2012（H24)年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）

第　1　問

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域Dを考える。

$$x^2+(y-1)^2\leqq 1\ ,\ \ x\geqq\frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線ℓ は原点を通り，Dとの共通部分が線分となるものとする。その線分の長さLの最大値を求めよ。

また，Lが最大値をとるとき，x軸とℓ のなす角$\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$の余弦$\cos\theta$を求めよ。

＜解答＞

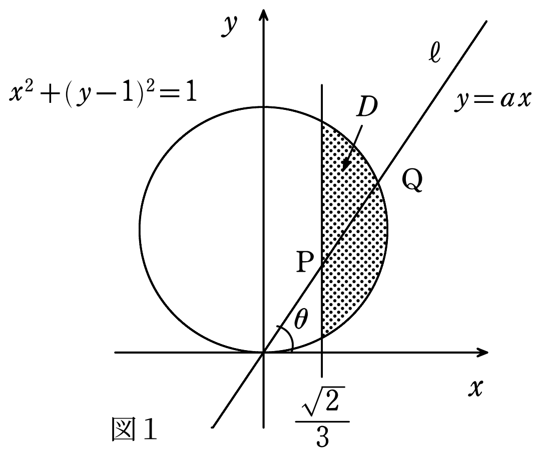


図１

図１を参照しながら考える。

直線ℓ を$y=ax$とする。直線ℓ がDと共通部分をもつには，$0<a$である。

直線ℓ と$x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$との交点$\mathrm{P}(x_p,\ y_p)$は，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{3}a\right)$

直線ℓ と円$x^2+(y-1)^2=1$との交点$\mathrm{Q}\ (x_q,\ y_q)$は，$\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\ \dfrac{2a^2}{1+a^2}\right)$

$$L=\mathrm{PQ}=\sqrt{(x_q-x_p)^2+(y_q-y_p)^2}=\sqrt{(x_q-x_p)^2+a^2(x_q-x_p)^2}=(x_q-x_p)\sqrt{1+a^2}$$

$$=\left(\frac{2a}{1+a^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\sqrt{1+a^2}$$

$f(a)=\left(\dfrac{2a}{1+a^2}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\sqrt{1+a^2}$とおく。

$$f'(a)=\left\{\frac{2(1+a^2)-4a^2}{(1+a^2)^2}\right\}\sqrt{1+a^2}+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{2a}{1+a^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}\left\{(2-2a^2)+a(1+a^2)\left(\frac{2a}{1+a^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$$

{　}の中は，$2-\frac{\sqrt{2}}{3}a(1+a^2)=-\frac{\sqrt{2}}{3}(a^3+a-3\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{3}(a-\sqrt{2})(a^2+\sqrt{2}\,a+3)$

aに対する$f'(a)$，$f(a)$の振る舞いは下表の通り。

a		$\sqrt{2}$	
$f'(a)$	$+$	0	$-$
$f(a)$	$\nearrow$		$\searrow$

$a=\sqrt{2}$のとき点Pのy座標は$\frac{2}{3}$，一方$x=\frac{\sqrt{2}}{3}$と円との交点のy座標は$1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$1-\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{2}{3}<1+\frac{\sqrt{2}}{3}$だから，$a=\sqrt{2}$で直線$\ell$ はDと共通部分をもつ。

$a=\sqrt{2}$で　$f'(a)=0$となり，$f(a)$は最大値$\frac{\sqrt{6}}{3}$をとる。

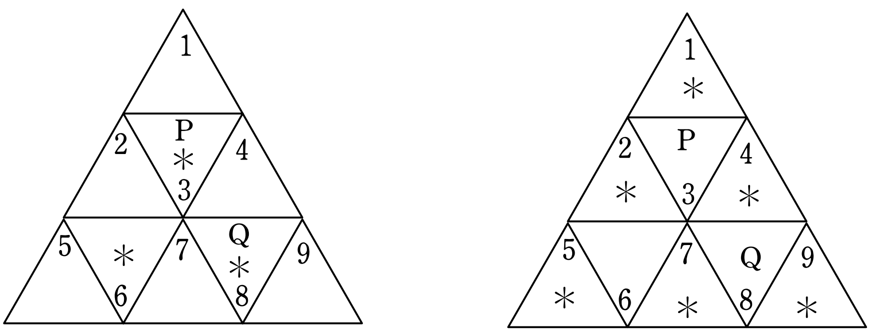
すなわちLの最大値は$\frac{\sqrt{6}}{3}$。また，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=a=\sqrt{2}$だから，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

<解説>

図を描く。題意は簡明であり，解答の方針は直ぐにたつ。導関数が0になる極値を求める。この計算がやや煩瑣になるので，もっとスマートな解法がないかと気になる。しかし，それを考えすぎると時間不足になるので，ここは初期の方針通りていねいに計算して，導関数が0になる直線の傾きaを求める。

第　2　問

図のように，正三角形を9つの部屋に辺で区切り，部屋P，Qを定める。1つの球が部屋Pを出発し，1秒後ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球がn秒後に部屋Qにある確率を求めよ。



(a)　　　(b)

図２　　　　＊は球が存在する可能性のある部屋

＜解答＞

図２のように三角形の部屋に番号をつけ，n秒後に球がm番の部屋に存在する確率を$P_{m,n}$とする。Qの部屋、すなわち$m=8$における確率$P_{8,n}$を求める。

$n=0$では，$P_{3,0}=1$，$P_{m,0}=0$（$m \neq 3$）である。

$n=1$では，$P_{3,1}=0$，$P_{1,1}=P_{2,1}=P_{4,1}=\dfrac{1}{3}$，他の部屋は存在確率は0で，$P_{8,1}=0$

$n=2$では，球が存在していた部屋から隣の部屋へ移るので，3, 6, 8の部屋に球が存在する可能性があり，他の部屋の存在確率は0,

$$P_{8,2}=\frac{1}{2}P_{4,1}+\frac{1}{2}P_{7,1}+P_{9,1}=\frac{1}{2}P_{4,1}=\frac{1}{6}$$

