100}-1}{2}\right)$の整数部分は47

したがって$\frac{3^{100}-1}{2} = \sum_{n=0}^{99} 3^n$の桁数は$(47+1)=48$桁　（答）

(2)

$\sqrt{n} = p + r$とおく。ただし，pは整数，$0 \leqq r < 1$である。すると，$[\sqrt{n}] = p$

$n = (p+r)^2 = p^2 + 2pr + r^2$，$\frac{n}{[\sqrt{n}]} = \frac{(p+r)^2}{p} = \frac{p^2+2pr+r^2}{p} = p + 2r + \frac{r^2}{p}$

$[\sqrt{n}]$がnの約数とすれば，$\left(2r + \frac{r^2}{p}\right)$が整数，しかるに$0 \leqq r < 1$かつ$1 \leqq p$だから，$0 \leqq 2r + \frac{r^2}{p} < 3$

したがって，$2r + \frac{r^2}{p} = 0$または1または2

$2r + \frac{r^2}{p} = 0$のとき，$r = 0$

$2r + \frac{r^2}{p} = 1$のとき，$(r+p)^2 = p^2 + p$，すると$r = \sqrt{p^2+p} - p$

$2r + \frac{r^2}{p} = 2$のとき，$(r+p)^2 = p^2 + 2p$，すると$r = \sqrt{p^2+2p} - p$

i) $r=0$のとき

$\sqrt{n} = p$だから，$n = p^2 \leqq 10000$，したがって，$1 \leqq p \leqq 100$となり，対応するnは100個ある。

ii) $r = \sqrt{p^2+p} - p$のとき

$\sqrt{n} = p + r = \sqrt{p^2+p}$，$n = p^2 + p \leqq 10000$だから，$1 \leqq p \leqq 99$，対応する$n$は99個ある。

iii) $r = \sqrt{p^2+2p} - p$のとき

$\sqrt{n} = p + r = \sqrt{p^2+2p}$，$n = p^2 + 2p \leqq 10000$だから，$1 \leqq p \leqq 99$，対応する$n$は99個ある。

以上によって，10000以下の正の整数nで$[\sqrt{n}]$がnの約数となるものは$100+99+99=298$個ある。

＜解説＞

(1)

等比級数の和の公式は，覚えておかねばならない。数の桁数は（その数の対数の整数部分+1）である。一般に，n桁の数は$a \times 10^{n-1}$，$1 \leqq a < 10$と表される。

すると，$\log_{10}(a\times10^{n-1})=\log_{10}a+(n-1)$, したがって，（対数の整数部分＋1）がその数の桁数となる。10進数の桁数を求めるには10を底とする対数をとることは知っていなければならない。

この問題は，等比級数の和，数の桁数と対数の関係など，挟みうちによる数の範囲の特定など，数学の基礎的な取扱いの力を問う問題である。完答したい。

(2)

解答の方針を着想することが必要である。ここではまず，$\sqrt{n}=p+r$とおいて，$[\sqrt{n}]$がnの約数であるという条件から，導かれる関係を求める。すると，$\left(2r+\frac{r^2}{p}\right)$が整数であり，$0\leqq 2r+\frac{r^2}{p}<3$という関係が導かれる。その結果，$p$を正の整数として，$n=p^2\leqq10000$，$n=p^2+p\leqq10000$，$n=p^2+2p\leqq10000$という３つの関係が得られる。つまり，$[\sqrt{n}]$が$n$の約数になるような整数$n$は，$n=p^2$，$p^2+p$，$p^2+2p$のように表現されるということである。

$\boxed{3}$ （50点）

3次関数$y=x^3-3x^2+2x$のグラフをC，直線$y=ax$をlとする．

(1)　Cとlが原点以外の共有点をもつような実数aの範囲を求めよ．

(2)　aが(1)で求めた範囲内にあるとき，Cとlによって囲まれる部分の面積を$S(a)$とする．$S(a)$が最小となるaの値を求めよ．

＜解答＞

(1)

$x^3-3x^2+2x=ax$，$x\fallingdotseq 0$として，$x^2-3x+2-a=0$　①

①が0以外の実数の解をもつためには，2次方程式の解の判別式$\frac{1}{4}+a\geqq0$，$a\geqq-\frac{1}{4}$　（答）

(2)

