2013（H25)年度　東北大学　前期入学試験　物理解説

$\boxed{1}$

＜解答＞

問（１）(a)

　鉛直方向に小球が下降した距離は，$R(\cos\theta-\cos\theta_0)$

エネルギー保存の法則により，これによって失った位置のエネルギーが小球の運動エネルギーに

変化したのだから，$\dfrac{1}{2}mv^2=mgR(\cos\theta-\cos\theta_0)$，$v=\sqrt{2gR(\cos\theta-\cos\theta_0)}$　（答）

　重力の加速度gの半球の面方向成分は，$a=g\sin\theta$　（答）

(b)

　小球のx 方向の変位をx とすれば$\sin\theta=\dfrac{x}{R}$，したがって $a=g\sin\theta\fallingdotseq\dfrac{gx}{R}$

$F=ma=-\dfrac{mgx}{R}=-kx$，小球に働く力は変位x に比例し，逆方向に働くので，x は単振動となる。

したがって，単振動の周期はT_1は，$T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$　（答）

問（２）(a)

　半球面からの垂直抗力をN，垂直抗力と鉛直線とのなす角をθとする。

円運動の方程式は，$mr{\omega_1}^2=N\sin\theta$，鉛直方向の運動方程式は$0=N\cos\theta-mg$

したがって，$N=\dfrac{mg}{\cos\theta}$，ただし，$\sin\theta=\dfrac{r}{R}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}$

したがって，$mr{\omega_1}^2=\dfrac{mg\sin\theta}{\cos\theta}$，${\omega_1}^2=\dfrac{g\sin\theta}{r\cos\theta}=\dfrac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}$，$\omega_1=\sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}}$　（答）

(b)

　r がR に比べて十分小さいとき，

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}}=\sqrt{\frac{g}{R\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}}}\fallingdotseq\sqrt{\frac{g}{R}}={\omega_1}',\quad T_2=\frac{2\pi}{{\omega_1}'}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$　（答）

問（３）(a)

　半球上の運動を対象とするので，台車とともに移動する観測系によって

考える。すると，台車に 働く加速度と反対方向に慣性力$\dfrac{5g}{12}$が小球に働く。

　図１のように，重力gと慣性力の合力が見かけの重力となるので，

小球の円運動の軸は見かけの重力の方向になる。合力の大きさは

$\sqrt{1+\left(\dfrac{5}{12}\right)^2}\,g=\dfrac{13g}{12}$，したがって，$\sin\phi=\dfrac{5}{13}$　（答）

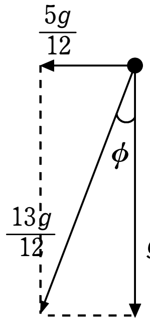

図１

(b)

$\omega_1=\sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}}$ における重力の加速度gをみかけの重力の加速度$\dfrac{13g}{12}$に置き換えれば良い。

$\omega_2=\sqrt{\dfrac{13g}{12\sqrt{R^2-r^2}}}$　（答）

問（4）(a)

図2を参照する。

小球の円運動の方程式は，$mr\omega^2=N\sin\theta+U\sin\alpha$　①

鉛直方向の運動について，$0=N\cos\theta+U\cos\alpha-mg$　②

また$R\cos\alpha=\dfrac{l}{2}$だから$\cos\alpha=\dfrac{l}{2R}$，また$2\alpha=\theta$，$r=l\sin\alpha$

小球が半球内面から離れずに円運動するということは，

垂直抗力$N\geqq 0$ということである。すると，

①から，$N\sin\theta=mr\omega^2-U\sin\alpha\geqq 0$，$\omega^2\geqq\dfrac{U\sin\alpha}{mr}$　③

②から，$N\cos\theta=mg-U\cos\alpha\geqq 0$，$U\leqq\dfrac{mg}{\cos\alpha}$　④

③に④を適用すると，$\omega^2\geqq\dfrac{g\sin\alpha}{r\cos\alpha}=\dfrac{g}{l\cos\alpha}=\dfrac{2Rg}{l^2}$

