2013（H25)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）　教育学部（教育科学理系）、医学部（人間健康科）
総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（一般）

数学（理系）　150分

$\boxed{1}$　(30点)

平行四辺形ABCDにおいて，辺ABを1：1に内分する点をE，辺BCを2：1に内分する点をF, 辺CDを3：1に内分する点をGとする．線分CEと線分FGの交点をPとし，線分APを延長した直線と辺BCの交点をQとするとき，比AP：PQを求めよ.

＜解答＞

図１を参照する。

$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，AP：PQ$=p:1-p$，EP：PC$=q:1-q$，GP：PF$=r:1-r$ BQ：QC$=t:1-t$とする。

△ABQの辺AQ の内分点P に関して，$\overrightarrow{BP}=p\overrightarrow{BQ}+(1-p)\overrightarrow{BA}=pt\vec{b}+(1-p)\vec{a}$　①

△EBCの辺EC の内分点P に関して，$\overrightarrow{BP}=q\overrightarrow{BC}+(1-q)\overrightarrow{BE}=q\vec{b}+\frac{1}{2}(1-q)\vec{a}$　②

△BGFの辺FG の内分点P に関して，$\overrightarrow{BP}=r\overrightarrow{BF}+(1-r)\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}r\vec{b}+(1-r)(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG})$

$$=\frac{2}{3}r\vec{b}+(1-r)(\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{a})=\left(1-\frac{1}{3}r\right)\vec{b}+\frac{3}{4}(1-r)\vec{a}\quad ③$$

ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$は独立だから，②，③により$q=\left(1-\frac{1}{3}r\right)$，$\frac{1}{2}(1-q)=\frac{3}{4}(1-r)$

したがって，$r=\frac{9}{11}$，$q=\frac{8}{11}$，しかるに①，②により，$1-p=\frac{1}{2}(1-q)$，したがって，$p=\frac{19}{22}$

したがって，AP：PQ$=p:1-p=\frac{19}{22}:\frac{3}{22}=19:3$　（答）

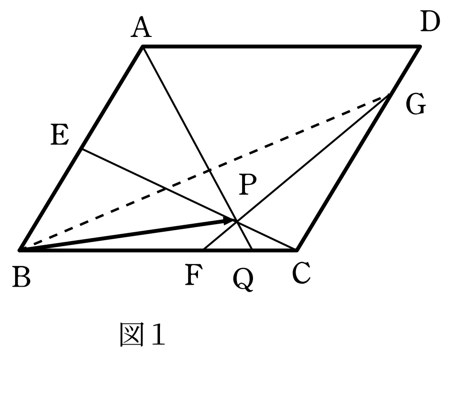

図１

<解説>

解答方針について着想が必要だ。しかし大方の読者は図形のベクトル表示を利用することにピーンとくるだろう。平行四辺形は2つのベクトルによって構成されるからだ。同種の問題を何度か解いたことがあれば，気づくだろう。類似例題が掲載されている教科書もあろう。

図を描いて凝視すれば，ベクトル$\overrightarrow{BP}$が平行四辺形を構成するベクトル$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$の一次結合によって表されることがわかる。しかも，点Pは直線AQ，CE，FGの内分点だから，その表現形式は3通りある。ここでは内分比が未知数だから，ベクトル$\overrightarrow{BP}$を内分比を未知数として3通りの形式で表して，内分比を求めれば良い。

$\boxed{2}$ (35点)

Nを2以上の自然数とし，a_n $(n=1,2,...)$を次の性質(ｉ)，(ii)をみたす数列とする.

(ｉ) $a_1=2^N-3$,

(ii) $n=1,2,...$に対して,

a_nが偶数のとき$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$ ，a_nが奇数のとき$a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$,

このときどのような自然数Mに対しても

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1}-N-5$$

が成り立つことを示せ.

