2013（H25)年度　京都大学　入学試験　物理解説

物　　理　　　　　（３問題　100点）

物理問題　Ⅰ

＜解答＞

（１）

ア　$\dfrac{GmMr}{R^3}$　　イ　$2\pi R\sqrt{\dfrac{R}{GM}}$

（２）

ウ　$\sqrt{\dfrac{2GMh}{R(R+h)}}$　　エ　$\sqrt{\dfrac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$　　オ　$\left|\dfrac{\mu-m}{\mu+m}\right|\sqrt{\dfrac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$

カ　$\dfrac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\dfrac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$

問１

カで$h=0$とおくと，衝突直後の質点Ｂの速さは，$v_B{}'=\dfrac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

エネルギー保存の法則により，

（地球中心での質点Ｂの運動エネルギー）＝（質点Ｂの運動エネルギー）＋（質点Ｂの地表での単振動のエネルギー）＋（地表からrまで重力に抗して得た位置のエネルギー），すなわち

$r=x+R$での質点Ｂの速さをv_r，重力をF_gとすれば，

$$\frac{1}{2}mv_B{}'^2=\frac{1}{2}mv_r{}^2+\frac{mGM}{2R}+\int_0^{r-R}F_g\,dx=\frac{1}{2}mv_r{}^2+\frac{mGM}{2R}+\int_0^{r-R}\frac{GmM}{(R+x)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}mv_r{}^2+\frac{mGM}{2R}-\frac{GmM}{r}+\frac{GmM}{R}$$

したがって，$\dfrac{1}{2}mv_r{}^2=\dfrac{1}{2}mv_B{}'^2+\dfrac{GmM}{r}-\dfrac{3GmM}{2R}$

$r\to\infty$において$v_r\geqq 0$であるためには，$\dfrac{1}{2}mv_B{}'^2-\dfrac{3GmM}{2R}\geqq 0$，したがって$v_B{}'\geqq\sqrt{\dfrac{3GM}{R}}$

$\dfrac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\dfrac{GM}{R}}\geqq\sqrt{\dfrac{3GM}{R}}$ となって，$\dfrac{\mu}{m}\geqq 2\sqrt{3}+3$　（答）

（３）

キ　$\dfrac{GmMx}{R^3}$　　ク　$\pi R\sqrt{\dfrac{R}{GM}}$　　ケ　m　　コ　$(2\sqrt{33}+11)m$

問２

図１を参照する。

地表から飛び出す瞬間の質点Ｂの速さv_Bは，$\dfrac{1}{2}mv_B{}^2=\dfrac{GMm}{2R}$によって，$v_B=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

このときの面積速度は$\dfrac{1}{2}rv_B\sin\theta=\dfrac{1}{2}Rv_B\sin 30^\circ=\dfrac{1}{4}R\sqrt{\dfrac{GM}{R}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{GMR}$

質点Ｂが地球から最も離れたときを$r=r_p$とすれば，地球中心方向の速さが0になり，地球表面接線

方向の速さをv_B'とすれば，面積速度は$\frac{1}{2}r_p v_B'\sin 90°=\frac{1}{2}r_p v_B'=\frac{1}{4}\sqrt{GMR}$　①

エネルギー保存の法則により，$\frac{1}{2}mv_B{}^2=\frac{GMm}{2R}=\frac{1}{2}mv_B{}'^2+\int_0^{r_p-R}F_g\,dx$

$=\frac{1}{2}mv_B{}'^2-\frac{GmM}{r_p}+\frac{GmM}{R}$，したがって，$\frac{GmM}{r_p}=\frac{1}{2}mv_B{}'^2+\frac{GMm}{2R}$　②

①，②から$r_p{}^2-2Rr_p+\frac{R^2}{4}=0$，$r_p=\left(\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\right)R$，$r_p>R$だから，$r_p=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)R$　（答）