図２に与えられた式のグラフを示す。

$y=f(x)=x^3-3x^2+2x$　②

$y=ax$　③

$S(a)=S_1(a)+S_2(a)$

ただし，$S_1(a)$は②と③が囲む領域のうち，③＜②の面積，$S_2(a)$は②＜③の面積である。

aが大きくなるにつれ，$S_1(a)$は減少，$S_2(a)$は増加し，$S(a)$も増加するのは明らかである。したがって，最小となる$S(a)$として③が②に$x=0$において接する$a=2$までを考えれば良い。

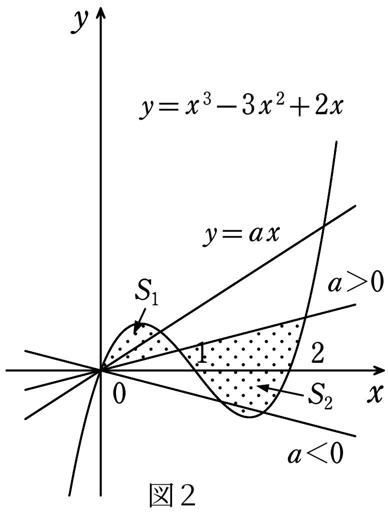

図２

①の2つの解をα，βとすれば，$\alpha<\beta$として，

$\alpha=\frac{3-\sqrt{4a+1}}{2}$，$\beta=\frac{3+\sqrt{4a+1}}{2}$　④

$S(a)=\int_0^\alpha\{f(x)-ax\}dx+\int_\alpha^\beta\{ax-f(x)\}dx$

$F(x)=\int f(x)dx$，$F(0)=0$とする。

$S(a)=F(\alpha)-\frac{1}{2}a\alpha^2-F(0)+\frac{1}{2}a\beta^2-F(\beta)-\frac{1}{2}a\alpha^2+F(\alpha)$

$\quad =2F(\alpha)-a\alpha^2-F(\beta)+\frac{1}{2}a\beta^2$

$\frac{dS(a)}{da}=2\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{da}-\alpha^2-2a\alpha\frac{d\alpha}{da}-\frac{dF(\beta)}{d\beta}\frac{d\beta}{da}+\frac{1}{2}\beta^2-a\beta\frac{d\beta}{da}$

$\quad =2f(\alpha)\frac{d\alpha}{da}-\alpha^2-2a\alpha\frac{d\alpha}{da}-f(\beta)\frac{d\beta}{da}+\frac{1}{2}\beta^2-a\beta\frac{d\beta}{da}$

ここで，$f(\alpha)=a\alpha$，$f(\beta)=a\beta$であるから，

$\frac{dS(a)}{da}=-\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2=0$　⑤

④，⑤から$a=38\pm27\sqrt{2}$

そこで，$a_1=38-27\sqrt{2}$として，$-\frac{1}{4}\leqq a\leqq 2$における$\frac{dS(a)}{da}$，$S(a)$の変化を図３に示す。

したがって，$S(a)$が最小となるのは，$a=38-27\sqrt{2}$　（答）

a　$-1/4$		a_1		2
$S'(a)$	$-$	0	$+$	
$S(a)$	↘		↗	

図３

＜解説＞

(1)

2次方程式の解の判別条件の問題である。

(2)

図２のような図を描いて考える。aが大きくなるにつれ，$S(a)$が大きくなるのは明らかだから，最小の$S(a)$を与えるaとして，直線lが3次曲線Cと3点で交わるような範囲$-\frac{1}{4}\leqq a\leqq 2$を考えれば良い。

解答では被積分関数の定積分を計算しないで，つまり$S(a)$を具体的に求めることなしに，極小値を与えるaを求めた。これは巧みな方法である。もし後述のように，具体的に計算して$S(a)$を求め，aで微分していたら，煩瑣な計算に時間を消費してしまうかも知れない。

$f(x)-ax$のように，被積分関数を$f(x)$とaxに分離して扱ったのはなぜだろうか。分離せずに，

$g(x)=x^3-3x^2+2x-ax$，$G(x)=\int g(x)dx$とする。

すると，$S(a)=\int_0^\alpha g(x)dx+\int_\alpha^\beta -g(x)dx=G(\alpha)-G(0)-G(\beta)+G(\alpha)=2G(\alpha)-G(\beta)$