<解答>

$a_2=2^{N-1}-2$ ，$a_3=2^{N-2}-1$，となるから，

$a_n=2^{N-n+1}-1$ $(3\leqq n\leqq N)$

$a_n=0$ $(n\geqq N+1)$

$M=1$のとき，$a_1-(2^{N+1}-N-5)=(2^N-3)-(2^{N+1}-N-5)=N+2-2^N\leqq 0$

なぜなら，$f(x)=x+2-2^x$とおくと，$f'(x)=1-2^{x-1}<0$ $(x\geqq 2)$，したがって，$x\geqq 2$で$f(x)$は単調減少，$f(2)=0$だから$f(x)=x+2-2^x\leqq 0$

$M=2$のとき，$a_1+a_2-(2^{N+1}-N-5)=(2^N-3)+(2^{N-1}-2)-(2^{N+1}-N-5)=N-2^{N-1}\leqq 0$

なぜなら，$f(x)=x-2^{x-1}$とおくと，$f'(x)=1-2^{x-2}=0$ $(x=2)$，$f'(x)=1-2^{x-2}<0$ $(x>2)$，したがって$x\geqq 2$で$f(x)$は単調減少，$f(2)=0$だから$f(x)=x-2^{x-1}\leqq 0$

$3\leqq M\leqq N$のとき

$$\sum_{n=1}^{M} a_n=a_1+a_2+\cdot\cdot+a_M=(2^N-3)+(2^{N-1}-2)+(2^{N-2}-1)+\cdot\cdot+(2^{N-M+1}-1)$$

$$=-5-(M-2)+2^N+2^{N-1}+\cdot\cdot+2^{N-M+1}=-5-(M-2)+2^{N+1}-2^{N-M+1}$$

$$=2^{N+1}-5+2-M-2^{N-M+1}\leqq 2^{N+1}-5-N$$

ここで，$N-M\leqq 2(2^{N-M}-1)=2^{N-M+1}-2$だから，$2-M-2^{N-M+1}\leqq -N$

なぜなら，$f(x)=x-M-2^{x-M+1}+2$とおくと，$f'(x)=1-2^{x-M}=0$ $(x=M)$，$f'(x)=1-2^{x-M}<0$ $(x>M)$，したがって$x\geqq M$で$f(x)$は単調減少，$f(M)=0$だから$f(x)=x-M-2^{x-M+1}+2\leqq 0$

$M \geqq N+1$のとき，$a_n=0\ (n \geqq N+1)$だから

$$\sum_{n=1}^{M} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_M = a_1+a_2+\cdots+a_N = -5-(M-2)+2^{N+1}-2$$

$$= -5-M+2^{N+1} < 2^{N+1}-N-5$$

以上によって，どのような自然数Mに対しても，$\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つことが示された。

<解説>

a_nをみつめ，nを増やしていくと，いずれ$a_n=0$になることが解る。そこで，a_nの表現形式を求める。表現形式によって，M について場合分けをして，証明を試みる。簡単な関数の大小関係に帰着するので，難しくはないだろう。

$\boxed{3}$ (35点)

n を自然数とし，整式 x^nを整式 x^2-2x-1で割った余りを$ax+b$とする．このときaとb は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

<解答>

$x^k=(x^2-2x-1)f_k(x)+a_kx+b_k$　①とおく。

ただし$f_k(x)$，a_k，b_k は $n=k$ のときの$f(x)$，a，bである。

$x^2-2x-1=0$を解くと，$x=1\pm\sqrt{2}$。①に$x=1+\sqrt{2}$ を代入すると，

$(1+\sqrt{2})^k=a_k+b_k+\sqrt{2}\,a_k$　②

②で$k=1$とすると，$1+\sqrt{2}=a_1+b_1+a_1\sqrt{2}$，したがって，$a_1=1$，$b_1=0$

$k=2$とすると，$3+2\sqrt{2}=a_2+b_2+a_2\sqrt{2}$，したがって，$a_2=2$，$b_2=1$

$k=3$とすると，$7+5\sqrt{2}=a_3+b_3+a_3\sqrt{2}$，したがって，$a_3=5$，$b_3=2$

以上において，a_k，b_k は0以上の整数であり，互いに素である。

$k=n\ (>1)$ において，a_n，b_nは正の整数であり，互いに素であるとする。

$$(1+\sqrt{2})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}+a_{n+1}\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n$$

$$=(1+\sqrt{2})(a_n+b_n+a_n\sqrt{2})=3a_n+b_n+(2a_n+b_n)\sqrt{2}$$

したがって，$a_{n+1}+b_{n+1}=3a_n+b_n$　③

$a_{n+1}=2a_n+b_n$　④

③，④から，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$，したがって，a_{n+1}，b_{n+1} は正の整数である。

