2013（H25）年度　新潟大学　前期　入学試験　数学解説

＜理・医・歯・工学部＞

$\boxed{1}$　正の実数 a，bに対して，次の連立不等式の表す領域をDとする。

$$ax+y \leqq 6,\ 0 \leqq x \leqq b,\ 0 \leqq y$$

次の問いに答えよ。

(1)　$a=\dfrac{3}{2}$，$b=3$であるとする。点P$(x,\ y)$が領域 D 内を動くとき，$5x+2y$ の最大値と，そのときの x，yの値を求めよ。

(2)　$a=1$，$b=9$であるとする。点P$(x,\ y)$が領域 D 内を動くとき，$2x+y$ の最大値と，そのときの x，yの値を求めよ。

(3)　$ab=9$であり，点P$(x,\ y)$が領域 D 内を動くときの$2x+y$ の最大値が16であるとする。このとき，a，bの値を求めよ。

＜解答＞

(1)

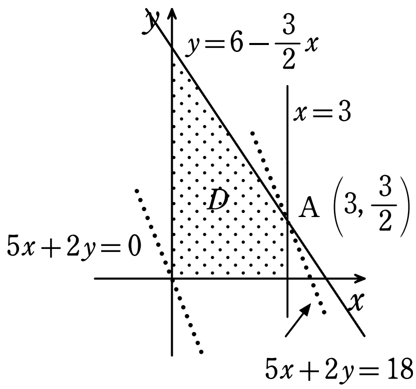

図１－１

$a=\dfrac{3}{2}$，$b=3$のとき，領域 D は

$\dfrac{3}{2}x+y \leqq 6$，$0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y$ だから，

図1－1の打点部である。$5x+2y=p$としたとき，pが最大になるのは，この直線が図1－1で点Aを通るときである。

したがって，最大値は18，そのとき$x=3$，$y=\dfrac{3}{2}$

(2)

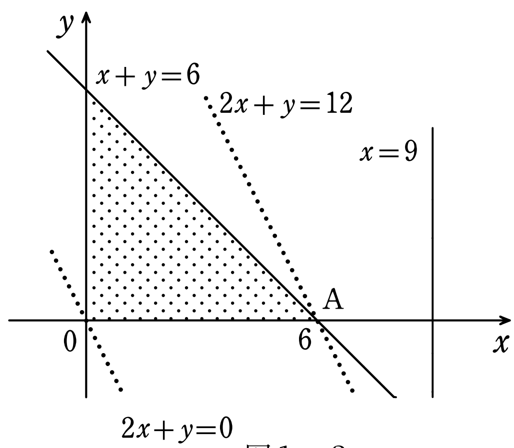

図１－２

$a=1$，$b=9$のとき，領域 D は

$x+y \leqq 6$，$0 \leqq x \leqq 9$，$0 \leqq y$ だから，

図1－2の打点部である。$2x+y=p$としたとき，pが最大になるのは，この直線が図1－2で点Aを通るときである。

したがって，最大値は12，そのとき$x=6$，$y=0$

(3)

$a \leqq 2$のとき，領域Dは図1－3(1)の打点部であり，$2x+y=p$としたとき，pが最大になるのは点Aを通るときである。

すると，$p=\dfrac{12}{a}=16$だから，$a=\dfrac{3}{4}$，$b=12$

一方$a>2$のとき，$2x+y=p$が最大になるのは，図1－3(2)で点Bを通るときで，このとき$p=6$だから，最大値16を満たさない。したがって，$a>2$となることはない。

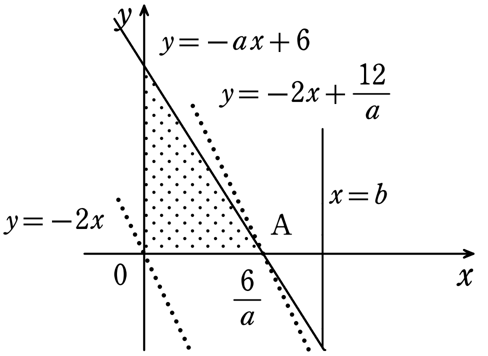

図1－3 (1)

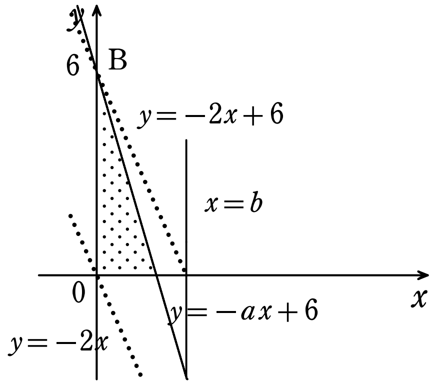

図1－3 (2)