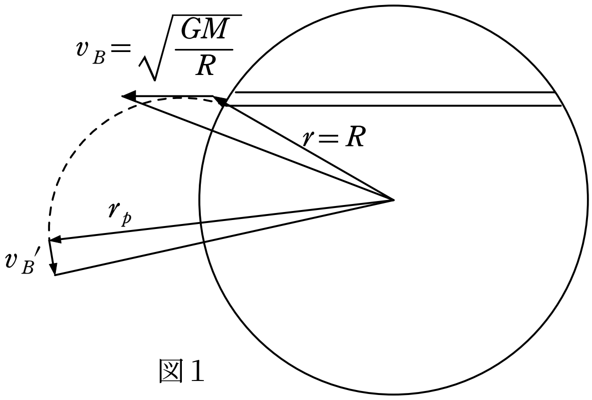


図１

＜解説＞

（１）

ア

半径 r の球の質量は$M\left(\frac{r}{R}\right)^3$だから，質量 m の質点に働く重力の大きさは,

$\frac{G}{r^2}m\times M\left(\frac{r}{R}\right)^3=\frac{GmMr}{R^3}$

イ

質点に働く重力をF，加速度をaとすれば，質点の変位r の方向と力の方向は逆だから,

$F=ma=-\frac{GmMr}{R^3}=-kr$，したがって$a=-\frac{GMr}{R^3}=-\frac{k}{m}r$，ただし$k=\frac{GmM}{R^3}$

すなわち，加速度が変位に比例し逆方向だから，質点は単振動する。単振動の周期の式は覚えていなければならない。すなわち，周期$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$

（２）

ウ

質点Aに働く重力は，$F_g=\frac{G}{r^2}\mu M=\frac{G}{(R+x)^2}\mu M$，ただし$r=R+x$，$x=0$は地球表面

質点Aが微小量Δx 落下したときに得る運動エネルギーは$F_g\Delta x$

したがって$x=h$から0まで落下したときに得る運動エネルギーは,

$\int_h^0-F_g\,dx=\int_h^0\frac{-G\mu M}{(R+x)^2}dx=G\mu M\left[\frac{1}{R+x}\right]_h^0=\frac{G\mu Mh}{R(R+h)}$

上の式の左辺で$-F_g$としたのは，重力の方向が変位xの負の方向だからである。

$x=0$での質点Aの速さをvとすれば，エネルギー保存の法則により，$\frac{1}{2}\mu v^2=\frac{G\mu Mh}{R(R+h)}$

したがって，$v=\sqrt{\dfrac{2GMh}{R(R+h)}}$

エ

質点Aは$x=0$では変位Rの単振動のエネルギー，すなわち$\dfrac{1}{2}kR^2=\dfrac{\mu GM}{2R}$をもつ。したがって，地球中心Oに到達する直前の速さをv_Cとすれば，エネルギー保存の法則により，

$\dfrac{1}{2}\mu {v_C}^2=\dfrac{1}{2}\mu v^2+\dfrac{\mu GM}{2R}$，したがって$v_C=\sqrt{\dfrac{2GMh}{R(R+h)}+\dfrac{GM}{R}}=\sqrt{\dfrac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$

ここでは，質点がトンネルに入ったときから，単振動することを理解しておく。

オ　カ

衝突後の質点Bの速さをv_B'，質点Aの速さをv_A'とすれば，弾性衝突のはね返り係数は1だから，

$1=\left|\dfrac{-v_A'-(-v_B')}{-v_C}\right|=\dfrac{v_B'-v_A'}{v_C}$

また運動量保存の法則により，$\mu v_C=\mu v_A'+mv_B'$

これらから，$v_A'=\dfrac{\mu-m}{\mu+m}v_C=\dfrac{\mu-m}{\mu+m}\sqrt{\dfrac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$，ただし，$\mu<m$のとき，$v_A'<0$となり，質点Aがはね返されて，正の方向へ動く。速さとして絶対値をとり，

$$v_A'=\left|\frac{\mu-m}{\mu+m}\right|\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$$

$$v_B'=\frac{2\mu}{\mu+m}v_C=\frac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$$

問１

ここでのポイントはエネルギーエネルギー保存の法則により

（地球中心での質点Bの運動エネルギー）

＝（質点Bの運動エネルギー）＋（質点Bの地表での単振動のエネルギー）＋（地表からrまで重力に抗して得た位置のエネルギー），であるということだ。

単振動のエネルギーは，エでも記載したように$\dfrac{1}{2}kR^2$であり，ここではアにも記載したように

$k=\dfrac{GmM}{R^3}$だから，単振動のエネルギーは$\dfrac{mGM}{2R}$

ウに記載のように，地表から$x=r-R$での重力は$\dfrac{GmM}{(R+x)^2}$だから，地表からrまで重力に抗して得る位置のエネルギーは，$\displaystyle\int_0^{r-R}F_g\,dx=\int_0^{r-R}\frac{GmM}{(R+x)^2}dx=GmM\left[\frac{-1}{R+x}\right]_0^{r-R}=-\frac{GmM}{r}+\frac{GmM}{R}$