したがって，$\omega_{min}=\dfrac{\sqrt{2Rg}}{l}$　（答）

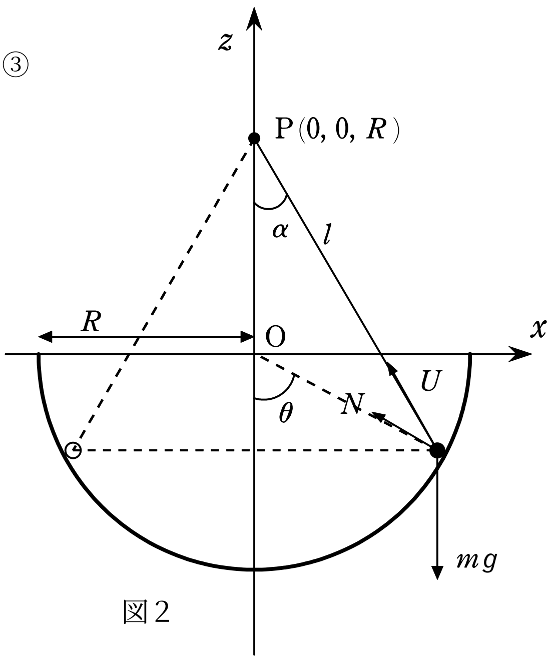

図2

(b)

$U=0$になるとき，ひもがたるむ直前である。

その際の角速度以上になると，小球が半球面

上方へ移動して，ひもがたるむ。

①において，$U=0$，$\omega=\omega_{max}$として，

$mr\omega_{max}{}^2-N\sin\theta=0$

$\omega_{max}{}^2=\dfrac{N\sin\theta}{mr}=\dfrac{g\sin\theta}{r\cos\theta}=\dfrac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}=\dfrac{2Rg}{l^2-2R^2}$

ただし，②から$mg-N\cos\theta=0$，$N=\dfrac{mg}{\cos\theta}$である。

したがって，$\omega_{max}=\sqrt{\dfrac{2Rg}{l^2-2R^2}}$　（答）

＜解説＞

$\boxed{1}$

問（1）(a)

エネルギー保存の法則を使う。

(b)

単振動をすることをいう。単振動の周期の公式は覚えること。

問（2）(a)

水平面内の運動と鉛直方向の運動を考える。水平面内の運動は円運動だから，円運動の方程式を考える。円運動するためには，向心力の存在が必要である。向心力は小球に働く半球面からの垂直抗力の分力として与えられる。鉛直方向には運動しないので，垂直抗力による分力と重力の合力は0である。

別解を紹介する。

小球は半球面に沿って，上方へも下方へも滑ることなく静止している。すなわち，遠心力による半球面上方への力$mr{\omega_1}^2\cos\theta$と重力による面下方への力$mg\sin\theta$がつり合っている。

したがって，$mr{\omega_1}^2\cos\theta=mg\sin\theta$，$\omega_1=\sqrt{\dfrac{g\sin\theta}{r\cos\theta}}=\sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}}$　（答）

(b)

ω_1に対して，$1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\fallingdotseq 1$を利用すれば良い。

問（3）(a)

もう少し具体的に問題を見てみよう。図３に示すように，半球を乗せた台車が加速度$\dfrac{5g}{12}$で右方へ移動している。半球上の小球の運動を考えるので，台車上に乗っている観測者が見た運動である。すると，小球は左方へ$\dfrac{5g}{12}$の慣性力が働いているように運動する。したがって，重力と慣性力の合力の方向が小球の円運動の軸の方向　となる。

合力の大きさは$\sqrt{1+\left(\dfrac{5}{12}\right)^2}\,g=\dfrac{13}{12}g$，$\sin\phi=\dfrac{5}{13}$　（答）