＜解説＞

図を描いて考える。一次式で囲まれる図形だから難しくはない。x，yの一次式の最大値を求めるには，図とともに一次式のグラフを描いて，どのような場合に最大値をとるか，考察する。しかし，この種の問題は読者は習熟していることだろう。

(1)

領域Dを描いて，直線 $5x+2y=p$ がDのどこを通るとき最大になるかを視察する。領域Dの境界の傾きより，１次式の傾きの方が急だから，点Aを通るときが最大となることがわかる。

(2)

(1)と同じ。

(3)

aの値によって，直線$2x+y=p$と領域Dの交わり方が変わるので，注意すること。つまり，境界の傾きと１次式の傾きの関係により，最大値を与えるDの点が変わる。

$\boxed{2}$ 一辺の長さが1の正方形ABCDを考える。点Pは，点B，Cを除いた辺BC上を動くとする。点Pを通り直線APと垂直な直線と辺CDとの交点をQとする。線分BPの長さをxとするとき，次の問いに答えよ。

(1) △CPQの面積Sを，xを用いて表せ。

(2) 面積Sの最大値と，そのときのxの値を求めよ。

(3) 線分AQの長さLの最小値と，そのときのxの値を求めよ。

＜解答＞

(1)

図２を参照する。

△BAP ∽ △CPQだから，AB:BP＝PC:CQ

したがって，$1:x=(1-x):\mathrm{CQ}$，$\mathrm{CQ}=x(1-x)$

したがって，$S=\dfrac{1}{2}x(1-x)^2$　（答）

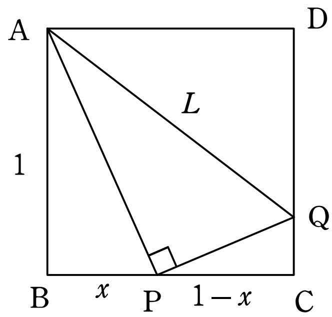

図２

(2)

$f(x)=x(1-x)^2$とおく。

$f'(x)=(x-1)(3x-1)$，したがって$f(x)$は下図のように変化し，$x=\dfrac{1}{3}$で最大値$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$をとる。

したがって，面積Sの最大値は$\dfrac{2}{27}$，そのときのxは$\dfrac{1}{3}$

x		$\frac{1}{3}$		1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

(3)

$\mathrm{DQ}=1-\mathrm{QC}=1-x(1-x)$，したがって$L^2=1^2+(x^2-x+1)^2$

$g(x)=1+(x^2-x+1)^2$とおく。$g'(x)=2(x^2-x+1)(2x-1)$，したがって$g(x)$は下図のように変化し，

$x=\dfrac{1}{2}$で最小値$\dfrac{25}{16}$，したがってLの最小値は$\dfrac{5}{4}$

x		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$	$\frac{25}{16}$	$\nearrow$	

＜解説＞

図をていねいに描き，各線分長をxによって表せば，特別の困難はないであろう。

(1)

$\triangle\mathrm{BAP} \backsim \triangle\mathrm{CPQ}$であることは，$\angle\mathrm{BAP}+\angle\mathrm{BPA}=\angle\mathrm{QPC}+\angle\mathrm{BPA}=\angle\mathrm{R}$により，
$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{QPC}$から明らかである。

(2)

$S(x)$とその導関数を求め，$S(x)$の変化を調べる。

(3)

$L(x)$とその導関数を求め，$L(x)$の変化を調べる。

$\boxed{3}$　aを実数とし，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$とする。行列$A=\begin{pmatrix}a & -4\\ -\dfrac{3a}{4} & 2\end{pmatrix}$は$A^3=-a^2E$を満たすとする。

次の問いに答よ。

(1)　aの値を求めよ。

(2)　$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$を求めよ。

(3)　$A+A^2+A^3+\cdots+A^{2011}+A^{2012}+A^{2013}$を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$A^{-1}A^3=A^2=-a^2A^{-1}E=-a^2A^{-1}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} a^2+3a & -4a-8 \\ -\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{2}a & 3a+4 \end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-2}{a} & \frac{-4}{a} \\ \frac{-3}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

したがって，$\begin{pmatrix} a^2+3a & -4a-8 \\ -\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{2}a & 3a+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 4a \\ \frac{3a^2}{4} & a^2 \end{pmatrix}$

