2013 (H25) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部･医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻･検査技術科学専攻）
　　　･歯学部･薬学部･工学部･農学部

$\boxed{1}$　kを実数とする。3次式$f(x)=x^3-kx^2-1$に対し，方程式$f(x)=0$の3つの解をα，β，γとする。
$g(x)$はx^3の係数が1である3次式で，方程式$g(x)=0$の3つの解が$\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$であるものとする。

(1)　$g(x)$をkを用いて表せ。

(2)　2つの方程式$f(x)=0$と$g(x)=0$が共通の解をもつようなkの値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$f(x)=x^3-kx^2-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$$

したがって，

$\alpha+\beta+\gamma=k$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$，$\alpha\beta\gamma=1$

これらの関係を用いて，

$$g(x)=(x-\alpha\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma\alpha)=x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+(\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta)x-(\alpha\beta\gamma)^2$$

$$=x^3+(\alpha\beta\beta\gamma+\beta\gamma\gamma\alpha+\gamma\alpha\alpha\beta)x-1=x^3+(\beta+\gamma+\alpha)x-1=x^3+kx-1$$　（答）

(2)

$f(x)=x^3-kx^2-1=0$から$x^3=kx^2+1$，これを$g(x)=x^3+kx-1=0$に代入すると，

$kx^2+kx=kx(x+1)=0$

(ⅰ) $k=0$のとき

$f(x)=g(x)=x^3-1$，同じ3次式になるから，$f(x)=0$と$g(x)=0$は共通の解をもつ。

(ⅱ) $k\fallingdotseq 0$のとき

$x(x+1)=0$，したがって$x=0$または$x=-1$

$f(0)=g(0)=-1\fallingdotseq 0$だから$x=0$は解ではない。

$f(-1)=-2-k=g(-1)=0$したがって$k=-2$

以上によって，2つの方程式$f(x)=0$と$g(x)=0$が共通の解をもつようなkは，$k=0$，-2　（答）

＜解説＞

3次方程式の解によって，3次式を表せば良い。(2)では，共通の解をもつ，ということは，一方の解が他方の解になるということである。そこで，$f(x)=0$を満たすxを$g(x)=0$に代入して，解が得られる条件を考察すれば良い。

$\boxed{2}$　四面体OABCにおいて，OA=OB=OC=1とする。
$\angle$AOB=60°，$\angle$BOC=45°，$\angle$COA=45°とし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$とおく。
点Cから面OABに垂線を引き，その交点をHとする。

(1)　ベクトル$\overrightarrow{OH}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表せ。

(2)　CHの長さを求めよ。

(3)　四面体OABC の体積を求めよ。

＜解答＞

(1)

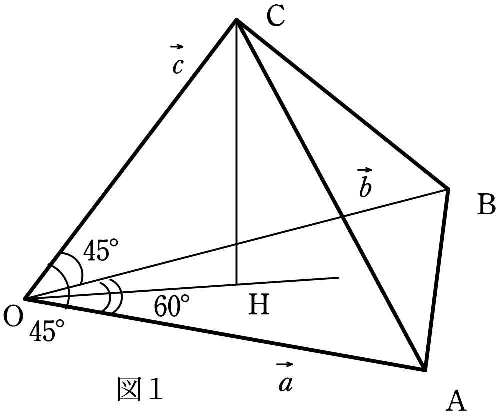

図１

図１を参照する。

$\overrightarrow{OH}=p\,\overrightarrow{OA}+q\,\overrightarrow{OB}=p\vec{a}+q\vec{b}$

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH}=-\vec{c}+p\vec{a}+q\vec{b}$

CHは平面OAB に垂直だから，ベクトル$\overrightarrow{CH}$と$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ は直交する。

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0=(-\vec{c}+p\vec{a}+q\vec{b})\cdot\vec{a}=-|\vec{a}||\vec{c}|\cos 45°+p\vec{a}^2+q|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+p+\dfrac{1}{2}q$　①