$G(\alpha)=\frac{1}{4}\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\frac{a}{2}\alpha^2$，$G(\beta)=\frac{1}{4}\beta^4-\beta^3+\beta^2-\frac{a}{2}\beta^2$

ここで，$S(a)$の極値を求めるために，aで微分するのだが，

$$\frac{dS(a)}{da}=2\frac{dG(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{da}-\frac{dG(\beta)}{d\beta}\frac{d\beta}{da} \quad ⑤$$

$$\frac{dG(\alpha)}{d\alpha}=\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha-a\alpha=0$$

$$\frac{dG(\beta)}{d\beta}=\beta^3-3\beta^2+2\beta-a\beta=0$$

となって，何だか前に進めなくなってしまう。実は⑤の表式が拙いのである。Gには変数aが露わに含まれているので，$\frac{dS(a)}{da}$を⑤のように表してはならない。正しい表式は以下である。

$$\frac{dS(a)}{da}=2\frac{\partial G(\alpha)}{\partial a}+2\frac{dG(\alpha)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{da}-\frac{\partial G(\beta)}{\partial a}-\frac{dG(\beta)}{d\beta}\frac{d\beta}{da}$$

$$=-\alpha^2+2(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha-a\alpha)+\frac{1}{2}\beta^2-(\beta^3-3\beta^2+2\beta-a\beta)=-\alpha^2+\frac{1}{2}\beta^2$$

ここで，$\frac{\partial}{\partial a}$は偏微分を示し，高校数学の範囲外である。つまり，$a$を露わに含む場合は，$a$の関数である他の変数は無視して$a$のみによる微分項を付加しなければならない。$\frac{\partial}{\partial a}$の表式が高校数学の範囲外であるので，$\{f(x)-ax\}$のように表したのである。

さて，こうした巧妙な方法ではなく，$S(a)$を具体的に計算し，極値を計算する方法を検討しよう。

$S(a)=2G(\alpha)-G(\beta)$，$G(\alpha)=\frac{1}{4}\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\frac{a}{2}\alpha^2$，$G(\beta)=\frac{1}{4}\beta^4-\beta^3+\beta^2-\frac{a}{2}\beta^2$

α，βは①の解だから，$\alpha^2-3\alpha+2-a=0$，$\beta^2-3\beta+2-a=0$

$\alpha^2=3\alpha-2+a$

$\alpha^3=3\alpha^2-2\alpha+a\alpha=3(3\alpha-2+a)-2\alpha+a\alpha=7\alpha+a\alpha-6+3a$

$\alpha^4=\alpha(7\alpha+a\alpha-6+3a)=7\alpha^2+a\alpha^2-6\alpha+3a\alpha=7(3\alpha-2+a)+a(3\alpha-2+a)-6\alpha+3a\alpha$

$\quad=15\alpha+6a\alpha+5a+a^2-14$

$4G(\alpha)=(15\alpha+6a\alpha+5a+a^2-14)-4(7\alpha+a\alpha-6+3a)+4(3\alpha-2+a)-2a(3\alpha-2+a)$

$\quad=-\alpha-4a\alpha+a-a^2+2$

同様に，$4G(\beta)=-\beta-4a\beta+a-a^2+2$

したがって，$4S(a)=8G(\alpha)-4G(\beta)=(\beta-2\alpha)(1+4a)+a-a^2+2$

$\beta-2\alpha=\frac{3}{2}(\sqrt{4a+1}-1)$だから，$4\frac{dS(a)}{da}=9\sqrt{4a+1}-6+1-2a=0$

したがって，$a^2-76a-14=0$，$a=38\pm 27\sqrt{2}$において，$S(a)$は極値をとる。

できるだけ誤りないように，計算方法にも工夫を凝らした。それでも煩瑣で，誤りやすい。

解答のような方法が巧妙であることは言うまでもない。

$\boxed{4}$ (50点)

nを正の整数とする。数列$\{a_k\}$を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)}，\quad a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i \quad (k=1，2，3，\cdots)$$

によって定める.