質点Bが無限の遠方に飛び去るためには，$r\to\infty$でなお質点が移動する速さをもっているということ，すなわち，$v_r\geqq 0$ が必要である。

（３）

キ

トンネルと質点との間には摩擦がないので，質点にはトンネルに沿った方向の力しか働かない。

地球中心への重力が$\dfrac{GmMr}{R^3}$だから，トンネルに沿った方向の大きさは，$\dfrac{GmMr}{R^3}\times\dfrac{x}{r}=\dfrac{GmMx}{R^3}$

ク

加速度をaとすれば，運動方程式は，$F=ma=-\dfrac{GmMx}{R^3}=-kx$となるから，質点は単振動する。ただし，$k=\dfrac{GmM}{R^3}$。その周期は，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}=2\pi R\sqrt{\dfrac{R}{GM}}$，地表から反対の地表まで出る時間は周期の半分すなわち，$\dfrac{T}{2}=\pi R\sqrt{\dfrac{R}{GM}}$

（4）

ケ

（1），（2）と同様の考え方でよい。

地表とトンネル中心O'との距離は，$\sqrt{R^2-\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$，質点Aが地表でもつ単振動のエネルギーは$\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2=\dfrac{3}{8}kR^2=\dfrac{3G\mu M}{8R}$

したがって，質点AがO'でもつ速さv_Cは，エネルギー保存の法則により，$\dfrac{1}{2}\mu v_C{}^2=\dfrac{3G\mu M}{8R}$，

したがって，$v_C=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3GM}{R}}$

また衝突直後の質点Bの速さは，エに記載のように，$v_B{}'=\dfrac{2\mu}{\mu+m}v_C=\dfrac{\mu}{\mu+m}\sqrt{\dfrac{3GM}{R}}$

質点Bが地球中心から$r\geqq R$まで上がったとすれば，問１と同じ考え方で，エネルギー保存の法則により，$\dfrac{1}{2}mv_B{}'^2=\dfrac{1}{2}mv_r{}^2+\dfrac{3GmM}{8R}+\int_0^{r-R}F_g\,dx=\dfrac{1}{2}mv_r{}^2+\dfrac{3GmM}{8R}-\dfrac{GmM}{r}+\dfrac{GmM}{R}$

$\dfrac{1}{2}mv_r{}^2=\dfrac{1}{2}mv_B{}'^2-\dfrac{11GmM}{8R}+\dfrac{GmM}{r}$

質点Bが地表に達するためには，$r=R$で，$v_r\geqq 0$であること，すなわち

$\dfrac{1}{2}mv_r{}^2=\dfrac{1}{2}mv_B{}'^2-\dfrac{11GmM}{8R}+\dfrac{GmM}{r}=\dfrac{1}{2}mv_B{}'^2-\dfrac{3GmM}{8R}\geqq 0$

$\dfrac{1}{2}mv_B{}'^2=\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mu}{\mu+m}\right)^2\dfrac{3GM}{R}\geqq\dfrac{3GmM}{8R}$，したがって$\mu\geqq m$

これは当然の結果で，地表でもつ単振動のエネルギーは質量に比例するから，Aの質量が少なくもBの質量より大きくなければ，Bが地表に到達することはできない。

コ

$r\to\infty$において，$v_r<0$になれば，質点は重力によって再び地表に戻ってくる。すなわち，

$\dfrac{1}{2}mv_r{}^2=\dfrac{1}{2}mv_B{}'^2-\dfrac{11GmM}{8R}+\dfrac{GmM}{r}<0$

したがって，$\dfrac{1}{2}mv_B{}'^2=\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mu}{\mu+m}\right)^2\dfrac{3GM}{R}<\dfrac{11GmM}{8R}$，したがって$\mu<(2\sqrt{33}+11)m$

問２

質点が地球から最も離れたとき，地球中心方向（実際は中心とは逆方向）の速さが0になることに着目しなければならない。なぜなら，質点Bが地球からこれ以上離れることはないのだから，離れる方向（すなわち，地球中心方向）の速さが0でなければならない。

物理問題　Ⅱ

<解答>

（1）

イ $\dfrac{dq^2}{2\varepsilon_0 S}$　ロ $\dfrac{(d+\Delta d)q^2}{2\varepsilon_0 S}$　ハ $\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$

（2）

ニ $\dfrac{\varepsilon_0 S_1}{2d^2}\left(\dfrac{S_2}{S_1+S_2}\right)^2 V^2$　ホ $\sqrt{2}-1$　ヘ $2(\sqrt{2}+1)d\sqrt{\dfrac{gp}{\varepsilon_0}}$