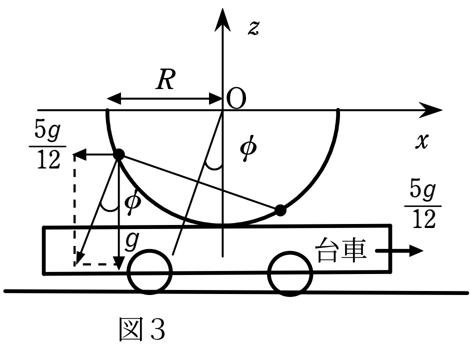

図３

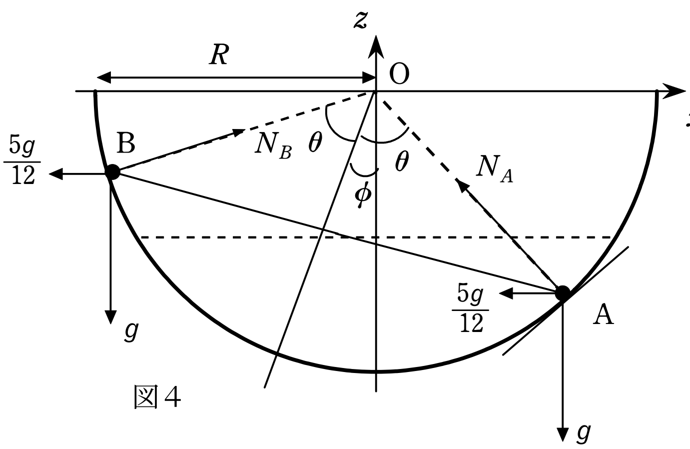

図４

(b)

台車上の観測系からみると，重力の方向がϕ傾き，大きさが$\dfrac{13g}{12}$となる。

図４を参照しながら，円運動の方程式から，$\sin\phi$やω_2を求めてみよう。

A 点において，円運動の方程式は，$mr{\omega_2}^2=N_A\sin\theta+\dfrac{5mg}{12}\cos\phi-mg\sin\phi$　①

また，円運動の面と垂直方向について，$N_A\cos\theta-\dfrac{5mg}{12}\sin\phi-mg\cos\phi=0$　①’

B点において，円運動の方程式は，$mr\omega_2{}^2=N_B\sin\theta\ -\dfrac{5mg}{12}\cos\phi+mg\sin\phi$　②

また，円運動の面と垂直方向について，$N_B\cos\theta-\dfrac{5mg}{12}\sin\phi-mg\cos\phi=0$　②'

ただし，N_A，N_BはA，Bにおける半球面から小球への垂直抗力である。

①'，②'から$N_A=N_B$，したがって，①，②から

$$-\frac{5mg}{12}\cos\phi+mg\sin\phi=\frac{5mg}{12}\cos\phi-mg\sin\phi$$

$$\sin\phi=\frac{5}{12}\cos\phi,\ \sin^2\phi+\left(\frac{12}{5}\right)^2\sin^2\phi=1,\ \sin^2\phi=\frac{5^2}{5^2+12^2},\ \sin\phi=\frac{5}{13}$$　（答）

①'から$N_A\cos\theta=\dfrac{13}{12}mg$，①から$mr\omega_2{}^2=\dfrac{13}{12}mg\tan\theta$，$\omega_2{}^2=\dfrac{13g}{12\sqrt{R^2-r^2}}$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{13g}{12\sqrt{R^2-r^2}}}$$　（答）

問（4）(a)

小球が静止してひもにぶら下がった状態から回転を始めると，角速度の増加につれ，回転半径が増大し，やがて半球内面に接して回るようになる。この時の円運動の方程式において，垂直抗力0のときが，内面から離れずに円運動をする角速度の最小値を与える。

(b)

小球が内面に接触して回転しながら，角速度をあげてゆくと，垂直抗力が大きくなり，小球は内面上方へ動き始める。その直前にひもの張力が0となり，たるみ始める。すなわち，ひもの張力が0となる角速度が，ひもがたるまないで回転する角速度の最大値を与える。

2

＜解答＞

問（1）(a)

オームの法則により，$I_0=\dfrac{E}{R_1}$　（答）

(b)

磁場中の導体棒に電流が流れると力が発生する。フレミングの左手の法則により電磁力は上方に働く。加えて重力が下方に働くので，導体棒に働く力は

$F=BI_0W-mg$　（答）

(c)

図1に等価回路を示す。キルヒホッフの法則により，

$E-(I+I_2)R_1-I_2R_2=0$　①

$E-(I+I_2)R_1+\varDelta E=0$　②

導体棒が移動すると，その中の電子も移動するので，磁場からローレンツ力を受ける。そのため，導体棒には逆起電力が発生する。発生する逆起電力は，$\varDelta E=-vBW$

①，②から，$I_2R_2=-\varDelta E$，$I_2=\dfrac{vBW}{R_2}$　③

③を①に代入して，　$E-IR_1-\dfrac{vBWR_1}{R_2}-vBW=E-IR_1-\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)R_1vBW=0$

$I=\dfrac{E}{R_1}-\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)vBW$　（答）