両辺の行列の各要素が等しいとすると，例えば，$-4a-8=4a$から，$a=-1$

$a=-1$ならば，他の各要素どうしも等しい。したがって$a=-1$　（答）

(2)

$A^3=-a^2E=-E$，$A^4=-A$，$A^5=-A^2$，$A^6=(-E)^2=E$だから，

$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=A+A^2-E-A-A^2+E=0$　（答）

(3)

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{2011}+A^{2012}+A^{2013}$$

$$=(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)(1+A^6+A^{12}+\cdots+A^{335})+A^{6\times335}(A+A^2+A^3)$$

$$=0\times(1+A^6+A^{12}+\cdots+A^{335})+(E)^{335}(A+A^2+A^3)$$

$$=A+A^2+A^3=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$　（答）

ただし，$A=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$である。

＜解説＞

行列の問題。計算が煩瑣にならないように，少々の工夫と洞察が必要である。しかし，題意は簡明だから，難しい問題ではない。

(1)

$A^3=-a^2E$をそのまま計算すれば良い。しかし，$A=\begin{pmatrix} a & -4 \\ -\frac{3a}{4} & 2 \end{pmatrix}$だから，$A^3$の計算は煩瑣だと直感する。少々工夫したい。$A^2$の計算は簡単だろう。$A^{-1}$も公式を覚えていれば簡単だろう。もし覚えていなければ，$AA^{-1}=E$から計算すれば良い。A^3を計算するより楽だろう。

(2)

$a^2=1$となり，$A^3=-a^2E=-E$となるので，この問題は容易になる。

(3)

$(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)$を因数として行列の等比数列の和を整理する。$2013=6\times335+3$だから残るのは３項のみとなる。

$A^6=E$だから，$A^n=A^{6i+j}=E^iA^j=A^j$　（ただし，$j=1, 2, 3, 4, 5, 6$）であることを利用すれば，容易に求めることができる。

$\boxed{4}$　平面上の２つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$はそれぞれの大きさが１であり，また平行でないとする。次の問いに答よ。

(1)　$t \geqq 0$であるような実数tに対して，不等式

$$0 < |\vec{a}+t\vec{b}|^2 \leqq (1+t)^2$$

が成立することを示せ。

(2)　$t \geqq 0$であるような実数tに対して$\vec{p}=\dfrac{2t^2\vec{b}}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}$とおき，$f(t)=|\vec{p}|$とする。

このとき，不等式

$$f(t) \geqq \frac{2t^2}{(1+t)^2}$$

が成立することを示せ。

(3)　$f(t)=1$となる正の実数tが存在することを示せ。

＜解答＞

(1)

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=\vec{a}^2+t^2\vec{b}^2+2t\vec{a}\,\vec{b}=1+t^2+2t\cos\theta$$

ただし，ここでθはベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角である。$\vec{a}$，$\vec{b}$は平行でないから，$0 \leqq |\cos\theta| < 1$

したがって，$0 \leqq (1+t\cos\theta)^2=1+t^2\cos^2\theta+2t\cos\theta < 1+t^2+2t\cos\theta$

一方，$1+t^2+2t\cos\theta \leqq 1+t^2+2t=(1+t)^2$，ただし等号は$t=0$のとき

以上によって，$0 < |\vec{a}+t\vec{b}|^2 \leqq (1+t)^2$

(2)

$$|\vec{p}|=\frac{2t^2|\vec{b}|}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}，\text{しかるに}|\vec{b}|=1，\ |\vec{a}+t\vec{b}|^2 \leqq (1+t)^2\text{だから，}f(t)=|\vec{p}| \geqq \frac{2t^2}{(1+t)^2}$$

(3)

$$f(t)=\frac{2t^2|\vec{b}|}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}=\frac{2t^2}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}，\ f(t)=1\text{とすれば，}\ |\vec{a}+t\vec{b}|^2=1+t^2+2t\cos\theta=2t^2$$

したがって，$t^2-2t\cos\theta-1=0$，したがって，$t=\cos\theta \pm \sqrt{1+\cos^2\theta}$

$t=\cos\theta+\sqrt{1+\cos^2\theta}>0$だから，確かに$f(t)=1$となる正の実数$t$が存在する。

＜解説＞

ベクトルの問題で，一見難しそうだが，基礎が理解できていれば，簡明な問題である。

(1)