$a_{n+1}=2a_n+b_n$ と$b_{n+1}=a_n$ が互いに素でないとすれば，$\dfrac{2a_n+b_n}{a_n}=\dfrac{q}{p}$と表される。ただし，$p$，$q$ は$p<a_n$，$q<2a_n+b_n$ なる整数である。これを変形すると，$\dfrac{q-2p}{p}=\dfrac{b_n}{a_n}$。しかるに$a_n$，$b_n$ は互いに素だから，$p \geqq a_n$，$q-2p \geqq b_n$であるが，これは，$p<a_n$，$q<2a_n+b_n$に矛盾する。

したがって，a_{n+1}，b_{n+1} は互いに素な整数である。すなわち，それらをともに割り切る素数は存

在しない。以上のように，$n=1$，2，3 においてa，bは整数であり，ともに割り切る素数は存在しない。n においてa，bは整数であり，ともに割り切る素数は存在しないとすれば，$n+1$においても同様である。

したがって数学的帰納法によりa，b は整数であり，それらをともに割り切る素数は存在しない。

＜解説＞

解答方針の構想と着想，いくつかの証明の方法が必要な問題であり，受験者の数学力を計る良問である。いくつかの証明方法があると思うが，上記はシンプルな方法であろう。まず，証明すべき事項を的確に確認しておこう。「それらをともに割り切る素数は存在しない」ということは，「aとbは互いに素」ということである。

次に，xという変数の代わりに，具体的な数で考えることにしよう。$x^2-2x-1=0$の解をxに代入すれば，整式 x^nを整式 x^2-2x-1で割った商の整式について一切考慮しなくて良いから，扱いがシンプルになるであろう。次に証明方法として数学的帰納法の採用を着想する必要がある。自然数 n に関して一般的に成立する関係式を証明するとき，数学的帰納法が便利な場合が多い。

a_nとb_n が互いに素であるとき，$2a_n+b_n$ とa_n が互いに素であるといえるかどうか，の証明が必要となる。ここでは背理法を用いて証明する。命題を否定したとき矛盾が発生すれば，命題の否定が誤っている，すなわち命題は成立するというものである。

上記の解答では，$x^2-2x-1=0$の解，$x=1+\sqrt{2}$を整式に代入して，シンプルな式にして扱い易くしたが，変数xのまま扱っても，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$の関係を導くことができる。

$\boxed{4}$ (35点)

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$における$\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$の最大値を求めよ．ただし$\pi>3.1$および$\sqrt{3}>1.7$が成り立つことは証明なしに用いてよい．

＜解答＞

$f(x)=\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$とおく。$f(-x)=f(x)$だから，$x \geqq 0$でのみ考えればよい。

$f'(x)=-\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$f''(x)=-\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$f''(x)=0$とすれば，$x=\dfrac{\pi}{6}$

図２，図３のように$f'(x)$は変化するから，$\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$なる α において，$f'(\alpha)=0$となる。

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}\pi-6}{12}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}\pi}{4}-1$

図２

すると$f(x)$は図４のように変化する。したがって最大値は$\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$か1のいずれか大きい方である。

$\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16} > \dfrac{1.7}{16} \times (3.1)^2 = \dfrac{16.3}{16} > 1$となるから，最大値は$\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$　（答）

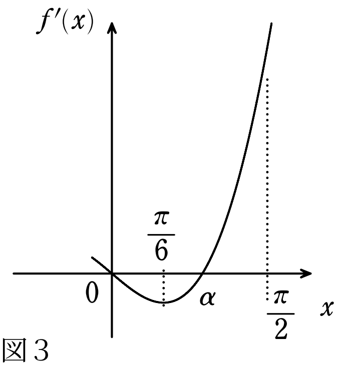

図３

x	0		α		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$

図４

＜解説＞

題意は簡明であり，解答方針も直ぐに立つだろう。xの正負の範囲が同じ偶関数の最大値を求めるのだから，$x \geqq 0$のみで考えることが簡潔である。

$\boxed{5}$　（30点）

xy平面内で，y軸上の点Pを中心とする円Cが2つの曲線

$$C_1：y = \sqrt{3}\log(1+x),\quad C_2：y = \sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点A，点Bで接しているとする．さらに△PABはAとBがy軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする．このとき3つの曲線C，C_1，C_2で囲まれた部分の面積を求めよ．