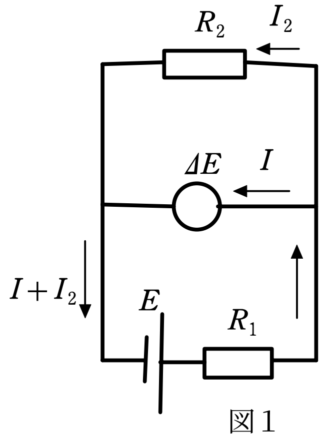

図１

(d)

導体棒には下方に重力，上方に電磁力が働く。一定速度に達したということは，重力と電磁力が等しくなったことである。

したがって，$BI_fW=mg$，$I_f=\dfrac{mg}{BW}$　（答）

(c)の結果から，$\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)v_fBW=\dfrac{E}{R_1}-I_f=\dfrac{E}{R_1}-\dfrac{mg}{BW}$

$v_f=\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)BW}\left(\dfrac{E}{R_1}-\dfrac{mg}{BW}\right)$　（答）

問（２）(a)

$\varDelta t$の間に導体棒が磁場を横切る面積は$\varDelta xW$，したがって$V_{con}=-BW\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}$　（答）

コイルに発生する誘導起電力は，$V_{coil}=-L\dfrac{\varDelta i}{\varDelta t}$　（答）

(b)

この回路についてキルヒホッフの法則により，$V_{con}+V_{coil}=0$だから，$V_{coil}=-V_{con}$

$-L\dfrac{\varDelta i}{\varDelta t}=-L\dfrac{c\varDelta x}{\varDelta t}=BW\dfrac{\varDelta x}{\varDelta t}$，したがって$c=-\dfrac{BW}{L}$　（答）

(c)

導体棒には重力が下方に，電流iが流れることによる電磁力が上方に働く。

したがって運動方程式は，$ma=iBW-mg=cBWx-mg=-\dfrac{B^2W^2}{L}x-mg$　（答）

(d)

導体棒の振動の中心位置は，力が0になる位置だから，(c)の結果から，$-\dfrac{B^2W^2}{L}x-mg=0$

したがって，$x=-\dfrac{mgL}{B^2W^2}$　（答）

単振動の運動方程式を$ma=-kx$とおくと，周期は$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$だから，この場合の周期は

$T=\dfrac{2\pi\sqrt{mL}}{BW}$　（答）

＜解説＞

問（１）(a)

導体棒の抵抗は無視するので，抵抗２には電流が流れない。両端に電位差が発生しないからである。

(b)

磁場中を動く電子にはローレンツ力が発生する。これが元になって，導体棒に電流が流れると，電流を構成する電子に力が働き，その結果，導体棒に力が働き，上方へ移動する。電流と磁場が直交するとき，力の向きはフレミングの左手の法則によって決まる。

(c)

導体棒が移動を始めると，導体棒中の電子が導体棒移動方向に移動することになる。すると，今度はその移動に対して，ローレンツ力が働くことになる。その力は電流を流す方向とは逆向きになるので，導体棒中に逆起電力が発生したことになる。教科書に掲載されている通りである。

(d)

導体棒に電流が流れ始めたとき，重力よりも電磁力の方が大きければ，導体棒は上方に移動を始める。加速されて，次第に上方への速度が大きくなるが，(c)のように，電流が小さくなる。すると，(a)のように電磁力が小さくなって，重力とつり合って，一定速度になる。したがって，導体棒に流れる電流は，導体棒に働く電磁力と重力が等しくなる電流である。

問（２）(a)

導体棒に発生する誘導起電力は導体棒が磁場を横切る面積と磁束の積の時間変化に比例する。教科書に記載されている通りである。また，コイルに発生する誘導起電力は電流の時間変化と自己インダクタンスの積である。

(b)

閉回路に，導体棒の誘導起電力とコイルの誘導起電力の２つが存在する。キルヒホッフの法則により，両者の和は0になる。

(c)

導体棒に作用する力は，重力と電磁力である。問１(b)の解説のように電磁力が発生し，変位xに比例し，xとは逆方向の力となる。

(d)

大きさが変位に比例し，方向が変位とは逆方向の力が作用する運動は単振動である。振動の中心は力が0になる位置である。なぜなら，その位置で変位の方向が逆になるからである。

$\boxed{3}$

問（1）(a)