1秒の経過ごとに，球は部屋にとどまることができないので，辺を共有する部屋に同時刻に球が存在することはない。すなわち，図２(a)と(b)を1秒ごとに繰り返すことになる。

したがって，奇数秒後すなわち，$n=2i-1$のとき，$P_{3,n}=P_{6,n}=P_{8,n}=0$，ただし$i=1, 2, ...$

$n=2i$と偶数のとき，各部屋に球が存在する確率は，その1秒前に隣接する部屋（辺を共有する部屋）に存在する確率と移動する確率（隣接する部屋へは等確率）によって表されるから，

$$\begin{aligned}P_{8,n}&=\frac{1}{2}P_{4,n-1}+\frac{1}{2}P_{7,n-1}+P_{9,n-1}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}P_{3,n-2}+\frac{1}{3}P_{8,n-2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}P_{6,n-2}+\frac{1}{3}P_{8,n-2}\right)+\frac{1}{3}P_{8,n-2}\\&=\frac{1}{6}P_{3,n-2}+\frac{1}{6}P_{6,n-2}+\frac{2}{3}P_{8,n-2} \qquad ①\end{aligned}$$

しかるに，図２(a)のように，球は3番（P），6番，8番（Q）のいずれかの部屋にいるのだから，

$$P_{3,n}+P_{6,n}+P_{8,n}=P_{3,n-2}+P_{6,n-2}+P_{8,n-2}=1$$

すると，$P_{3,n-2}+P_{6,n-2}=1-P_{8,n-2}$，これを①に適用すると，

$$P_{8,n}=\frac{1}{6}(1-P_{8,n-2})+\frac{2}{3}P_{8,n-2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}P_{8,n-2} \qquad ②$$

両辺から$\dfrac{1}{3}$を引くと，$P_{8,n}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\left(P_{8,n-2}-\dfrac{1}{3}\right)$，$n=2i$，$i=1, 2, ...$　だから

$P_{8,n}-\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}\left(P_{8,2}-\dfrac{1}{3}\right)$，したがって，$P_{8,2}=\dfrac{1}{6}$だから

$P_{Q,n}=P_{8,n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i}\right\}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$，ただし$n$は偶数

$P_{Q,n}=P_{8,n}=0$，ただしnは奇数

＜解説＞

題意は簡明なのだが，いくつかの着想を必要とする。まずは解答の方針を考える。そのためには，1秒の経過ごとに，どのような事象が発生するのか，大雑把に把握する必要がある。

球は同じ部屋にとどまることがないのだから，どの部屋も1秒ごとに球の存在確率が0になる。部屋の辺を通して，隣接する部屋との間を球が出入りするのだから，ある部屋に存在する場合，辺を共有する別の部屋には球は存在できない。

したがって，球が部屋Pに存在する可能性があるとき，部屋Pと辺を共有する1，2，4番の部屋には球は存在する可能性はない。すると2番，4番と辺を共有する6番，8番の部屋には球が存在する可能性がある。このように考えると，球の存在する部屋が図２の(a)，(b)を交互に繰り返すことが分かる。

このように考えた上で，n秒後の各部屋の球の存在確率を求める必要がある。それは，1秒前の各部屋の球の存在確率によって決まるはずである。1秒後に辺を共有する部屋から球が移動するからである。このようにして，n秒後の各部屋の球の存在確率は$(n-1)$秒後の存在確率によって表現されることになる。ここで得られる確率の漸化式を解くことによって，部屋Qにおける球の存在確率を求めることができる。

この際，図２(a)，(b)を交互に繰り返すので，3，6，8番の部屋のn秒後の存在確率は，それらの部屋の$(n-2)$秒後の存在確率によって表現できることがわかる。当然，3，6，8番の部屋の存在確率の和は1になることも頭に入れておかねばならない。これは，当たり前のことだが，しばしば忘れてしまうことがあるから要注意だ。

この条件を①に入れることにより，求める球の存在確率は簡潔な漸化式②によって記述される。このような簡潔な式になるのは，Pの部屋からみたとき，6番と8番（Q）の部屋は同じ条件であって，$P_{6,n}=P_{8,n}$であることによる。

得られた解は，$n \to \infty$で明らかに$\dfrac{1}{3}$になる。すなわち，3番，6番，8番の部屋の球の存在確率はほぼ等しくなる。これは直感と一致する。

第　3　問

座標平面で2つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2,\ \ \frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域をSとする。Sをx軸のまわりに回転してできる立体の体積をV_1とし，y軸のまわりに回転してできる立体の体積をV_2とする。

(1)　V_1とV_2の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}$の値と1の大小を判定せよ。

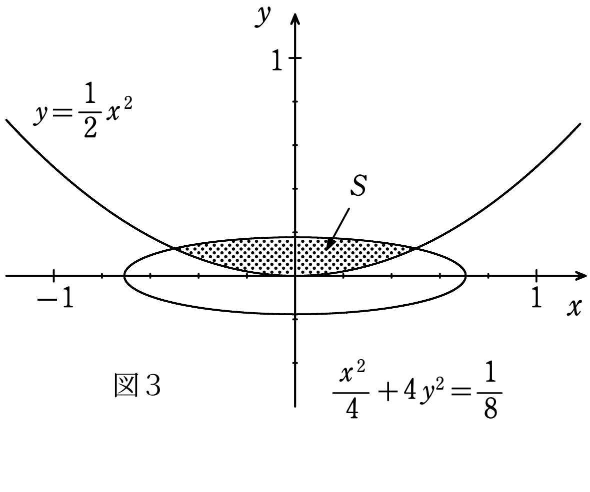


図３

＜解答＞

(1)

図３を参照して考える。

$y=\dfrac{1}{2}x^2$　　①

$\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}$　　②

①と②の交点は，$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{8}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{8}\right)$