（3）

ト $\dfrac{1}{k}\left(pSg+\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}\right)$　チ $\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 kS}$　リ $\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 kS}$　ヌ $2\pi\sqrt{\dfrac{pS}{k}}$

問１

極板⑧に働く力は，上方へ$\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$，下方へ（$kx+pSg$），ただし$x$はバネの変位

極板⑧を静止させておくためには，xが変化しても，$\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}=kx+pSg$となるように$Q$を制御する。

しかるにバネの変位xはつりあいの変位x_1を中心として，単振動するから，

$$x=\frac{1}{k}\left\{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}-pSg\right\}=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 kS}\cos\frac{2\pi t}{T}+x_1=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 kS}\cos\frac{2\pi t}{T}+\frac{pSg}{k}$$

$\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}=\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}\cos\dfrac{2\pi t}{T}+2pSg$，時間変化$t$によらずこの式が成立するためには，$Q^2\geqq 0$だから，

$\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}\cos\dfrac{2\pi t}{T}+2pSg\geqq 0$が常に成立する。したがって，$-\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}+2pSg\geqq 0$，$q^2\leqq 4\varepsilon_0 pS^2 g$

したがって，$0<q\leqq 2S\sqrt{\varepsilon_0 pg}$

問２

問１で記載したことから，$Q^2=q^2\cos\dfrac{2\pi t}{T}+4\varepsilon_0 pS^2 g$，ヌから$T=2\pi\sqrt{\dfrac{pS}{k}}$，

$Q^2=q^2\cos\sqrt{\dfrac{k}{pS}}\,t+4\varepsilon_0 pS^2 g$，したがって，$Q(t)=\sqrt{q^2\cos\sqrt{\dfrac{k}{pS}}\,t+4\varepsilon_0 pS^2 g}$

<解説>

（1）

イ

$W=\dfrac{1}{2}qV=\dfrac{q^2}{2C}=\dfrac{dq^2}{2\varepsilon_0 S}$，ただし$C$は極板①，②間の電気容量で，$C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

ロ

イにおいて，極板間距離をdから$d+\Delta d$に伸ばしたのだから，$W'=\dfrac{(d+\Delta d)q^2}{2\varepsilon_0 S}$

ハ

$\Delta W = W' - W = \dfrac{\Delta d q^2}{2\varepsilon_0 S}$だから，$F = \dfrac{\Delta W}{\Delta d} = \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$

（2）

ニ

極板③，⑤の電荷をq，④，⑥の電荷を$-q$とおく。すると，極板③と④が引き合う力はハによって，

$$\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S_1} = \frac{1}{2\varepsilon_0 S_1}\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 V^2 = \frac{\varepsilon_0 S_1}{2d^2}\left(\frac{S_2}{S_1 + S_2}\right)^2 V^2$$

ただし，$C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S_1}{d}$は極板③④間の電気容量，$C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S_2}{d}$は極板⑤⑥間の電気容量である。

極板③④間について$q = C_1 V_1$，極板⑤⑥間について$q = C_2 V_2$，$V_1 + V_2 = V$だから，$q = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V$

ホ

極板③と④が引き合う力と極板④，⑤，⑥の重力とがつりあう。したがって，

$\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S_1} = p(S_1 + S_2)g + pS_2 g$，したがって$\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0} = pS_1(S_1 + S_2)g + pS_1 S_2 g$　①

極板⑤と⑥が引き合う力と極板⑥の重力とがつりあう。したがって，

$\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S_2} = pS_2 g$，したがって$\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0} = pS_2{}^2 g$　②

①，②式から，$pS_2{}^2 g = pS_1(S_1 + S_2)g + pS_1 S_2 g$，したがって$S_1{}^2 + 2S_1 S_2 - S_2{}^2 = 0$

$r = \dfrac{S_1}{S_2}$とおくと，$r^2 + 2r - 1 = 0$，$r = -1 \pm \sqrt{2}$，$r > 0$だから，$r = \dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{2} - 1$

ここでのポイントは，極板③と④が引き合う力と極板④，⑤，⑥の重力とがつりあうということである。

ヘ

極板③，④間の電圧は，$V_1 = \dfrac{q}{C_1} = \dfrac{dq}{\varepsilon_0 S_1}$

極板⑤，⑥間の電圧は，$V_2 = \dfrac{q}{C_2} = \dfrac{dq}{\varepsilon_0 S_2}$

$V = V_1 + V_2 = \dfrac{dq}{\varepsilon_0 S_1}\left(1 + \dfrac{S_1}{S_2}\right)$　③