＜解答＞

点Aを$(x_A,\ y_A)$，点Bを$(x_B,\ y_B)$とする。

曲線C_1の接線の傾きは，$y' = \dfrac{\sqrt{3}}{1+x}$だから，点Aを通り接線に垂直な直線は

$$y - y_A = \frac{-(1+x_A)}{\sqrt{3}}(x - x_A)\quad ①$$

PAとy軸の交角は30°だから，$\dfrac{-(1+x_A)}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$，したがって$x_A = 2$，$y_A = \sqrt{3}\log 3$

曲線C_2の接線の傾きは，$y' = \dfrac{\sqrt{3}}{1-x}$だから，点Bを通り接線に垂直な直線は

$$y - y_B = \frac{-(1-x_B)}{\sqrt{3}}(x - x_B)$$

PBとy軸の交角は30°だから，$\dfrac{-(1-x_B)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$，したがって$x_B = -2$，$y_B = \sqrt{3}\log 3$

①で$x = 0$とおけば，点Pのy座標は，$y = (2 + \log 3)\sqrt{3}$

また△PABは正三角形だから，円Cの半径はAB＝4

したがって，円Cの方程式は$x^2 + \{y - (2+\log 3)\sqrt{3}\}^2 = 4^2$，$y = (2+\log 3)\sqrt{3} \pm \sqrt{16 - x^2}$

図５のように，曲線 C_1 とC_2はy 軸に関して対称であり，また円C もy 軸に関して対称だから，求める面積S は，$x \geqq 0$の部分を2 倍すれば良い。

$$S=2\int_0^2 \left\{(2+\log 3)\sqrt{3}-\sqrt{16-x^2}-\sqrt{3}\log(1+x)\right\}dx$$

$$\sqrt{3}\int_0^2 (2+\log 3)dx=\sqrt{3}\Big[(2+\log 3)x\Big]_0^2=2\sqrt{3}(2+\log 3)$$

$$\int_0^2 \sqrt{16-x^2}\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\theta\sqrt{16-(4\sin\theta)^2}\,d\theta=16\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2\theta+1)d\theta=4\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=4\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sqrt{3}\int_0^2 \log(1+x)dx=\sqrt{3}\Big[(1+x)\log(1+x)-(1+x)\Big]_0^2=\sqrt{3}(3\log 3-3+1)=\sqrt{3}(3\log 3-2)$$

したがって，$\dfrac{S}{2}=2\sqrt{3}(2+\log 3)-4\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}(3\log 3-2)=4\sqrt{3}-\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\log 3$

$S=8\sqrt{3}-\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}\log 3$　（答）

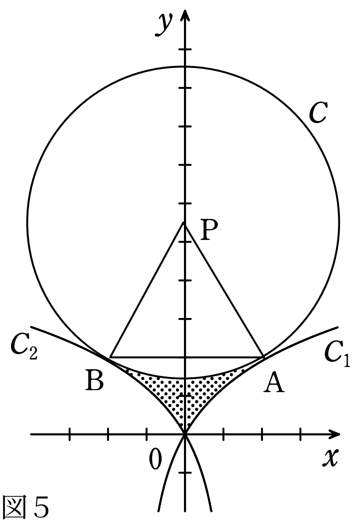

図５

＜解説＞

まずは図をていねいに描いて，問題を具体的に理解する。直線PAは円Cの半径であるとともに，曲線C_1の接線に垂直だから，円Cと曲線C_1とは点Aで接する。円Cと曲線 C_2とは点Bで接することも同様である。直交する2 つの直線の傾きの積は－1である（ここでは接線とそれに垂直な線の傾きの積）。直線PA，PB はy 軸と30°の角をなすから，その直線の式，点A，Bの座標，円Cの半径と中心の座標などは容易に求まる。

図５のように，面積を求める図形が具体化されるから，積分の式を書き下す。

$\int\sqrt{16-x^2}\,dx$では，$x=4\sin\theta$ と変数変換をすることが常套的方法である。教科書に掲載されている。

$\int\log x dx=x\log x-x+Const.$も部分積分法によって求まることを理解しておこう。教科書に掲載されている。

$\boxed{6}$ (35点)

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標１の点に関して対称な点に石を移動する．

(1) 石が座標 x の点にあるとする．2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2) 石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．