Sをx軸のまわりに回転してできる立体の体積V_1は，立体をx軸に垂直な直線で切ったときにできる円環の面積と微小な厚さの積を加算したものだから，

円環の面積＝（②を回転したときの円の面積－①を回転したときの面積）

$$=\left\{\pi\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}\right)-\pi\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right\}=\pi\left(-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}\right)$$，したがって

$$V_1=\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}\right)dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}\right)dx$$

$$=2\pi\left[-\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{48}+\frac{x}{32}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{11}{480}\pi$$

Sをy軸のまわりに回転してできる立体の体積V_2は，立体をy軸に垂直な直線で切ったときにできる円の面積と微小な厚さの積を加算したものだから，

$$V_2=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{8}}x^2dy=\pi\int_0^{\frac{1}{8}}2ydy+\pi\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}\left(\frac{1}{2}-16y^2\right)dy=\pi\Big[y^2\Big]_0^{\frac{1}{8}}+\pi\left[\frac{y}{2}-\frac{16}{3}y^3\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}$$

$$=\frac{8\sqrt{2}-7}{192}\pi$$

(2)

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{480}{11}\times\frac{8\sqrt{2}-7}{192}=\frac{5}{22}(8\sqrt{2}-7)<\frac{5}{22}(8\times1.42-7)=\frac{5}{22}\times4.36=\frac{21.8}{22}<1$$

＜解説＞

題意は簡明だから，グラフを描いて，やるべきことを明確にする。回転体は，回転軸に垂直な平面で切ると，断面は円形（あるいは円環状）になる。その面積を求め，これと微小な厚さの積からなる体積を回転軸方向に加算していけばよい。

残るのは多項式の簡単な定積分。数値を入れると，やや煩瑣な計算になるが，ていねいに計算していけばよい。

第　4　問

nを2以上の整数とする。自然数（1以上の整数）のn乗になる数をn乗数と呼ぶことにする。
以下の問いに答よ。

(1)　連続する2個の自然数の積はn乗数でないことを示せ。

(2)　連続するn個の自然数の積はn乗数でないことを示せ。

＜解答＞

(1)

m，kを自然数とする。連続する2個の自然数の積がn乗数になることはない，
すなわち$m(m+1)=k^n$と表すことができないことを示す。

mと$m+1$は互いに素である。なぜなら，公約数$a>1$が存在するとすれば，i，jを適当な自然数として，$m=ia$，$m+1=ja$と表現できるので，
$(m+1)-m=1=ja-ia=a(j-i)>1$となって，矛盾が生じるからである。

kを素因数分解して，$k=p_1p_2\cdot\cdot p_{s-1}p_s$（$1\leqq p_i$は素数，$s$は適当な正の整数，$p_i\leqq p_{i+1}$）と表す。
すると，$k^n=(p_1p_2\cdot\cdot p_{s-1}p_s)^n$。互いに素な整数$K_1<K_2$によって，$k^n=K_1K_2$と表す。
すると，K_1，K_2には共通の素数が含まれないから，$K_1=$(p_1からp_sまでの適当な素数の積$)^n$，
$K_2=$(K_1には含まれない素数の積$)^n$ と表される。すなわち，互いに素な整数をk_1，k_2とすれば，
$K_1={k_1}^n$，$K_2={k_2}^n$と表すことができる。したがって，k^nを互いに素な整数の積で表すとすれば，
$k^n=K_1K_2={k_1}^n{k_2}^n$となる。
しかるに，$k_2-k_1\geqq 1$だから，$n\geqq 2$に対して，${k_2}^n-{k_1}^n>1$，したがって，${k_2}^n=m+1$，${k_1}^n=m$とすることはできない。すなわち$m(m+1)=k^n$とすることはできない。

したがって，連続する2個の自然数の積はn乗数でない。

(2)

m，kを自然数とする。仮に，連続するn個の自然数の積がn乗数になる，
すなわち$m(m+1)\cdot\cdot\cdot(m+n-2)(m+n-1)=k^n$　とする。すると，明らかに
$m<k<(m+n-1)$だから，$k=m+i$とすることができる。ただし，iは$1\leqq i<n-1$。
kを素因数分解して，$k=m+i=p_1p_2\cdot\cdot p_{s-1}p_s$（$1\leqq p_j$は素数，$s$は適当な正の整数，$p_j\leqq p_{j+1}$）と表す。

すると，$m(m+1)\cdot\cdot\cdot(m+n-2)(m+n-1)=k^n=(m+i)^n=(p_1p_2\cdot\cdot p_{s-1}p_s)^n$　　①
しかるに，$(m+i-1)$と$(m+i)$，$(m+i)$と$(m+i+1)$は(1)でも示したように，互いに素だから，共通の素因数をもたない。ところが，①は，$(m+i-1)$も$(m+i+1)$も$(m+i)$の素因数をもつことを示している。これは$(m+i-1)$と$(m+i)$，$(m+i)$と$(m+i+1)$が互いに素であることに矛盾する。

したがって，$m(m+1)\cdot\cdot\cdot(m+n-2)(m+n-1)=k^n$は成立せず，連続する$n$個の自然数の積が$n$乗数になることはない。

<解説>

整数の問題である。一見して当たり前の事象の証明が求められている。具体的に数値をあてはめても，命題が真なることは当然だと思える。だが，こうした当たり前の命題ほど，数学論理の連鎖によって，証明することが難しい場合が多い。

まずは，どのような方針によって証明すべきか，着眼，着想が必要である。

(1)では，$m(m+1)=k^n$という式が成立するかどうかである。この式を凝視して，考えを巡らせると，kを二つの整数の積で表したとき，$m(m+1)=k^n={k_1}^n{k_2}^n$になるが，この表現が成立するかどうかを検証すればよい。このような場合，背理法（数学A）を用いるとよいことは授業などで学んだであろう。その上で，mと$(m+1)$は互いに素という事実を着想することが大事である。