状態 0において，空間aの気体の状態方程式により，$pV_{a0}=RT_a$，$V_{a0}=\dfrac{RT_a}{p}$　①

状態1において，空間aの気体について，$pV_{a1}=RT'$，$V_{a1}=\dfrac{RT'}{p}$　②

$T_a>T_b$の場合，$T_a>T'$だから，①，②から$V_{a0}>V_{a1}$で，空間aの体積は減少する。

$T_a<T_b$の場合，$T_a>T'$だから，①，②から$V_{a0}<V_{a1}$で，空間aの体積は増加する。

(b)

空間aの気体は定圧変化をしたので，空間bの気体から吸収した熱量は，$Q_a=C_p(T'-T_a)$　（答）

(c)

定圧変化だから，ピストンからされた仕事は,

$W=-p(V_{a1}-V_{a0})=-R(T'-T_a)=(C_p-C_V)(T_a-T')$　（答）

(d)

（空間aの気体が得た熱量）＋（空間bの気体が得た熱量）＝0

空間bの気体は定積変化をしたので，得た熱量は，$Q_b=C_V(T'-T_b)$

したがって，$C_p(T'-T_a)+C_V(T'-T_b)=0$，$T'=\dfrac{C_pT_a+C_VT_b}{C_p+C_V}$　（答）

(e)

熱力学の第一法則により，空間aの気体について,

$\Delta U_a=Q_a+W=C_p(T'-T_a)+(C_p-C_V)(T_a-T')=C_V(T'-T_a)=\dfrac{C_v{}^2(T_b-T_a)}{C_p+C_v}$　（答）

空間b の気体について，$\Delta U_b=Q_b=C_V(T'-T_b)=\dfrac{C_pC_v(T_a-T_b)}{C_p+C_V}$　（答）

問（2）

空間a，b の気体からなる系と外部との熱の授受はない。したがってピストンが空間aの気体にした仕事W' によって空間a，b の気体の温度がT'からT_bに変化した。それぞれ1モルだから，熱力学の第一法則により，$W'=2C_V(T_b-T')=-2\Delta U_b=\dfrac{2C_pC_V(T_b-T_a)}{C_p+C_V}$　（答）

問（3）

同一圧力での体積を考える。(ア)，(イ)では空間bの体積は一定なので，(ウ)が一番縮小する。(イ)では空間aの気体とbの気体との間の熱の流れはないので，(ア)よりも温度が高くなる。したがって同一圧力なら，(ア)より(イ)の体積は大きい。

したがって，A (ウ)，B (ア)，C (イ)　（答）

＜解説＞

問（１）　(a)

状態0，1での気体の状態方程式を利用する。熱は二つの空間a，b の間でやりとりされるので，T'はT_aとT_bの間にある。

(b)

定圧変化だから，（気体のモル数）×（定圧モル比熱）×（空間aの気体の温度変化）が気体が吸収した熱量である。

(c)

気体がした仕事は定圧変化だから，圧力×（変化後の体積－変化前の体積）だから，気体がピストンによってなされた仕事は，正負が逆になる。$C_p-C_V=R$ を利用する。

(d)

空間a，b の気体の間で熱量の授受がなされるので，両気体の得る（失う）熱量の和は0である。

(e)

熱力学の第一法則を使う。教科書に掲載されているように，熱力学の第一法則は,

$\Delta U=Q+W$

これは，気体が外部から熱Qを受け取り，同時にWの仕事をされたとき，気体の内部エネルギーがU_1からU_2に$\Delta U\,(=U_2-U_1)$だけ増加したことを示している。

問（２）

ピストンが空間a の気体にした仕事W' は空間aの気体とb の気体の内部エネルギーの変化になる。外部との熱の授受はないからである。空間b の気体は体積変化しないので，定積変化だから，$C_V(T_b-T')$の熱を得る。これは，内部エネルギーの変化になる。空間aの気体の温度はT' からT_b に変化するので内部エネルギーの変化は$C_V\,(T_b-T')$である。したがって$W'=2\,C_V\,(T_b-T')$となる。

問（３）

短い時間での解答のためには，直感的な理解を必要とする。ここでは，同一体積を実現するための圧力を考えてみよう。(ア)と(イ)の空間　b の体積は一定なのだから，(ウ)が一番低い圧力ですむ。したがって，Ａは(ウ)である。(ア)は熱が空間aからb へ逃げるので，温度は(イ)よりも低くなる。したがって，圧力も低い。したがって，Ｂは(ア)，Ｃは(イ)である。