<解答>

(1)

硬貨投げの表裏に応じて，原点もしくは１の点に関して対称な位置へ石が移動するので，同じ対称移動を2度続ければ，元の点に戻る。すなわち，2回硬貨を投げたとき表表あるいは裏裏となれば，座標x にある石は座標x にある。表表あるいは裏裏となる確率は，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ （答）

(2)

硬貨投げで表が出る試行をA，裏が出る試行をB とする。2 回の硬貨投げを1セットとし，AAなどのように書くことにする。AAおよびBB は(1)で考察したように，石の位置を変えない。

x_0 にある石の位置がAB によって，x_1，x_2 と変化したとすれば，

$x_0+x_1=0$，$x_1+x_2=2$だから，$x_2=2-x_1=x_0+2$

x_0 にある石の位置がBAによって，x_1，x_2と変化したとすれば，

$x_0+x_1=2$，$x_1+x_2=0$だから，$x_2=-x_1=x_0-2$

n セットAB が続くと石の位置はx_0+2n，$(n-1)$セットAB が続くと石の位置は$x_0+2(n-1)$

ここでは$x_0=0$だから，$(n-1)$セットAB が続くと石の位置は$2(n-1)$になるので，他の1セットは石の位置を変えないAAあるいはBBである。

$2n$回の硬貨投げはn セットの試行となる。1セットの試行では，AA，AB，BA，BB という4つの試行が 同じ確率で発生する。

したがって，n セットの試行の場合の数は4^n

$(n-1)$セットがABで1セットがAAとなる場合の数はn

同様に$(n-1)$セットがABで1セットがBBとなる場合の数はn

したがって，石が座標$2n-2$の点にある確率は，$\dfrac{n+n}{4^n}=\dfrac{2n}{4^n}=n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}$ （答）

<解説>

(1)は容易だろう。対称な移動を行うのであるから，表表あるいは裏裏のように同じ試行が連続すれば，元に戻ることは容易に分かる。二つの試行の組合せは4通りで，同じ試行が連続する場合は2通りである。ここでは(2)への誘導として，2回の硬貨投げの試行を1セットと扱うと良いことに気づく。

(2)は難しそうだが，意外に容易な問題となっている。1セットの硬貨投げには，AA，AB，BA，BBの4つの試行がある。それぞれの試行によって，石の位置がどのように変化するかを把握する。するとAB によって，石の位置は2ずつ正方向に移動することがわかる。

ちなみに，BAは2ずつ負方向へ移動，AAとBBは移動なしである。

またABBAと続くと，$x_0 \to x_0+2 \to x_0$と元へ戻る。同じく，BAABと続くと，$x_0 \to x_0-2 \to x_0$と元へ戻る。

したがって，nセットの試行で石の位置が$2n-2$になるには，$(n-1)$セットの試行ABが必要である。他の1セットは，BAでは-2移動するので，移動のないAAあるいはBBである。nセットの試行において，$(n-1)$セットの試行ABと1セットの試行AAの場合の数はn通りであることは自明であろう。

<理系総評>

昨年に比べるとさらに易化したようだ。例年のように，解答方針の着眼や着想に苦しんだり，複雑な計算を必要とするなどの問題がない。$\boxed{4}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$は完答したい。$\boxed{3}$，$\boxed{6}$も例年に比べ難しくはないので，高い部分点を得たい。

$\boxed{1}$ ベクトル表示によって解く平面図形に関する問題。教科書にも類似の応用問題が掲載されているので，解答は容易だろう。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$ 数列と不等式の問題。一見，難しそうだが，式の表現形式を見通せば，容易になる。ていねいに場合分けして考察する。難易度Ｂ。

$\boxed{3}$ 整式と整数の証明問題。解法の着想，証明の論理など，数学的思考力を必要とする良問である。難易度Ａ－。

$\boxed{4}$ 簡単な関数の最大値問題。難易度Ｃ

$\boxed{5}$ 微分，積分の問題で題意は簡明である。積分がやや複雑なので，ていねいに計算を進める。不定積分の公式等は覚えていなければならない。難易度Ｂ。

$\boxed{6}$ 去年同様，6番目は確率の問題である。一見難しそうだが，例年に比べるとかなり易化している。(1)は容易だろう。そして，(1)が(2)のヒントになる。硬貨投げを2回続けた試行を1セットの試行と考えることが有効ということである。もう少し難しい問題にすることができそうだが，そうはしなかったのはなぜだろう。例年，確率の問題は難しすぎて正答率が低いのかも知れない。難易度Ｂ。