(2)では，(1)でのmと$(m+1)$が互いに素という事実を利用すれば，当たり前の事実をつなげながら，矛盾を導くことができる。当たり前の事実として，$k=m+i$となることを上げなければならない。そうすると，$(m+i)$の素因数が$(m+i\pm1)$にも含まれるという当たり前の事実に気がつく。そしてこれが矛盾である。(1)より(2)の方が容易だと思われるがどうだろう。

第　5　問

行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$が次の条件(D)を満たすとする。

(D)　Aの成分a, b, c, dは整数である。また，平面上の4点$(0, 0), (a, b), (a+c, b+d), (c, d)$は面積1の平行四辺形の4つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とおく。次の問いに答よ。

(1)　行列BAと$B^{-1}A$も条件(D)を満たすことを示せ。

(2)　$c=0$ならば，AにB，B^{-1}のどちらかを左から次々にかけることにより，4個の行列

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$のどれかにできることを示せ。

(3)　$|a|\geqq|c|>0$とする。BA，$B^{-1}A$の少なくともどちらか一方は，それを$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$とすると

$$|x|+|z|<|a|+|c|$$

を満たすことを示せ。

<解答>

(1)

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$だから，

平面上の4点$(0, 0), (a, b), (a+c, b+d), (c, d)$は行列$B$によって，図４のように$(0, 0), (a+c, b+d), (a+c+c, b+d+d), (c, d)$に対応する。これより，$(a, b)$が$(a+c, b+d)$に$(a+c, b+d)$が$(a+c+c, b+d+d)$に移動している。これらの2点はベクトル$(c, d)$だけ移動したことになり，2点を結ぶ辺はベクトル$(c, d)$に平行である。したがって，同じく面積1の平行四辺形

の頂点をなしている。

Bの逆行列は$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$だから，$B^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c & b-d\\c & d\end{pmatrix}$となるので，

平面上の4点$(0, 0), (a, b), (a+c, b+d), (c, d)$は行列$B^{-1}$によって，

$(0, 0), (a-c, b-d), (a-c+c, b-d+d), (c, d)$に対応する。これより，$(a, b)$が$(a-c, b-d)$に

$(a+c, b+d)$が$(a-c+c, b-d+d)$に移動している。これらの2点はベクトル$(-c, -d)$だけ移動

したことになる。したがって，同じく面積1の平行四辺形の頂点をなしている。

以上によって，行列BAと$B^{-1}A$も条件(D)を満たす。

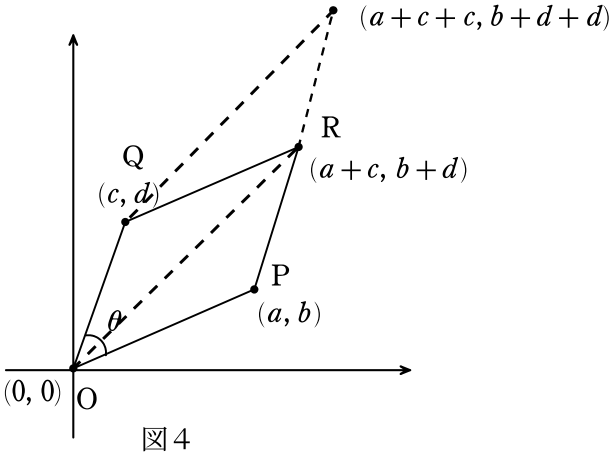


図4

(2)

4点からなる平行四辺形の面積が1であることから，$|ad-bc|=1$

$c=0$だから，$|ad|=1$，与えられた条件としてa, b, c, dは整数だから，$a=\pm1$，$d=\pm1$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b+d\\0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm1 & b+d\\0 & \pm1\end{pmatrix}$$，±は同順

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b-d\\0 & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm1 & b-d\\0 & \pm1\end{pmatrix}$$，±は同順

上記により，AにBを左からn回次々にかけることにより，行列の$(1, 2)$成分は$b+nd$となる。

$b\leqq0$の整数であれば，$d=1$のとき，適当なnで$b+nd=0$となる（$b=0$であれば$n=0$）。

同様に，AにB^{-1}を左からn回次々にかけることにより，行列の$(1, 2)$成分は$b-nd$となる。

$b\geqq1$の整数であれば，$d=1$のとき，適当なnで$b-nd=0$となる。

したがって，$c=0$ならば，AにB，B^{-1}のどちらかを左から次々にかけることにより，4個の行列

$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$のどれかにできる。

(3)

$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}$とすれば，

$x=a+c$，$z=c$だから，$|x|+|z|=|a+c|+|c|$

$B^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c & b-d\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}$とすれば，

$x=a-c$，$z=c$だから，$|x|+|z|=|a-c|+|c|$

$a>0$とすれば，$-a\leqq c<0$あるいは$0<c\leqq a$だから，

$-a\leqq c<0$のとき，$|a+c|<|a|$，したがって$|x|+|z|=|a+c|+|c|<|a|+|c|$

$0<c\leqq a$のとき，$|a-c|<|a|$，したがって，$|x|+|z|=|a-c|+|c|<|a|+|c|$

$a<0$とすれば，$a\leqq c<0$あるいは$0<c\leqq -a$だから，

$a\leqq c<0$のとき，$|a-c|<|a|$，したがって$|x|+|z|=|a-c|+|c|<|a|+|c|$

$0<c\leqq -a$のとき，$|a+c|<|a|$，したがって，$|x|+|z|=|a+c|+|c|<|a|+|c|$

以上のように，いずれの場合においても，$|x|+|z|=|a+c|+|c|<|a|+|c|$，あるいは $|x|+|z|=|a-c|+|c|<|a|+|c|$のいずれかが成立する。したがって，

BA，$B^{-1}A$の少なくともどちらか一方は，それを$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$とすると

$|x|+|z|<|a|+|c|$

を満たすことが示された。

<解説>

表現がやや難しいと感じさせる問題なので，題意を落ち着いて把握すること。

(1)では，行列の計算BAおよび$B^{-1}A$を行い，得られた行列の要素が条件(D)を満たすことを証明する。後述のように，平行四辺形の面積が1であることから，$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$によってできる平行四辺形の面積は，$|(a+c)d-(b+d)c|=|ad-bc|=1$。