＜総評＞

昨年同様に第１問が力学，第２問が電磁気，第３問が理想気体の状態変化の問題である。解答時間は150分。多くの大学の入試物理の問題と同様に，長文を読み込まなければならない。基礎的な理解と思考力が問われる問題である。教科書をしっかり理解し，掲載されている問題を解いて理解を深めることが，当たりまえのことだが，基本的な勉強方法である。

$\boxed{1}$

半球内面における小球の運動に関する問題で，単振動，円運動，慣性力，垂直抗力，張力などの基礎概念がきちんと理解されていないと，解答は難しい。全体として力学の的確な理解力を問うことができる良問である。

問１は振り子と同じように，振幅が小さいうちは，単振動をする。単振動となる条件，単振動の周期などは覚えていなければならない。難易度はＣ。

問２は半球が台車上に固定され，台車がx方向に等加速度運動を行っているときの回転運動について問う。半球面における運動だけを考えるのだから，台車上の観測系で運動を考える。すると，台車の加速度は小球に対して慣性力を発生させる。重力と慣性力の合力が，みかけの重力となることから，小球の円運動の回転軸がみけけの重力の方向へ傾く。難易度Ａ。

問３では，小球をひもでぶら下げて回転する運動を考える。張力と垂直抗力とを考慮した円運動を考える。ひもがたるまずに，小球が半球内面に接して回転する場合，抗力が0になるときが角速度の最小値，張力が0になるときが角速度の最大値を与える。難易度Ａ－。

$\boxed{2}$

電気回路と電磁力に重力を加えた問題だが，この種の問題設定は頻出されるので，見慣れた受験者も多かったろう。電流が流れ始めたときから発生する物理過程を的確に理解することが必要だ。問題は誘導的に構成されているから，前問の考え方や解答を活用すること。

問１の物理過程を整理しておこう。スイッチS_1を閉じたとき電流が流れる。導体棒は手で押さえておく。手を放すと、上昇するということは，重力による下方への力より大きい電磁力が働いたということだ。導体棒が磁場中で動くと，導体棒の中の電子に力が働いて，起電力が発生するという過程が続く。これは電流が流れる方向とは逆方向なので，逆起電力というわけだ。

逆起電力の大きさは導体棒の速さに比例するので，だんだん大きくなる。すると，電流はだんだん減少するので，上方への電磁力は減少し，やがて重力とつり合う。すると，導体棒の速さは一定となり，逆起電力も一定となり，電流も一定となる。難易度Ａ－。

問２では，スイッチS_1を開くと，電流が流れなくなり，上方への電磁力が発生しなくなるので，下方への重力のみとなる。すると導体棒の上方への速さが減少し，停止する。

停止した瞬間，スイッチS_2を閉じると，閉回路になるので，導体棒が磁場中を移動することによる起電力が発生し電流が流れる。一方，この電流の変化によって，コイルのインダクタンスに逆起電力が発生する。この閉回路にキルヒホッフの法則を適用すれば，導体棒の移動による起電力とコイルの逆起電力の関係が分かる。

導体棒の速さと電流の時間変化が比例する。結果として，導体棒の変位と電流が比例するという条件が与えられるので，導体棒には変位に比例する電磁力が発生する。その方向は変位の方向と逆方向なので，単振動になる。難易度Ａ－。

$\boxed{3}$

理想気体の状態変化の問題。空間b の体積は変化せず，固定仕切りによって，空間aの気体との間で熱の授受をして定積変化をすることが特徴の問題である。

問１では，定圧変化を扱う問題である。理想気体の状態変化，モル比熱の概念，熱力学の第一法則などを理解していること。空間b の気体の状態を変化させるのは，空間a の気体からの熱だけである。気体がする仕事と気体がされる仕事は正負が逆になる。空間b の気体が吸収した熱量は，体積が変化しないので，内部エネルギーの変化になる。難易度Ｂ。

問２では，ピストンが空間a の気体にした仕事がすべて空間aとb の気体の内部エネルギーの変化になることに注意する。難易度Ｂ。この問題については筆者に誤解と錯覚があって当初の解説が誤っていた。読者からの指摘によって気づき，ここでお詫びするとともに，解答と解説を訂正したことを報告する（160409）。

問３では，圧力と体積の状態変化曲線の特徴を理解していることが必要だ。教科書に掲載されてい

る。難易度はC。

130108