131031

数学（文系） 120分

$\boxed{1}$ (30点)

aを2以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$とする．このとき$f(f(x))>0$がすべての実数xに対してなり立つようなaの範囲を求めよ．

<解答>

$f(f(x))=(f(x)+a)(f(x)+2)$だから，$a=2$なら，$f(f(x))=(f(x)+2)^2=((x+2)^2+2)^2>0$

$a>2$のとき，$f(f(x))=(f(x)+a)(f(x)+2)>0$であるためには，$f(x)<-a$または$f(x)>-2$

$f(x)=(x+a)(x+2)<-a$がすべての実数xに対して成立するとすれば，

$x^2+(a+2)x+3a<0$がすべての実数xに対して成立しなければならない。

しかし，aがいかなる値でも，x が大きくなると，$x^2+(a+2)x+3a>0$となる。したがって，aがいかなる値でも，$f(x)=(x+a)(x+2)<-a$ がすべての実数x に対して成立することはない。

一方，$f(x)=(x+a)(x+2)>-2$がすべての実数xに対して成立するとすれば，

$x^2+(a+2)x+2a+2=\left(x+\dfrac{a+2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a+2}{2}\right)^2+2a+2>0$がすべての実数$x$ に対して成立する。

そのためには，$-\left(\dfrac{a+2}{2}\right)^2+2a+2=-\dfrac{a^2}{4}+a+1>0$，したがって$a^2-4a-4=(a-2)^2-8<0$

したがって，$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$，しかるに$2<a$だから，$2<a<2+2\sqrt{2}$

以上をまとめて，$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$　（答）

＜解説＞

$f(f(x))=(f(x)+a)(f(x)+2)$として，$f(f(x))>0$なる条件を考えるのがポイント。$a\geqq 2$が与えられている。$a=2$であれば，$f(f(x))=(f(x)+2)^2=((x+2)^2+2)^2>0$となり，すべての実数$x$に対して$f(f(x))>0$が成立する。$a>2$であれば，$f(f(x))>0$から，$f(x)<-a$または$f(x)>-2$となる。

$\boxed{2}$ (30点)

理系の $\boxed{1}$ に同じ。

$\boxed{3}$ (30点)

nとkを自然数とし，整式x^nを整式$(x-k)(x-k-1)$で割った余りを$ax+b$とする.

(1)　aとbは整数であることを示せ.

(2)　aとbをともに割り切る素数は存在しないことを示せ.

＜解答＞

(1)

$x^n=(x-k)(x-k-1)f(x)+ax+b$とおく。

$x=k$とすれば，$k^n=ak+b$　①

$x=k+1$とすれば，$(k+1)^n=a(k+1)+b$　②

②−①により，$a=(k+1)^n-k^n$　③，$(k+1)^n$とk^nは整数だから，aも整数

①から，$b=k^n-ak$　④，k^nとakは整数だから，bも整数

(2)

aとbをともに割り切る素数p が存在することを仮定する。

①，②からp はk^nと$(k+1)^n$をともに割り切る。

$k=s_1s_2\cdots s_N$のように素数の積で表されるから，$k^n=(s_1s_2\cdots s_N)^n$となるので，

p はいずれかの素数s_i　$(i=1,2,...,N)$である。したがって，k は素数pで割り切れる。

同様に$k+1$も素数pで割り切れる。α，βを整数として

$k=p\alpha$　⑤

$k+1=p\beta$　⑥

⑥−⑤から，$p(\beta-\alpha)=1$，しかるに$p\geqq 2$，$\beta-\alpha\geqq 1$だから，$p(\beta-\alpha)\geqq 2$のはずだから，矛盾

したがって，aとbをともに割り切る素数pが存在するという仮定は否定される。

　すなわち，aとbをともに割り切る素数は存在しない。

＜解説＞

$x^n=(x-k)(x-k-1)f(x)+ax+b$と整式を表現することが出発点だ。すると①，②が容易に導かれるので，aとbは整数であることがわかる。(2)は背理法を用いる。aとbをともに割り切る素数pが存在すると，①，②からpはk^nと$(k+1)^n$をともに割り切ることに気づくことがポイントだ。kと$k+1$は互いに素だから，これは矛盾である。