また，$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$では，

平行四辺形の面積は，$|(a-c)d-(b-d)c|=|ad-bc|=1$。いずれも条件$(D)$を満たす。

(2)では，$|ad-bc|=1$であることを導く必要がある。すなわち，平行四辺形の面積は，$|(a+c)d-(b+d)c|=|ad-bc|=1$の中の，平行四辺形の面積が1であることから導かれる関係式である。図４において，

$$
\begin{aligned}
\text{平行四辺形OPQR}=2\triangle\mathrm{OPQ}&=|\vec{P}||\vec{Q}|\sin\theta=|\vec{P}||\vec{Q}|\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{|\vec{P}|^2|\vec{Q}|^2-(|\vec{P}||\vec{Q}|\cos\theta)^2} \\
&=\sqrt{|\vec{P}|^2|\vec{Q}|^2-(\vec{P}\vec{Q})^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2} \\
&=\sqrt{a^2d^2+b^2c^2-4abcd}=\sqrt{(ad-bc)^2}=|ad-bc|
\end{aligned}
$$

これは，数学Ｂの教科書の中で問題として扱われている。

ベクトル演算でこの式を導くことが困難であれば，図４’のように補助線を引いて，

$\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{OQQ'}+$台形$\mathrm{PP'QQ'}-\triangle\mathrm{OPP'}=\frac{1}{2}cd+\frac{1}{2}(b+d)(a-c)-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(ad-bc)$

a，b，c，dの組み合わせによっては$(ad-bc)$が正負をとることがあるので，$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}|ad-bc|$

さらに，BおよびB^{-1}がAに及ぼす作用をBAおよび$B^{-1}A$の行列演算で確認すること。

(3)は，BA，$B^{-1}A$の計算ができれば，半ば解けたようなものである。不等式の証明は，a，cの場合分けをすれば容易である。

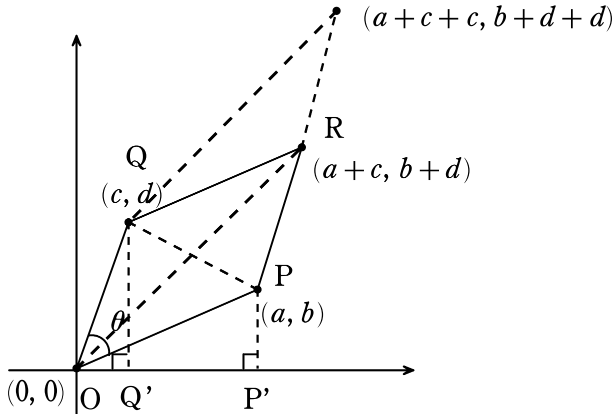


図４'

第　6　問

2×2行列$P=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$に対して

$$\mathrm{Tr}\,(P)=p+s$$

と定める。

a , b , cは$a\geqq b>0$，$0\leqq c\leqq 1$を満たす実数とする。行列A，B，C，Dを次で定める。

$$A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}a^c & 0\\ 0 & b^c\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}b^{1-c} & 0\\ 0 & a^{1-c}\end{pmatrix},$$

また実数xに対し$U(x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$とする。

このとき以下の問いに答よ。

(1)　各実数tに対して，xの関数

$$f(x)=\mathrm{Tr}\left((U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}U(-x)\right)$$

の最大値$m\,(t)$を求めよ。（ただし，最大値をとるxを求める必要はない。）

(2)　すべての実数tに対し

$$2\mathrm{Tr}\,(U(t)CU(-t)D)\geqq \mathrm{Tr}\,(U(t)AU(-t)+B)-m(t)$$

が成り立つことを示せ。

＜解答＞

$$AU(-t)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos t & a\sin t\\ -b\sin t & b\cos t\end{pmatrix}$$

$$U(t)AU(-t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\cos t & a\sin t\\ -b\sin t & b\cos t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\sin t\cos t\\ (a-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+b\cos^2 t\end{pmatrix}\qquad ①$$

$$U(t)AU(-t)-B=\begin{pmatrix} a\cos^2 t+b\sin^2 t-b & (a-b)\sin t\cos t \\ (a-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+b\cos^2 t-a \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a\cos^2 t+b(\sin^2 t-1) & (a-b)\sin t\cos t \\ (a-b)\sin t\cos t & a(\sin^2 t-1)+b\cos^2 t \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a-b)\cos^2 t & (a-b)\sin t\cos t \\ (a-b)\sin t\cos t & -(a-b)\cos^2 t \end{pmatrix}=(a-b)\cos t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

①でtをx，aを1，bを-1とすることによって，

$$U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)=\begin{pmatrix} \cos^2 x-\sin^2 x & 2\sin x\cos x \\ 2\sin x\cos x & \sin^2 x-\cos^2 x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

$$(U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)$$

$$=(a-b)\cos t\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix}$$

$$=(a-b)\cos t\begin{pmatrix} \cos t\cos 2x+\sin t\sin 2x & \cos t\sin 2x-\sin t\cos 2x \\ \sin t\cos 2x-\cos t\sin 2x & \sin t\sin 2x+\cos t\cos 2x \end{pmatrix}$$

$$=(a-b)\cos t\begin{pmatrix} \cos(2x-t) & \sin(2x-t) \\ -\sin(2x-t) & \cos(2x-t) \end{pmatrix}$$

$$f(x)=\mathrm{Tr}\left((U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)\right)=2(a-b)\cos t\cos(2x-t)$$

$a\geqq b>0$だから，$\cos t\geqq 0$に対して，$\cos(2x-t)=1$のとき，最大値は，$m(t)=2(a-b)\cos t$

$\cos t<0$に対して，$\cos(2x-t)=-1$のとき，$m(t)=-2(a-b)\cos t$

まとめると，$m(t)=2(a-b)|\cos t|$

(2)