②式から，$q = \sqrt{2\varepsilon_0 g p}\, S_2$だから，これを③に代入して，

$$V = \frac{d\sqrt{2\varepsilon_0 g p}\, S_2}{\varepsilon_0 S_1}\left(1 + \frac{S_1}{S_2}\right) = 2(\sqrt{2} + 1)d\sqrt{\frac{gp}{\varepsilon_0}}$$

（3）

ト

極板⑨における力のつりあいとして，

（バネの引っ張る力）＝（極板⑧の重力）＋（極板⑨，⑩間の引き合う力）

$kx_0 = pSg + \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$，したがって$x_0 = \dfrac{1}{k}\left(pSg + \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S}\right)$

チ

単振動の中心は，極板⑨に働くバネ力と重力のつりあう位置である。コンデンサーの電荷の放電により，極板間に働くクーロン力がなくなり，極板⑨はバネによる単振動をする。

単振動の中心でのバネの伸びをx_1とすれば，バネ力と重力のつりあいにより，$kx_1=\rho Sg$,

$x_1=\dfrac{\rho Sg}{k}$，したがって極板⑨の最初の位置からは，$x_0-x_1=\dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 kS}$

リ

極板⑨の最初の位置はクーロン力によって引っ張られた位置だから，単振動の振幅は最大である。したがって，単振動の振幅はチに同じである。

ヌ

スイッチを閉じると，放電して電荷がなくなり極板間の引き合う力がなくなる。ちょうど，手でバネを引っ張っていたときに，手を放したことと同じである。すると，極板⑨はバネによる単振動を始める。バネ定数はk，極板の質量はρSだから，単振動の周期Tは，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{\rho S}{k}}$

問１

バネが単振動しても極板⑧が静止するためには，電荷Qをバネの弾性力に応じて制御しなければならない。極板⑨の単振動の振幅は電荷qに比例するから，qが大きすぎると，バネの弾性力が大きくなりすぎて，極板⑧を押し上げてしまう。$Q>0$だから，極板⑧を静止させておくことができない。

問２

問１において，Qとバネの単振動の関係が求まっている。

物理問題　Ⅲ

＜解答＞

あ $\dfrac{2P_0V_0}{RT_0}$　い $\dfrac{P_0V_0}{RT_0}$

（１）

う $\dfrac{5}{4}P_0V_0$　え $\dfrac{1}{2}P_0V_0$　お $\dfrac{7}{4}P_0V_0$　か R　き $\dfrac{5}{3}$　く $\dfrac{7}{5}$

（２）

け $2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0$

問１

外力のなした仕事W，大気のなした仕事W_a，気体Aの内部エネルギーの増加をΔU_Aとすれば，熱力学の第一法則により，$W+W_a=\Delta U_A+Q$，ただし気体Bは温度変化しないので内部エネルギーの変化はない。

（２）の操作前，気体Aは，体積$2V_0$，圧力P_0，気体Bは体積$2V_0$，圧力P_0

操作後，気体Aは，体積$V_A=2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0$，圧力$2P_0$，気体Bは体積$V_0$，圧力$2P_0$

したがって大気圧P_0の大気がする仕事は，$W_a=P_0(2V_0-2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0+2V_0-V_0)=P_0V_0(3-2^{1-\frac{1}{\alpha}})$

（2）の操作後の気体Aの状態方程式は，$2P_0V_A=n_ART_2=\dfrac{2P_0V_0}{RT_0}RT_2$，$T_2=\dfrac{V_A}{V_0}T_0=2^{1-\frac{1}{\alpha}}T_0$

したがって，気体Aの内部エネルギーの増加は，

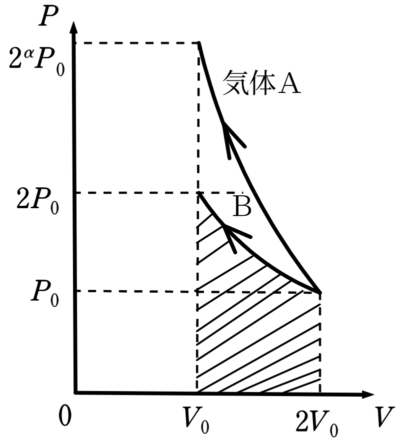
$\Delta U_A=\dfrac{3}{2}n_AR(T_2-T_0)=\dfrac{3}{2}\dfrac{2P_0V_0}{RT_0}RT_0\left(2^{1-\frac{1}{\alpha}}-1\right)=3P_0V_0\left(2^{1-\frac{1}{\alpha}}-1\right)$