$\boxed{4}$ (30点)

α，βを実数とする．xy平面内で，点$(0,3)$を中心とする円Cと放物線

$$y=-\frac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$$

が点$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$を共有し，さらにPにおける接線が一致している．このとき以下の問に答よ．

(1)　α，βの値を求めよ．

(2)　円C，放物線$y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$および$y$軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

＜解答＞

(1)

放物線$y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$が点$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$を通ることから，$0=-1+\sqrt{3}\alpha-\beta$

円Cの式は，半径をrとして，$x^2+(y-3)^2=r^2$，点$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$を通るので，$r=2\sqrt{3}$

したがって，$y=3\pm\sqrt{12-x^2}$，点$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$を通るのは$y=3-\sqrt{12-x^2}$

$y'=\dfrac{x}{\sqrt{12-x^2}}$だから，$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$における傾きは$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

放物線の$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$における傾きは，$y'=-\dfrac{2}{3}x+\alpha=-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

したがって$\alpha=\sqrt{3}$，$\beta=2$　（答）

(2)

図１に円Cと放物線を示す。求める面積Sは，

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\left\{\left(3-\sqrt{12-x^2}\right)-\left(-\frac{x^2}{3}+\sqrt{3}x-2\right)\right\}dx$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{3}-\sqrt{3}x+2\right)dx=\left[\frac{x^3}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

図２を参照すると，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\left\{0-\left(3-\sqrt{12-x^2}\right)\right\}dx=-\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-\sqrt{12-x^2}\right)dx$

$=$図形OQP$=$扇形CQP$-\triangle$COP

$$=\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{2\pi}\times\pi(2\sqrt{3}\ )^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

したがって，$S=\frac{5\sqrt{3}}{6}-\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{3}-\pi$　（答）

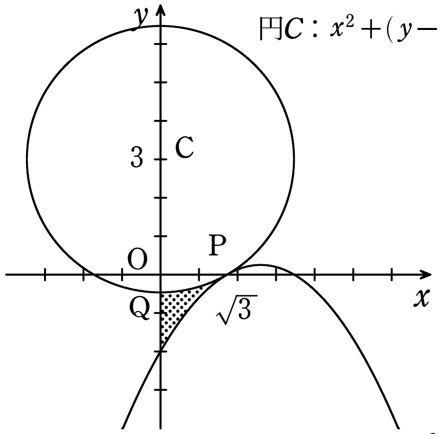

図１

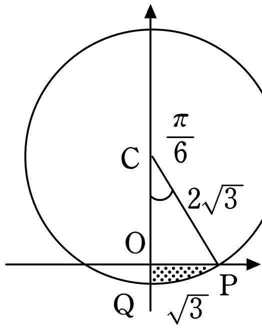

図２

<解説>

2次式の微分，積分の問題。題意は簡明である。図形を描いて，考える。円の式を求めれば良い。(2)では，$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx$が必要である。これを求めるには数IIIで学ぶ変数変換による積分が必要である。しかし，文系の問題であるから，解答では円弧の面積を求めることを示した。

なお，変数変換による積分は下記の通り。$x=\sqrt{12}\sin\theta$として

$$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx=12\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2\theta+1)d\theta$$

$$=6\left[\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\pi$$

$\boxed{5}$　(30点)

理系の $\boxed{6}$ と同じ。

<文系総評>

文系としては骨のある問題が揃っている。$\boxed{1}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を完答し，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$ に食らいついて75点以上を確保したい。

$\boxed{1}$　2次式の不等式問題。場合分けを間違えなければ，大丈夫だろう。難易度C。

$\boxed{2}$　ベクトル表示による平面図形の問題であるが，こうした問題に習熟してないと文系としてはやや

難しいか。難易度Ｂ。

$\boxed{3}$　理系 $\boxed{3}$ とほぼ同じ問題だ。整式の表現を的確にすること。難易度Ｂ。

$\boxed{4}$　2 次曲線の微分，積分の問題。数学Ⅱの範囲で解くことができる。難易度Ｂ。

$\boxed{5}$　理系と同じ確率の問題。例年より易化しているので，文系には手ごろな問題かも知れない。難易度Ａ－。

131115