$U(t)CU(-t)D=U(t)\{CU(-t)D\}=U(t)[\{CU(-t)\}D]=\{U(t)CU(-t)\}D$だから，

①において，aをa^c，bをb^cとおけば，

$$U(t)CU(-t)=\begin{pmatrix} a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t & (a^c-b^c)\sin t\cos t \\ (a^c-b^c)\sin t\cos t & a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t \end{pmatrix}$$

$$U(t)CU(-t)D=\{U(t)CU(-t)\}D=\begin{pmatrix} a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t & (a^c-b^c)\sin t\cos t \\ (a^c-b^c)\sin t\cos t & a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^c b^{1-c}\cos^2 t+b\sin^2 t & a^{1-c}(a^c-b^c)\sin t\cos t \\ b^{1-c}(a^c-b^c)\sin t\cos t & a\sin^2 t+a^{1-c}b^c\cos^2 t \end{pmatrix}$$

$$2\mathrm{Tr}\,(U(t)CU(-t)D)=2\,\{(a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2 t+(a+b)\sin^2 t\}$$

$$U(t)AU(-t)+B=\begin{pmatrix} a\cos^2 t+b\sin^2 t+b & (a-b)\sin t\cos t \\ (a-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+b\cos^2 t+a \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)-m(t)=2(a+b)-2(a-b)|\cos t|$$

$$2\mathrm{Tr}\,(U(t)CU(-t)D)-\{\mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)-m(t)\}$$

$$=2\,\{(a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2 t+(a+b)\sin^2 t\}-2(a+b)+2(a-b)|\cos t|$$

$$=2\,(a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2 t-2\,(a+b)\cos^2 t+2(a-b)|\cos t|$$

$$=2(a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c-a-b)\cos^2 t+2(a-b)|\cos t|$$

$a \geqq b>0$だから，$a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c-a-b \geqq b^c b^{1-c}+b^{1-c}b^c-a-b=b-a$となり，

$$2(a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c-a-b)\cos^2 t+2(a-b)|\cos t| \geqq 2(b-a)\cos^2 t+2(a-b)|\cos t|$$

$$=2(a-b)|\cos t|(1-|\cos t|) \geqq 0$$

したがって，すべての実数tに対して，

$2\mathrm{Tr}\,(U(t)CU(-t)D) \geqq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)-m(t)$　が成立する。

＜解説＞

題意は簡明であり，行列の計算をごりごりやっていかねばならないと，覚悟を決めて取り組む。ただし，良く問題式を眺めると，効率的に計算を進める方法があることがわかる。$U(t)*U(-t)$の計算をするとき，行列＊ごとに計算していては効率が悪い。ただし＊はA，C，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$。ここでは$A$についてのみ計算し，他については，対応する行列の要素を入れ替える。(1)では，xが変化したとき最大値は何かということだから，xを含む式の最大値を求める。

(2)もていねいに計算していく。根負けしないこと。目的とする大小関係の証明には，少々の着想を必要とする。式を凝視して，$2b \leqq a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c \leqq 2a$であることに気づくと，結論を満たす着想を得る。

＜総評＞

例年通り，多様な数学力を確かめる骨のある問題がそろっている。題意が簡明でそれほど着想を必要としない問題は，計算量が多く，多くの数式を書き下していく粘り強さと頑張りが試される。難しい問題は，題意を数学的課題に理解しなおしていくこと（つまり，問題の本質を理解すること）が必要で，そのための着想と問題解決の着想の二つが必要とされる。

第１，３，６，５問は完答したい。第４問，２問は類似問題の経験，着想や閃きなど，不確定な要素によって，解答が左右されるが，時間一杯食らいついて，部分点を獲得したい。

第１問

図形を方程式によって扱う問題。題意は簡明であり，特段の着想は必要とせず，微分等の計算を的確に行えばよい。難易度はＣ。

第２問

確率の過程の概要を理解し，解答の方針を考え，確率過程の表式を求め，計算をして解答する。この解答の流れができて，確率の表式が求まれば，計算は難しくはない。この解答の流れを作るには小さないくつかの着想も必要である。この着想がないと，なかなか難しくなる。着想としては，n秒後の存在確率は$(n-2)$秒後の存在確率によって表現されるということ，当たり前のことだが，3番（Ｐ），６番，8番（Ｑ）の部屋に球が存在する確率の和は1になるという事実を利用することである。

確率の表式を求めるのに，着想，着眼が必要なので，得点にばらつきが出やすいのではないか。正解率はどのくらいだろうか。興味深い。難易度はＡ－。

第３問

2次曲線の回転による立体の体積を求める問題。題意は簡明で特段の着想を必要としない。回転体の体積を求める方法は熟知していなければならない。難易度はＢ

第４問

整数の素因数分解に関わる証明問題で，出発点は中学の数学で習う事項である。しかし，解答の方針や論理過程での着眼，着想が必要とされるので，多くの受験生が戸惑ったのではなかろうか。背理法で証明しよう，と考えた受験生は多かったであろう。どのような矛盾を導くべきか，ここで，連続する自然数は互いに素である，ということが閃いた受験生は，素因数分解を利用して証明しようと考えて，論理を進めていけば，意外に容易に矛盾を指摘できるようになろう。ただし，論理過程でも，当たりまえの事実を的確に表現して，展開していくという意味での着眼が必要である。

ここで示したものとは異なる証明表現があろう。しかし，背理法と素因数分解の利用という大きな方針は同じという点で大同小異であろう。等号の成立の可否を何らかの不等式関係の連鎖を通じて明らかにしようとしても，なかなかうまくはいかない。出発点を間違えると，時間が容赦なく過ぎて，解答できなくなる。私自身も，方針を間違えて，解答に至るまでに，相当の時間を要した。

証明問題で気になるのが，採点基準である。採点者が複数になる場合には，同じ解答であっても採点者間で，点数がバラツク心配がある。そこを，どのように解消しているのか，気になるところである。難易度はＡ。