したがって，$W=\Delta U_A+Q-W_a=3P_0V_0\left(2^{1-\frac{1}{\alpha}}-1\right)-P_0V_0(3-2^{1-\frac{1}{\alpha}})+Q=P_0V_0(2^{3-\frac{1}{\alpha}}-6)+Q$（答）

（3）

こ $2^{\alpha}P_0$

問2



さ $2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0$　し ①　す ②

＜解説＞

以下では，領域Aの気体を気体A，領域Bの気体を気体Bと呼ぶ。

あ　い

初期状態の気体Aの状態方程式はモル数をn_Aとすれば，$2P_0V_0=n_ART_0$，$n_A=\dfrac{2P_0V_0}{RT_0}$

同様に気体Bの状態方程式は，$\dfrac{3}{2}P_0V_0=\dfrac{3}{2}n_BRT_0$，$n_B=\dfrac{P_0V_0}{RT_0}$

（1）

う

気体Bは定圧変化したので，内部エネルギーの変化ΔUは，吸収した熱量をQ，温度上昇をΔT，定圧モル比熱をC_P，体積増加をΔVとして，

$\Delta U=Q-P_0\Delta V=n_BC_P\Delta T-P_0\Delta V=n_B(R+C_V)\Delta T-P_0\Delta V$

気体Bの温度上昇は$\Delta T=2T_0-\dfrac{3}{2}T_0=\dfrac{T_0}{2}$，また$R+C_V=\dfrac{7}{2}R$

気体Bの体積がVになったとする。温度上昇後の状態方程式は，$P_0V=n_BR\times 2T_0$

$V=\dfrac{2n_BRT_0}{P_0}=\dfrac{P_0V_0}{RT_0}\times\dfrac{2RT_0}{P_0}=2V_0$，したがって，体積増加は$2V_0-\dfrac{3}{2}V_0=\dfrac{1}{2}V_0$

したがって，$\Delta U=n_B\times\dfrac{7}{2}R\times\dfrac{T_0}{2}-P_0\Delta V=\dfrac{7}{4}\times\dfrac{P_0V_0}{RT_0}\times RT_0-\dfrac{1}{2}P_0V_0=\dfrac{7}{4}P_0V_0-\dfrac{1}{2}P_0V_0=\dfrac{5}{4}P_0V_0$

え

上記の $\boxed{う}$ で書いたように，気体Ｂがした仕事は$P_0\times\frac{1}{2}V_0=\frac{1}{2}P_0V_0$

お

これは，本解説では上記の $\boxed{う}$ で書いたように，$Q=n_B\times\frac{7}{2}R\times\frac{T_0}{2}=\frac{7}{4}P_0V_0$

また，温度調整器から吸収した熱量＝気体の内部エネルギーの増加＋気体がした仕事

$$=\frac{5}{4}P_0V_0+\frac{1}{2}P_0V_0=\frac{7}{4}P_0V_0$$

か

定積変化では外部に仕事をしないから，気体に与えた熱は内部エネルギーの変化になる。すなわち，$Q_V=\Delta U$。

nモルの気体に与えた熱 Q_V によって気体が定積変化をし，温度がΔT上昇したとすれば，定積モル比熱は，$C_V=\frac{Q_V}{n\Delta T}=\frac{\Delta U}{n\Delta T}$。

与えた熱 Q_P によって気体が定圧変化し体積がΔV 変化したとすれば，外部に$p\Delta V$ の仕事をしたので，$C_p=\frac{Q_P}{n\Delta T}=\frac{\Delta U+p\Delta V}{n\Delta T}$。したがって，$C_P-C_V=\frac{p\Delta V}{n\Delta T}=R$

ただし，ここで気体の状態方程式$pV=nRT$により，定圧変化では$p\Delta V=nR\Delta T$であることを用いた。

以上は教科書に記載されている。よく理解し，$C_P-C_V=R$は覚えておかなければならない。

き　く

$C_P-C_V=\gamma C_V-C_V=(\gamma-1)C_V=R$，したがって，$\frac{C_V}{R}=\frac{1}{\gamma-1}$

気体Ａについて，$\frac{C_V}{R}=\frac{3}{2}$だから，$\frac{1}{\gamma-1}=\frac{3}{2}$，$\gamma=\frac{5}{3}$