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$を計算すれば良い。$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$であることを利用する。$\vec{a}\,\vec{b}=\cos\theta$とおくことがポイントである。$0<|\vec{a}+t\vec{b}|^2$の証明も的確に行うこと。

(2)

(1)の結果を利用する。

(3)

$f(t)=1$なる式を満足する正の実数tが存在することを示せばよい。

$\boxed{5}$ 微分可能な関数$f(x)$が，すべての実数x，yに対して

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$$

を満たし，さらに$f'(0)=0$を満たすとする。次の問いに答よ。

(1) $f(0)$を求めよ。

(2) 関数$f(x)$の導関数$f'(x)$を求めよ。

(3) 定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$を求めよ。

＜解答＞

(1)

与式で，$x=0$とおくと，$f(0)f(y)-f(y)=f(y)\{f(0)-1\}=0$

$f(y)$は恒に0というわけではないから，$f(0)=1$ （答）

(2)

与式をxで微分すると，$f'(x)f(y)-f'(x+y)=\cos x\sin y$

$x=0$とすると，$f'(0)=0$だから，$f'(0)f(y)-f'(y)=-f'(y)=\sin y$

したがって，$f'(x)=-\sin x$ （答）

(3)

$f(x)=\cos x+k$とおくことができる。$f(0)=1+k=1$とすれば，$k=0$，すると$f(x)=\cos x$

$\sin x=t$とおく。$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$において，$1-t>0$，$1+t>0$である。

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}\{-\log|1-t|+\log|1+t|\}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

したがって，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{3}/2}{1-\sqrt{3}/2}$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(1+\sqrt{3}/2)^2}{(1-\sqrt{3}/2)(1+\sqrt{3}/2)}=\log(2+\sqrt{3})$$ （答）

＜解説＞

一見，どのように考えれば良いか戸惑うかも知れない。すなおに問題を読み，与えられた式を見つめて，数値を代入したりすれば，解答できることに気がつくだろう。

(1)

与式に$x=0$を代入してみれば，直ぐに求まることがわかる。

(2)

とりあえず，xで与式を微分してみる。そして，$x=0$としてみる。すると結果が見えてくる。

$\dfrac{df(x+y)}{dx}=f'(x+y)$に注意する。$-f'(y)=\sin y$ということは$-f'(x)=\sin x$である。

(3)

不定積分$\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$の算出が必要である。この計算の経験や記憶の有無で，解答の成否が決まりそうだ。教科書の問題として記載されているから，勉強の有無が問われることになる。

＜総評＞

例年，新潟大学の数学の問題では，難問は少なく，題意の簡明な基礎的な力を問う問題が多い。今年も例外ではなく，昨年よりも易化したように思う。

$\boxed{1}$

一次式で囲まれた領域の変数による一次関数の最大値に関する問題。紛れの少ない問題だから，確実に正答したい。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

図形の面積や線長の最大値，最小値を求める問題。紛れの少ない問題だから，確実に正答したい。難易度はＣ。

$\boxed{3}$

行列とその等比数列の和に関する問題。一見，難しそうだが，題意は簡明で，考察の方針は立てやすい。計算が煩瑣にならないように少々の工夫と洞察を必要とする。難易度はＢ。

$\boxed{4}$

ベクトルの問題だが，ベクトルの意味と内積を理解していれば，困難はないだろう。教科書をしっかり理解しておくこと。難易度Ｂ。

$\boxed{5}$

三角関数の微積分の問題。一見扱いにくそうだが，素直に式を扱えば、自然に解が見えてくる。三角関数の不定積分の問題を解いたことがあるかが，解答の成否の分かれ道になりそうだ。
難易度はＢ＋。

＜人文・教育・経済・農学部＞

$\boxed{1}$　正の実数 a，bに対して，次の連立不等式の表す領域をDとする。

$$ax+y\leqq 6,\ 0\leqq x\leqq b,\ 0\leqq y$$

次の問いに答えよ。

(1)　理系の $\boxed{1}$ の (1) に同じ。

(2)　$a=\dfrac{3}{2}$，$b=6$であるとする。点P$(x,\ y)$が領域 D 内を動くとき，$3x+y$ の最大値と，そのときの x，y の値を求めよ。

(3)　$a=5$であるとする。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$4x+y$ の最大値と，そのときの x，y の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

理系の $\boxed{1}$ の (1) の解答を参照。

(2)