(1)　a_2およびa_3を求めよ．

(2)　一般項a_kを求めよ．

(3)　$b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$とおくとき，$\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$を示せ．

＜解答＞

(1)

$a_{k+1}=-\dfrac{1}{k+n+1}+\dfrac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i$において，$k=1$，$2$とおいて，

$$a_2=-\frac{1}{1+n+1}+\frac{n}{1}\sum_{i=1}^{1}a_i=-\frac{1}{n+2}+na_1=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\quad（答）$$

$$a_3=-\frac{1}{2+n+1}+\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{2}a_i=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}(a_1+a_2)=-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}\quad（答）$$

ただし，$a_1+a_2=\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2(n+1)}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{2}{n(n+2)}$

(2)

(1)の結果から，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$　①　が推定される。

このことを数学的帰納法によって証明する。

$k=m$で①が成立するとする。すなわち，$a_m=\dfrac{1}{(n+m-1)(n+m)}=-\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{n}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}a_i$

すると，$\sum_{i=1}^{m-1}a_i=\dfrac{m-1}{n}\left\{a_m+\dfrac{1}{m+n}\right\}$

$k=m+1$では,

$$a_{m+1}=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m-1}a_i+\frac{n}{m}a_m$$

$$=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{m-1}{m}\left\{a_m+\frac{1}{m+n}\right\}+\frac{n}{m}a_m=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{m-1}{m(m+n)}+\frac{m+n-1}{m}a_m$$

$$=\frac{(m-1)(m+n+1)-m(m+n)}{m(m+n)(m+n+1)}+\frac{1}{m(n+m)}=\frac{-(n+1)}{m(m+n)(m+n+1)}+\frac{1}{m(n+m)}$$

$$=\frac{1}{(n+m)(n+m+1)}$$

以上によって，①は$k=1$，2で成立し，$k=m$で①が成立すれば，$k=m+1$でも成立するので，

すべてのkにおいて，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$である。

(3)

$$\frac{1}{(n+k)(n+k)}<a_k=\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}<\frac{1}{(n+k-1)(n+k-1)}$$

したがって，$\dfrac{1}{n+k}<\sqrt{a_k}<\dfrac{1}{n+k-1}$

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}$

しかるに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}k}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$

一方，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}(k-1)}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$となる。

＜解説＞

(1)

題意は簡明だから，ていねいに計算すれば，紛れはないだろう。

(2)

(1)の結果から，容易に推定される。しかし，そのことが確かであることを証明せねばならない。すべての整数について成立することを証明するには，帰納法を用いることが適切であることは，読者も良く承知しているだろう。この過程では，式の変換を上手に行うことが必要である。

(3)

解答の方針の考案に着眼，着想を必要とする。極限値がある値に収束することを証明するには，挟みうち法が有効であることを想起する。

$\displaystyle a_k=\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$を凝視すれば，$\displaystyle\frac{1}{n+k}<\sqrt{a_k}<\frac{1}{n+k-1}$と挟むことができることに気づくであろう。

次に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$と$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}$の値がどうなるか，考えねばならない。ここで，区分求積法のことを思い出す。教科書には，以下のような不等式が区分求積分法によって証明されている。

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdot+\frac{1}{2n-1}>\log 2$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdot+\frac{1}{2n}<\log 2$$

教科書に掲載されている方法は熟知しておきたい。

$\boxed{5}$ (50点)

行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で定まる１次変換を$f$とする．原点O (0, 0)と異なる任意の2点P，Qに対して

$\displaystyle\frac{OP'}{OP}=\frac{OQ'}{OQ}$が成り立つ．ただし，P’，Q’はそれぞれP，Qの$f$による像を表す.

(1)　$a^2+c^2=b^2+d^2$を示せ.

(2)　１次変換fにより，点$(1,\ \sqrt{3}\ )$が点$(-4,\ 0)$に移るとき，Aを求めよ.

<解答>

(1)

任意の点だから，P(1，0)，Q(0，1)として考える。

P' (x_p', y_p')，Q' (x_q', y_q')として，$\begin{pmatrix} x_p' \\ y_p' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_q' \\ y_q' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

$\dfrac{OP'}{OP}=\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{1}=\dfrac{OQ'}{OQ}=\dfrac{\sqrt{b^2+d^2}}{1}$，したがって，$a^2+c^2=b^2+d^2$

(2)

点$(1, \sqrt{3})$が点$(-4, 0)$に移るのだから，$\dfrac{OP'}{OP}=\dfrac{4}{2}=2$

したがって，$a^2+c^2=b^2+d^2=4$　①

$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+\sqrt{3}b \\ c+\sqrt{3}d \end{pmatrix}$，したがって，$a+\sqrt{3}b=-4$　②，$c+\sqrt{3}d=0$　③