気体Ｂについて，$\frac{C_V}{R}=\frac{5}{2}$だから，$\frac{1}{\gamma-1}=\frac{5}{2}$，$\gamma=\frac{7}{5}$

（２）

け

（２）の操作では，気体ＡとＢの圧力は同じである。なぜなら，仕切板Dがちょうどストッパー Sに接触したときピストンWを押し込む操作を停止し，そのままの状態で保持したからである。

気体Ｂの状態方程式は，圧力をPとして，$PV_0=2n_BRT_0$，$P=\frac{P_0V_0}{RT_0}\frac{2RT_0}{V_0}=2P_0$

（２）の操作により気体Ａは断熱変化をしたので，その操作前後の(圧力)×(体積)$^\gamma$ は一定である。すなわち，$P_0\times(2V_0)^\alpha=P\times(V_A)^\alpha=2P_0\times(V_A)^\alpha$，したがって，$V_A=2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0$

問１

外力がなした仕事とは？という疑問が生じる。気体は圧縮されたのだから，状態変化の曲線から気体になされた仕事を求めようとすると，難しくなる。ここでは，気体の圧縮は外力と大気圧によるもので，両者を分離して扱うことが必要である。すると，ピストンを押す大気圧は一定で既知だから，大気圧がなした仕事は容易に求まる。

（3）
こ
（3）の操作により気体Aは断熱変化をしたので，その操作前後の (圧力)× (体積)$^{\gamma}$ は一定である。すなわち，$P\times(V_A)^{\alpha}=P_0\times(2V_0)^{\alpha}=P_3\times(V_3)^{\alpha}=P_3\times(V_0)^{\alpha}$，したがって，$P_3=2^{\alpha}P_0$
問2
（2）の操作前，気体Aは，体積$2V_0$，圧力P_0，温度T_0，気体Bは体積$2V_0$，圧力P_0，温度$2T_0$

操作後，気体Aは体積$V_A=2^{1-\frac{1}{\alpha}}V_0$，圧力$2P_0$，温度$2^{1-\frac{1}{\alpha}}T_0$，気体Bは体積$V_0$，圧力$2P_0$，温度$2T_0$

（3）の操作後，気体Aの圧力$2^{\alpha}P_0$，体積V_0，状態方程式は$2^{\alpha}P_0V_0=n_ART_3=\dfrac{2P_0V_0}{RT_0}RT_3$，したがって$T_3=2^{\alpha-1}T_0$，気体Bは変化しない（ストッパーによって仕切板Dが動かないので）。

以上を踏まえ，状態変化をグラフにする。気体Bのなされた仕事は状態変化曲線の下の領域である。
さ　し　す
仕切板Dがストッパーから離れかけた瞬間の気体Bの圧力は気体Aと同じだから，$2^{\alpha}P_0$
ピストンを左方に移動させ，気体Aの圧力がP_0になったとき，気体Bの圧力もP_0
この過程は断熱変化だから，気体Bについて，一定$=PV^{\beta}=2^{\alpha}P_0{V_0}^{\beta}=P_0{V_4}^{\beta}$

したがって，$V_4=2^{\frac{\alpha}{\beta}}V_0$，$\alpha=\dfrac{5}{3}$，$\beta=\dfrac{7}{5}$だから，$V_4=2^{\frac{25}{21}}V_0$，一方気体Aの体積は$2V_0$に戻るから，

$2^{\frac{25}{21}}V_0>2V_0$であるから，気体Bの体積の方が大きい。

気体Bは気体Aと同じ圧力と体積となってから，同じように断熱膨張し，Aより大きな体積まで膨張するので，気体Aのした仕事は気体Bの仕事より小さい。

＜総評＞

例年通り，物理実験系とその事象を既述した長文の問題文を読み下しながら，随所に課せられた問題を解いてゆく。物理に1科目を加えた2 科目で180 分という試験時間だから，概ね90分で解答しなければならない。集中して的確に問題文を読み込み，前提となる事項を把握し，落ち着いて思考を進めたい。

中にはいささか荒唐無稽の実験系を仮想した問題もある。物理の本質を問題とするために枝葉を切り捨てた実験系を仮想するので，そのような系や実験が実現可能かなどは問われない。多くの大学入試の物理の問題は，そのような実験系を想定している。そのことによって，複雑で重層的な物理過程を問題とすることができ，受験生の学力を判定し易くできるというわけである。