$a=\dfrac{3}{2}$，$b=6$のとき，領域 D は

$\dfrac{3}{2}x+y\leqq 6$，$0\leqq x\leqq 6$，$0\leqq y$だから，

図1－1の打点部である。$3x+y=p$としたとき，pが最大になるのは，この直線が図1－2で点 $(4\ ,\ 0)$ を通るときである。

したがって，最大値は12，そのとき$x=4$，$y=0$

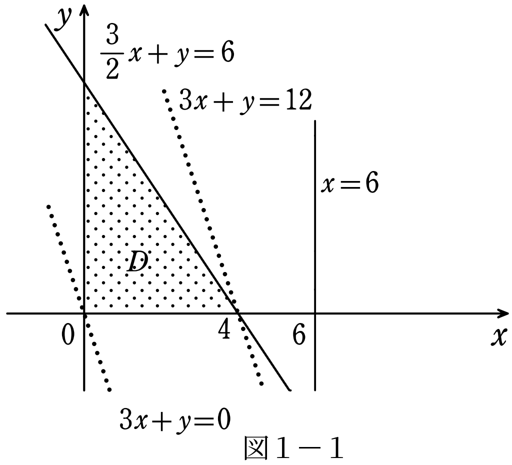

図１－１

(3)

$a=5$のとき，領域Dは

$5x+y\leqq 6$，$0\leqq x\leqq b$，$0\leqq y$だから，

図1－2の打点部である。$4x+y=p$としたとき，pが最大になるのは，この直線が図1－2で点 $(0\ ,\ 6)$ を通るときである。

したがって，最大値は6，そのとき$x=0$，$y=6$

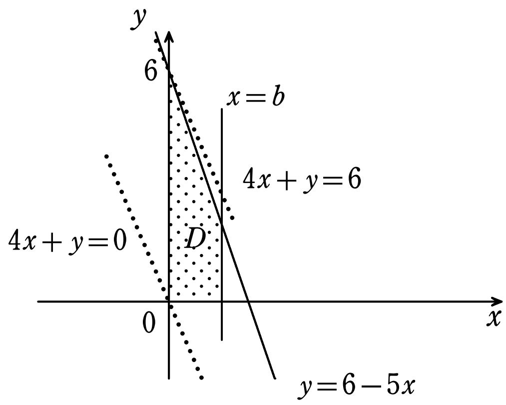

図１－２

＜解説＞

理系の $\boxed{1}$ の問題とは基本的に同じであるが，少々数値を変えている。

(1)

理系の $\boxed{1}$ の (1) の解説を参照。

(2)

領域Dの境界の傾きと$3x+y=p$の傾きの関係で，pが最大となる領域Dの点が決まる。$3x+y=p$の傾きの方が急だから，図1－1のように，pを増やしていくと，点$(4\ ,\ 0)$を通るときにp が最大になることがわかる。

(3)

この場合は，$4x+y=p$の傾きの方が緩やかだから，点 $(0\ ,\ 6)$を通るときにpは最大になる。

$\boxed{2}$　理系の $\boxed{2}$ に同じ。

$\boxed{3}$　正の整数 n に対して$a_n=\sqrt{1+n^2}-n$ とおく。次の問いに答よ。

(1)　不等式 $\dfrac{1}{2n+1}<a_n<\dfrac{1}{2n}$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $a_n > a_{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a_n < 0.03$となる最小の正の整数 n を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$\frac{1}{2n}-a_n=\frac{1}{2n}-(\sqrt{1+n^2}-n)=\left(\frac{1}{2n}+n\right)-\sqrt{1+n^2}$$

$$\left(\frac{1}{2n}+n\right)^2-(\sqrt{1+n^2})^2=\left(\frac{1}{2n}\right)^2+1+n^2-1-n^2=\left(\frac{1}{2n}\right)^2>0$$

したがって，$\left(\frac{1}{2n}+n\right)>\sqrt{1+n^2}$だから，$\frac{1}{2n}-a_n>0$，したがって $a_n<\frac{1}{2n}$

$$a_n-\frac{1}{2n+1}=(\sqrt{1+n^2}-n)-\frac{1}{2n+1}=\sqrt{1+n^2}-\left(n+\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$(\sqrt{1+n^2})^2-\left(n+\frac{1}{2n+1}\right)^2=1-\frac{2n}{2n+1}-\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2=\frac{1}{2n+1}-\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2n+1}\times\frac{2n}{2n+1}=\frac{2n}{(2n+1)^2}>0$$

したがって，$\sqrt{1+n^2}>\left(n+\frac{1}{2n+1}\right)$だから，$(\sqrt{1+n^2}-n)-\frac{1}{2n+1}>0$