①，②，③により，$a=-1$，$b=-\sqrt{3}$，$c=\pm\sqrt{3}$，$d=\mp 1$（複合同順）

したがって，$A=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & \mp 1 \end{pmatrix}$　（複合同順）　（答）

<解説>

(1)

任意の点ということだから，まずは分かり易い点で考えてみるのが，コツだ。原点以外で分かり易い点といえば，(1，0)と(0，1)だろう。これらの点がfによって変換される点P'，Q'を求めて，$\dfrac{OP'}{OP}=\dfrac{OQ'}{OQ}$の計算をすれば良い。

分かり易い具体的な点で考えることが，このケースではうまく行った。ケースによっては，うまくいかないこともある。しかし題意を具体的に把握することが次に繋がる。それほど時間がかかるわけではないので，トライすることに価値がある。

これを一般的に扱うことを紹介しよう。

点P(x, y)のfによる像を点P'(x', y')とする。すると，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$

$\dfrac{OP'}{OP}=\dfrac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=k$とすれば，任意の点P$(x, y)$に対して，$k$は一定である。

$k^2(x^2+y^2)=x'^2+y'^2=(ax+by)^2+(cx+dy)^2$

したがって，$(a^2+c^2-k^2)x^2+(b^2+d^2-k^2)y^2+2(ab+cd)xy=0$

任意の点P(x, y)に対して，この式が成立するためには，x^2，y^2，xyの係数が0でなければならない。したがって，$a^2+c^2=b^2+d^2=k^2$である。加えて，$ab+cd=0$である。

(2)

(1)を援用する。①，②，③から，a，b，c，dを求める計算は難しいものではない。

$a=-\sqrt{3}b-4$，$c=-\sqrt{3}d$を①に代入すると，

$3b^2+8\sqrt{3}b+16+3d^2=8\sqrt{3}b+16+3(b^2+d^2)=8\sqrt{3}b+16+12=4$

$b=-\sqrt{3}$，$a=-\sqrt{3}b-4=-1$，$c=\pm\sqrt{4-a^2}=\pm\sqrt{3}$，$d=\mp\dfrac{c}{\sqrt{3}}=\mp 1$

$\boxed{6}$ (50点)

xyz空間に4点P(0, 0, 2)，A(0, 2, 0)，B($\sqrt{3}$, -1, 0)，C($-\sqrt{3}$, -1, 0)をとる．四面体PABCの$x^2+y^2\geqq 1$を満たす部分の体積を求めよ．

＜解答＞

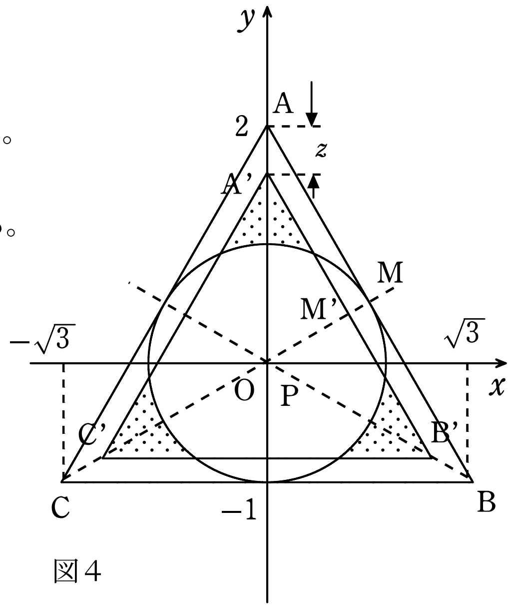

図４

図４に示すように$z=0$の面に四面体の頂点A，B，Cが存在し，△ABCは一辺の長さが$2\sqrt{3}$の正三角形である。四面体の頂点Pはz軸上にあり，Oは△ABCの重心だからz軸に垂直な面で四面体を切ると，断面は正三角形となる。

$z=z$の面と四面体の辺との交点をA'，B'，C'とすれば，AA'＝BB'＝CC'＝z

半径1の円が△A'B'C'から切り出した部分（打点部）の面積を$S(z)$とすれば，求める体積は

$V=\int_0^1 S(z)dz$

$1\leqq z$では，図１から分かるように，正三角形A'B'C'が円に含まれて，$S(z)=0$となる。したがって，積分の上端は1である。

$S(z)$＝△A'B'C'の面積－（円の面積－△A'B'C'の３辺が円から切り出した面積）

△A'B'C'の面積$=\left(3-z-\dfrac{z}{2}\right)\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z\right)=3\sqrt{3}\left(1-\dfrac{z}{2}\right)^2$