第５問

行列演算による図形の移動，数式の変形の問題。行列計算を迅速にできること，題意の的確な把握が必要であること，などを指摘しておこう。難易度はＡ－。

第６問

題意は簡明で，行列の計算をていねいに実行していく問題。ケアレスミスのないようにしたい。計算を効率的に進めるために少々の工夫が必要だ。証明では，少々の着想が必要だ。難易度はＢ。

数学（文科）

第　1　問

座標平面上の点$(x\ ,\ y)$が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，xのとりうる最大の値を求めよ。

＜解答＞

与えられた式をyについて整理すると，

$$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0$$

これをyの2次方程式とみなせば，yの実数解が存在しなければならない。

すると解の判別式$D≧0$でなければならない。

$$D=(4x+5)^2-4\cdot 3(2x^2+4x-4)=-8x^2-8x+83≧0$$

したがって，$8x^2+8x-73≦0$，$-\dfrac{5\sqrt{6}+2}{4}≦x≦\dfrac{5\sqrt{6}-2}{4}$

したがって，xのとりうる最大値は$\dfrac{5\sqrt{6}-2}{4}$

<解説>

題意は簡明だから，取りかかり易い問題だろう。どのように扱うか，方針を考え，結論を得るに至る過程を描いてみよう。与えられた式は，x，yについて2次式だから，xy平面上の閉じた2次曲線を示している。ということは，確かに変数x，yには限界があるということだ。

ここで，平面上に曲線が描かれるということは，当然，x，yは実数ということ，あるxに対してyが存在するためには，と思考を進めると，2次方程式の判別式！と閃いてほしいところだ。

もちろん判別式の考え方でなくともよい。

$$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=3\left(y+\frac{4x+5}{6}\right)^2-3\left(\frac{4x+5}{6}\right)^2+2x^2+4x-4=0$$

したがって，この式が成立するためには,

$3\left(\dfrac{4x+5}{6}\right)^2-2x^2-4x+4=3\left(y+\dfrac{4x+5}{6}\right)^2≧0$　でなければならない。これは，上で示した判別式と同等のものである。

$$3\left(\frac{4x+5}{6}\right)^2-2x^2-4x+4=\frac{16x^2+40x+25-24x^2-48x+48}{12}=\frac{-8x^2-8x+73}{12}≧0$$

第　2　問

実数tは$0<t<1$を満たすとし，座標平面上の4点O$(0,0)$，A$(0,1)$，B$(1,0)$，C$(t,0)$を考える。また線分AB上の点Dを$\angle$ACO$=\angle$BCDとなるように定める。tを動かしたときの三角形ACDの面積の最大値を求めよ。

<解答>

図１で，HとEはDHおよびECがOBに垂直となる点である。

すると（△ACDの面積）$=\dfrac{1}{2}$CE・OH

直線ABの方程式は，$y=-(x-1)$，すると点Eは$(t,1-t)$

直線ACの方程式は，$y=-\dfrac{1}{t}(x-t)$，$\angle$ACO$=\angle$BCDだから,

直線DCの方程式は，$y=\dfrac{1}{t}(x-t)$，すると点Dは$\left(\dfrac{2t}{1+t},\dfrac{1-t}{1+t}\right)$

したがって，△ACD$=\dfrac{1}{2}$CE・OH$=\dfrac{1}{2}(1-t)\left(\dfrac{2t}{1+t}\right)=\dfrac{t(1-t)}{1+t}$

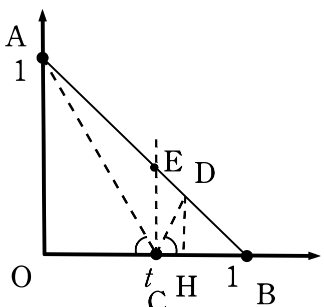


図１

$f(t)=\dfrac{t(1-t)}{1+t}$として，$f'(t)=\dfrac{-t^2-2t+1}{(1+t)^2}$，$t=\sqrt{2}-1$で$f'(t)=0$となる。

t		$\sqrt{2}-1$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$

$f(t)$は上表のような変化をするので，最大値$f(\sqrt{2}-1)=3-2\sqrt{2}$をとる。

<解説>

題意は簡明だから，取りかかり易い問題だろう。三角形ACDの面積を変数tによって表すことができればよい，ということだ。（△ACDの面積）$=\dfrac{1}{2}$CE・OHと表現することがポイントだ。

別解を検討しよう。

DH$=h$とする。△AOC∽△DHCだから，AO:DH$=$OC:CHだから，$1:h=t:(1-t-h)$

したがって，$h=\dfrac{1-t}{1+t}$，また△AOC$=\dfrac{t}{2}$，△BCD$=\dfrac{1-t}{2}h=\dfrac{(1-t)^2}{2(1+t)}$

$$\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{AOB}-\triangle\mathrm{AOC}-\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}-\frac{t}{2}-\frac{(1-t)^2}{2(1+t)}=\frac{1-t}{2}\left(1-\frac{1-t}{1+t}\right)=\frac{t(1-t)}{1+t}$$

以降は解答と同じ。これは図形的な解法である。

この問題は図形を座標によって表現しているので，辺を直線の方程式によって表しながら，考える上記の解答の方法が容易であろう。

第　3　問　（理科第２問と同じ）

<解答>，<解説>は理科第２問を参照のこと。

第　4　問

座標平面上の放物線Cを$y=x^2+1$で定める。s，tは実数とし$t<0$を満たすとする。点$(s\,,\,t)$から放物線Cへ引いた接線をl_1，l_2とする。

(1)　l_1，l_2の方程式を求めよ。

(2)　aを正の実数とする。放物線Cと直線l_1，l_2で囲まれる領域の面積がaとなる$(s\,,\,t)$を全て求めよ。

<解答>

(1)