したがって，$a_n-\frac{1}{2n+1}>0$，したがって $\frac{1}{2n+1}<a_n$

(2)

$a_n=\sqrt{1+n^2}-n$，$a_{n+1}=\sqrt{1+(n+1)^2}-(n+1)$

したがって，$a_n-a_{n+1}=\sqrt{1+n^2}-\sqrt{1+(n+1)^2}+1=(\sqrt{1+n^2}+1)-\sqrt{1+(n+1)^2}$

$(\sqrt{1+n^2}+1)^2-(\sqrt{1+(n+1)^2})^2=2\sqrt{1+n^2}-2n>2\sqrt{n^2}-2n=0$

したがって，$\sqrt{1+n^2}+1>\sqrt{1+(n+1)^2}$だから，$a_n-a_{n+1}>0$，すなわち$a_n>a_{n+1}$

(3)

$a_n=\sqrt{1+n^2}-n<0.03$とすれば，$1+n^2<(n+0.03)^2=n^2+0.06n+0.0009$

したがって，$0.06n>1-0.0009=0.9991$，$n>\frac{0.9991}{0.06}>16.65$

これを満足する最小の正の整数n は17　（答）

＜解説＞

数列の項間の関係に関する問題。初等的な計算によって，解答可能であり，特段の難しさはない。

(1)

引き算によって，大小関係を確かめれば良い。

(2)

これも同様である。

(3)

nについての不等式を計算すればよい。

$\boxed{4}$　１次関数 $f(x)=px+q$ に対して，x の係数 pと定数項q を成分にもつベクトル$(p,\ q)$ を$\vec{f}$とする。

つまり，$\vec{f}=(p,\ q)$とする。次の問いに答よ。

(1)　定積分

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx+l)(mx+n)dx$$

を求めよ。ただし，k, l, m, nは定数である。

(2)　２つの1次関数$g(x)$と$h(x)$に対して，等式

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}g(x)h(x)dx=\vec{g}\cdot\vec{h}$$

が成り立つことを示せ。ただし，$\vec{g}\cdot\vec{h}$はベクトル$\vec{g}$，$\vec{h}$の内積を表す。

(3)　等式

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2\,dx\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2dx=\left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)dx\right\}^2$$

を満たし，$g(0)=-2$であるような１次関数 $g(x)$ を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx+l)(mx+n)dx=\left[\frac{kmx^3}{3}+\frac{(kn+lm)x^2}{2}+lnx\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}(km+ln)$$

(2)

１次関数として，$g(x)=kx+l$，$h(x)=mx+n$とおく。

すると，(1)の結果により，$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}g(x)h(x)dx=(km+ln)=(k,\ l)\cdot(m,\ n)=\vec{g}\cdot\vec{h}$

(3)

同様に，$g(x)=kx+l$とおく。$g(0)=l=-2$だから，$g(x)=kx-2$

(1)の結果を用いて，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2\,dx=10\sqrt{3}$，$\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2dx=2\sqrt{3}(k^2+4)$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)\,dx=2\sqrt{3}(2k-4)$$

したがって，$60(k^2+4)=48(k-2)^2$，$k^2+16k+4=0$，したがって$k=-8\pm2\sqrt{15}$

したがって，$g(x)=(-8\pm2\sqrt{15})x-2$

＜解説＞

ベクトルの内積を応用した積分に関する問題だが，一見難しそうだが，簡明な問題である。

(1)

２次関数の定積分だから，素直に計算すれば良い。積分範囲が$-\sqrt{3}$から$\sqrt{3}$と正負対称だから結果は簡明である。

(2)

(1)の結果を利用すれば良いので，計算は容易である。

(3)

同様に(1) (2)の結果を利用して，ていねいに計算すれば良い。

＜総評＞

特別の発想力や思考力を必要とする問題はない。基礎知識を基に，的確に思考過程をたどれば，概ね解答が可能であろう。昨年よりも易化したと感じる。

$\boxed{1}$

理系の問題 $\boxed{1}$ とほぼ同じ。変数がある領域を動くときの一次関数の最大値を求める問題。題意は簡明である。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

理系の問題 $\boxed{2}$ と同じ。難易度はＢ－。

$\boxed{3}$

数列の問題。初等的な式の変形で対応できる。ていねいに計算する。難易度はＢ。

$\boxed{4}$

定積分とベクトルの内積に関する問題。難易度はＢ＋。

130707