半径1の円の面積$=\pi$

△A'B'C'の３辺が円から切り出した面積を図５を参照して求める。

図５の打点部の面積S_tは，MM'$=\dfrac{z}{2}$，O'M'$=\cos\theta=1-\dfrac{z}{2}$，PM'＝M'Q$=\sin\theta$として，

S_t＝扇形O'PQ－△O'PQ$=\dfrac{2\theta}{2\pi}\times\pi-\sin\theta\cos\theta=\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

したがって，△A'B'C'の３辺が円から切り出した面積$=3S_t=3\theta-\dfrac{3}{2}\sin 2\theta$

$S(z)=3\sqrt{3}\left(1-\dfrac{z}{2}\right)^2-\pi+3\theta-\dfrac{3}{2}\sin 2\theta$

$\int_0^1\left(1-\dfrac{z}{2}\right)^2 dz=-\dfrac{2}{3}\left[\left(1-\dfrac{z}{2}\right)^3\right]_0^1=\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{7}{12}$

$\cos\theta=1-\dfrac{z}{2}$，$z=2-2\cos\theta$，$\dfrac{dz}{d\theta}=2\sin\theta$，$dz=2\sin\theta\, d\theta$だから，

$\int_0^1\theta dz=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\sin\theta\, d\theta=2\Big[-\theta\cos\theta+\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{\pi}{3}+\sqrt{3}$

$$\int_0^1 \sin 2\theta\, dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2\theta \sin\theta\, d\theta = \left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，$V=\int_0^1 S(z)dz$

$$=3\sqrt{3}\times\frac{7}{12}-\pi+3\sqrt{3}-\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}-2\pi$$　（答）

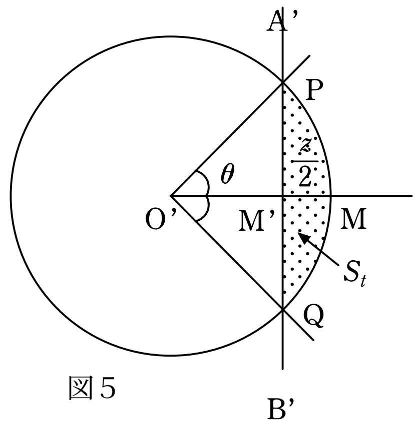

図５

＜解説＞

問題文から問題設定を的確に理解する。まずは，点ABCが$z=0$面上にあり，三角形ABCが正三角形であることを理解する。$z=0$のxy平面上に図を描く。点Pがz軸上にあるのだから，$z=z$面での四面体の断面（正三角形）と円との関係を理解する。すると題意は，四面体の断面（正三角形）が円からはみ出る部分の面積$S(z)$をz軸方向に加算していくことになることを理解する。つまり，$V=\int_0^1 S(z)dz$を計算することである。

図３でAA’＝BB’＝CC’＝zとなる理由は，OA＝OB＝OC＝OP＝2だから，△OAP，△OBP，△OCPは直角2等辺三角形となるからである。

$S(z)=3\sqrt{3}\left(1-\frac{z}{2}\right)^2-\pi+3\theta-\frac{3}{2}\sin 2\theta$ が求まったら，積分を実行すれば良い。

$\int_0^1 \theta dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \theta \sin\theta\, d\theta$のように，積分変数の変換を行う。不定積分$\int \theta\sin\theta\, d\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta$は部分積分法を用いれば容易に求まる。部分積分法$\int fg d\theta = f\int g d\theta - \int f' G d\theta$において，$f(\theta)=\theta$，$g(\theta)=\sin\theta$ とおく。ただし，$G(\theta)=\int g(\theta)d\theta$

$$\int \sin 2\theta\, dz = 2\int \sin 2\theta \sin\theta\, d\theta = \int(\cos\theta - \cos 3\theta)d\theta = \sin\theta - \frac{1}{3}\sin 3\theta$$

$$\cos\theta = \cos(2\theta-\theta) = \cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta \sin\theta$$