$y'=2x$だから，放物線C上の点$(p\,,\,p^2+1)$を接点とする接線の方程式は$y-(p^2+1)=2p(x-p)$

これが，点$(s\,,\,t)$を通るとすれば，$t-(p^2+1)=2p(s-p)$となる。

これをpについて解くと，$p=s\pm\sqrt{s^2+1-t}$

点$(s\,,t)$を通る接線は，$y-t=2p(x-s)$であるから，$y=2p(x-s)+t=2(s\pm\sqrt{s^2+1-t})(x-s)+t$

したがって接線l_1の方程式は，$y=2(s+\sqrt{s^2+1-t})(x-s)+t$

接線l_2の方程式は，$y=2(s-\sqrt{s^2+1-t})(x-s)+t$

接線l_1，l_2が逆であってもよい。

(2)

二つの接点のx座標を，$p_1=s+\sqrt{s^2+1-t}$，$p_2=s-\sqrt{s^2+1-t}$とすれば,

放物線Cと直線l_1，l_2で囲まれる領域の面積は,

$$\int_{p_2}^{s}\{x^2+1-2p_2(x-s)-t\}dx+\int_{s}^{p_1}\{x^2+1-2p_1(x-s)-t\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-p_2x^2+(1-t+2p_2s)x\right]_{p_2}^{s}+\left[\frac{x^3}{3}-p_1x^2+(1-t+2p_1s)x\right]_{s}^{p_1}$$

$$=\left\{\frac{s^3}{3}-p_2s^2+(1-t+2p_2s)s-\frac{s^3}{3}+p_1s^2-(1-t+2p_1s)s\right\}$$

$$+\left\{\frac{{p_1}^3}{3}-{p_1}^3+(1-t+2p_1s)p_1-\frac{{p_2}^3}{3}+{p_2}^3-(1-t+2p_2s)p_2\right\}$$

$$=-(p_1-p_2)s^2+2({p_1}^2-{p_2}^2)s-\frac{2}{3}({p_1}^3-{p_2}^3)+(1-t)(p_1-p_2)$$

$p_1-p_2=2\sqrt{s^2+1-t}$，${p_1}^2-{p_2}^2=(p_1+p_2)(p_1-p_2)=4s\sqrt{s^2+1-t}$

${p_1}^3-{p_2}^3=2(4s^2+1-t)\sqrt{s^2+1-t}$などを代入すると,

$$=2\sqrt{s^2+1-t}\,(1-t-s^2)+8s^2\sqrt{s^2+1-t}-\frac{4}{3}(4s^2+1-t)\sqrt{s^2+1-t}$$

$$=2\sqrt{s^2+1-t}\,\left\{1-t-s^2+4s^2-\frac{2}{3}(4s^2+1-t)\right\}=\frac{2}{3}(s^2+1-t)^{\frac{3}{2}}=a$$

したがって，$s^2+1-t=\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$，$t=s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$

$t<0$だから，$s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}<0$，$s^2+1<\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$，$1<\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$，したがって，$\frac{2}{3}<a$

したがって，$0<a\leqq\frac{2}{3}$の場合，$(s\,,t)$は存在しない。

$\frac{2}{3}<a$に対して，領域の面積がaとなる$(s\,,t)$は,

$$t=s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}<0,\quad -\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}<s<\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}$$

を満たす$(s\,,t)$であり，図２の太線に示す。

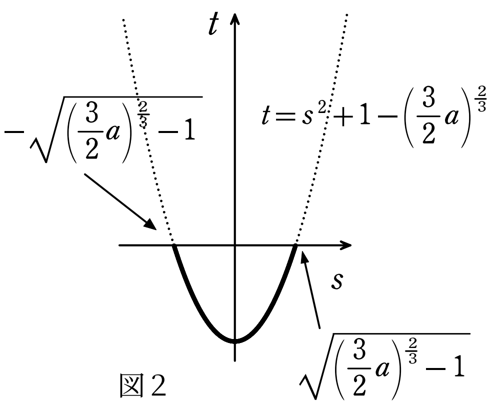


図２

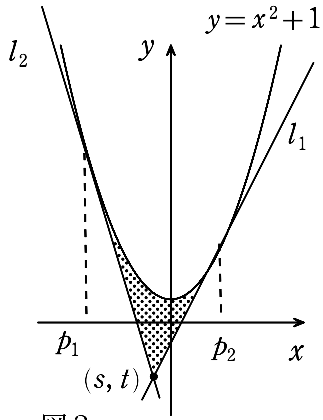


図３

＜解説＞

2次関数の微分積分の問題。(1)は図３のような図を描いて考察すればよい。(s , t)から2本の接線が引かれる。二つの接点のx座標を求めれば，容易に接線の方程式を求めることができる。

(2)は図３のハッチの領域をていねいに計算する。やや錯綜する定積分だからケアレスミスをしないように。この際、計算がスムーズに進むよう，少々工夫が必要だ。

「・・・領域の面積がaとなる(s , t)を全て求めよ」という表現にごまかされないこと。sとtの組合せがあって，それを数え上げるような問題と錯覚しないようにしたい。(s , t)の領域を求めるというように理解する。上の解答では図を描いたが，これが必要というわけではない。

＜総評＞

難易度が易から難までの問題が揃っている。第１問，第２問は完答し，第４問は概ねできなければならない。第３問は理系の受験生にとっても難しい問題だが，部分点は欲しいところだ。

第１問

難易度はＣだから，完答したい。

第２問

難易度はＣだから，完答したい。

第３問

理科の第２問と同じなので，＜解答＞，＜解説＞とも，そちらを参照すること。それにしても，理系の受験生にとっても難しい問題が出題され，戸惑った受験生が多かったのではないかと思う。確率の考え方は文系の学問にとっても重要だから，完答できなくても，食らいついて部分点を得るくらいのファイトが欲しいところだ。文系の問題として，難易度はＡ。

第４問

(1)は微分の問題としては，基本的なもので，完答できなくてはならない。(2)は面積の定積分を計算しなければならない。ケアレスミスをしないこと。題意の理解が重要だ。難易度はＢ。

120406