教科書に記載されている物理現象，法則，定理等をしっかり理解した上で，基礎的問題から応用的な問題まで取り組んで，教科書の理解を確認するという反復学習によって，学力の向上をめざしたい。

問題Ⅰ

地球にトンネルを掘って物体を落としたときの運動に関する問題は発想されやすいのだろう。重力の問題を典型的に考えると，地球にトンネルという発想が出てしまう。2005年に東大から地球中心を

通るトンネル内での質点の衝突問題が出題されている。教科書にも掲載されている。多くの読者は取り組んだことがあるかも知れない。

本問の特徴は，中心を通らないトンネル内での運動，地球外での運動を扱っていることである。過去問を勉強し，重力による位置エネルギーや単振動のエネルギーについて習熟している必要があるが，なかなか骨の折れる問題である。

（１）難易度Ｂ

ア

半径 r の球の内側の質量だけが万有引力として作用するというところが味噌である。すると，質点に働く重力は質点と地球中心との距離に比例し，方向は逆となり，運動方程式は単振動になる。

イ

単振動における周期の公式は応用可能なように覚えていなければならない。

（２）難易度Ａ－

ウ

質点がトンネルの外へ出るとどうなるか。働く重力の式が異なり，単振動の式ではなくなる。ここで，$R \gg h$の条件があれば，重力の加速度$g=\dfrac{GM}{R^2}$を使えるのであるが，そのようなコメントは問題文にはない。したがって，ここは少々難しくなる。エネルギー保存の法則により，質点が重力から得るエネルギーが運動エネルギーに等しいとして解く。

エ

ここでもエネルギー保存の法則を活用する。トンネルに入る直前の運動エネルギーと変位Rでの単振動のエネルギーの和が地球中心での質点の運動エネルギーとなる。

オ、カ

弾性衝突の条件，すなわちはね返り係数が１であること，運動量保存の法則を用いれば良い。

問１

エネルギー保存の法則を用いるのだが，単振動のエネルギー，重力による位置のエネルギーの表式を的確に理解していなければならない。

（３）（４）　難易度Ａ

地球の中心を通らないトンネル内での質点の運動を取り扱う。一瞬どうなるのか，とドキッとするかも知れない。しかし，トンネルと質点との摩擦を無視するので，質点は同じように単振動する。

問２

難問である。面積速度一定で質点が運動するということから，地表を飛びだす瞬間の面積速度を求める。質点が地球から最も離れたとき，の意味を的確に把握することが必要である。

問題Ⅱ

コンデンサーの極板に働くクーロン力に重力やバネの弾性力を組み合わせた問題である。いろいろな力が組み合わされた運動になるので，やや煩瑣である。問題は誘導的に構成されているから，前問，後問の解答を利用して，効率よく答えること。

（１）難易度Ｃ

コンデンサーの極板間に働く力を，蓄積された静電エネルギーを利用して求める。コンデンサーに

蓄積される静電エネルギーの公式は覚えておかなければならない。
（2）難易度Ｂ
　クーロン力による極板間の引き合う力と重力のつりあいに関する問題。コンデンサーの直列接続による電荷と電圧の関係は的確に理解していなければならない。
（3）難易度Ｂ＋
　重力に加え，バネによる弾性力も加わり，極板が単振動をする。極板の電荷を放電することにより，バネを引っ張っていた力がなくなり，単振動を開始する。単振動の振幅は電荷qの2乗に比例するから，qが大きすぎると，極板⑧を静止させておくことができなくなる。こうした物理過程を理解しておくことが必要である。

問題III
　理想気体の状態変化に関する問題。簡単な操作と基礎的な事象の問題なのだが，細かい前提をきちんと考慮して，思考を進める必要がある。長文の問題を集中して読み込んで，現象の全貌を頭に入れて，問題に順次答えていく。当然，誘導的に構成されているから，前問の解答などを利用する。読み急いで，前提等を見逃すことのないように。全体として，難問である。
あ い（1）う え お　難易度C
か き く　難易度C
（2）け 問1　難易度A
　外力が気体にした仕事と大気圧がした仕事を区別して考えること。断熱変化の過程をよく理解すること。熱力学の第一法則をよく理解していること。
（3）こ 問2　難易度B
　気体A，気体Bの操作の開始での状態，終了での状態（圧力と体積）を的確に算出すること。気体Aが断熱変化，気体Bが等温変化であることを念頭に図を描くこと。
（4）さ し す　難易度B
　今度は状態変化図を逆にたどる過程となる。

131022