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$$

これらの三角関数の不定積分は，数学IIIの教科書に記載されており，習熟しなければならない。

＜総評＞

例年，150分で大４問250満点（総試験満点は700点）だったが，今年は180分大６問300満点（総試験満点は750点）となった。学力試験に占める数学の比重が高くなった。

殆どの問題の題意は簡明で一見扱い易いように見えるが，意外に手強い。粘り強い思考と解答への道を切り開く着想，着眼が随所に必要となる。東工大の数学の問題の特長だろう。これは，我が国の

将来の産業技術を担う技術者の卵たちに，東工大は発想力と強靭な思考力を求めているとのメッセージかも知れない。

合格点を獲得するには，易問を完答し，難問に食らいついて部分点を獲得することが必要だが，問題の難易を迅速に見極め，解答方針を発想する力が重要である。煩瑣な計算が必要となる場合が多いので，式の変形や計算過程はていねいに書き連ねていくことが大切である。

$\boxed{1}$(1)，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$は完答したい。続いて$\boxed{4}$(1) (2)を確実に解答したい。$\boxed{3}$(1)は容易であり，(2)は積分の表式までは正確に解答したい。このような取り組みで60%以上の得点を確保できるだろう。$\boxed{1}$(2)の確率の問題は方針が迅速に出せれば，難しくはない。最後に$\boxed{6}$を手がけるのが良いだろう。

$\boxed{1}$(50点)

(1)は立体図形のベクトル表示による内積の計算の問題。簡単なベクトルの演算で答を求めることができる。難易度はC。

(2)は確率の問題。簡単そうだが解答の方針に，当然ながら，着想を必要とする。焦らずにていねいに取り組みたい。難易度はB

$\boxed{2}$(50点)

両問とも題意は簡明で，解答方針も着想しやすいので，完答したい。

(1)は整数と対数の問題。等比数列の和の桁数を対数によって求める。10を底とする対数（常用対数）の（整数部分＋1）が10進法の桁数になることに注意。難易度はB－

(2)も整数の問題。解答の方針に着眼，着想を必要とし，数学的思考力を必要とする。難易度はB

$\boxed{3}$(50点)

題意は簡明な積分の問題なのだが，定積分が煩瑣で，意外に手こずる可能性がある。煩瑣な計算を避ける巧みな方法があるのだが，練習問題等の経験がないと思いつかないだろう。一方，ごりごりと，定積分を実行し，その結果を微分して極小値を求める方法は，計算が煩瑣になって，計算ミスを招きかねない。いずれにしても，定積分の結果を微分して最小値を求めるという計算の問題を，いかに上手に取り扱うか，着想，着眼が問われる。

(1)は完答しなければならない。難易度C－

(2)は積分の極小値を求めるために微分をするのだから，煩瑣な定積分を回避する方法を見つければ，容易である。定積分を実行するにしても，簡明な表現形式になるように上手に定積分の結果を変形していくことが必要である。難易度はA－

$\boxed{4}$(50点)

数列の問題。題意は簡明だから，(1)，(2)は確実に解答したい。(3)は解答の方針に着眼，着想を必要とする。

(1)はていねいに計算すれば問題なかろう。難易度B－

(2)は(1)を援用すれば良いのだが，数式を上手に変換しないと帰納法の証明は骨が折れる。発想力と粘り強い思考力を必要とする良問だと思う。難易度B

(3)a_kの表式を凝視すれば，$b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$の表式を着想し，挟みうちによる方法を思いつくであろう。教科書に区分求積などの例題が記載されているのだから，解いておきたい。難易度A－

$\boxed{5}$(50点)

行列による1次変換の問題だが，題意は簡明であり，難しい問題ではない。(1)は正攻法でも，特別解

法でも，容易に導ける。難易度はＢ－。(2)も計算すれば良い。難易度はＣ。

$\boxed{6}$(50点)

題意は簡明だが，立体図形なので，敬遠しがちになろう。図を描いて，問題の本質を迅速に把握したい。ABCが$z=0$の平面上の正三角形であることを把握すれば，解答の方針が見えてくるだろう。半径1の円からはみ出る正三角形の面積をzの関数として求めることがポイントである。

zに関する積分もθに関する積分に置き換えて，粘り強く計算していこう。

解答方針の着想，強い思考力に基づく定式化力，粘り強い計算力，などを要する良い問題だと思う。難易度はA。

130111