同様に，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0=(-\vec{c}+p\vec{a}+q\vec{b})\cdot\vec{b}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}p+q$　②

①，②から，$p=q=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，したがって，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})$　（答）

(2)

△OCHは直角三角形だから，

$(\mathrm{CH})^2=(\mathrm{OC})^2-(\mathrm{OH})^2=1-\dfrac{2}{9}(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°)=1-\dfrac{6}{9}=\dfrac{1}{3}$

$\mathrm{CH}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　（答）

(3)

四面体OABCの体積$=\dfrac{1}{3}\times$（△ABCの面積）$\times\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{12}$　（答）

＜解説＞

単純な四面体の問題だから，立体図形だからと，ためらうことにないように。できるだけ，正確に図形を描いて問題の趣旨を把握すれば，存外容易な問題であることがわかるだろう。

(1)

$\overrightarrow{OH}$を２つの未知数p，qを用いて$\vec{a}$と$\vec{b}$の一次結合で表す。p，qを求めるために$\overrightarrow{CH}$が$\vec{a}$，$\vec{b}$と直交することを利用する。

いろいろな解法は考えられる。別解を紹介しよう。
上記解答のようにエレガントな方法を考案できない場合，もっと具体的に図形を見つめてみる。

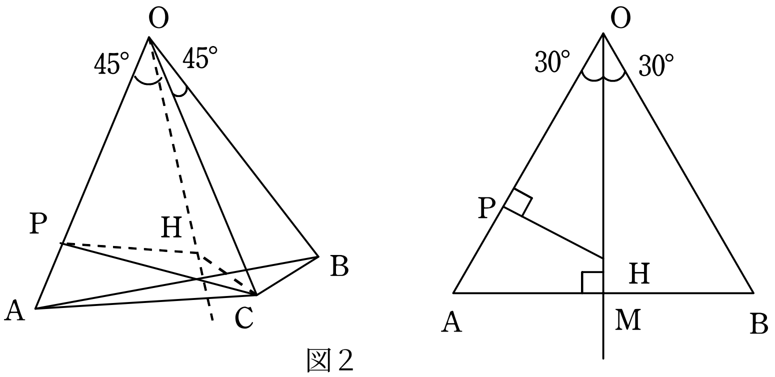

図２

図２を参照する。CHを含み，面OABに垂直な平面と直線OAの交点をPとする。

すると，直線CPとOAは直交する。$\angle COA=45°$だから，$OP=\frac{\sqrt{2}}{2}OC=\frac{\sqrt{2}}{2}OA$

$\triangle OAC\equiv\triangle OBC$だから，OHは$\angle AOB=60°$の2等分線OM上にある。

したがって，$OH=\frac{2}{\sqrt{3}}OP=\sqrt{\frac{2}{3}}OA$，また$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}OA$

$\overrightarrow{OH}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=2k\overrightarrow{OM}$とおくと，$k=\frac{1}{2}\left|\frac{\overrightarrow{OH}}{\overrightarrow{OM}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{3}$

したがって，$\overrightarrow{OH}=\frac{\sqrt{2}}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})$　（答）

(2)

特に問題なかろう。

(3)

角錐の体積の公式，すなわち，$\frac{1}{3}\times$底面の面積$\times$高さ，を覚えておかなければならない。

$\boxed{3}$　A，Bの2人が，サイコロを1回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に6以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。Aから投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1)　Aがちょうど2回投げてAが勝ちとなる確率を求めよ。

(2)　Bがちょうど2回投げてBが勝ちとなる確率を求めよ。

(3)　Bがちょうど3回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

<解答>

(1)

　A，Bが投げたn回めのサイコロの目をそれぞれa_n，b_nとする。$1\leqq a_n$，$b_n\leqq 6$である。

Aがちょうど2回投げてAが勝ちとなるのは，$a_1+a_2\geqq 6$，したがって$6-a_1\leqq a_2\leqq 6$

a_1に対して許されるa_2の場合の数は$6-(6-a_1)+1=a_1+1$通りである。

Bが1回投げて勝たない場合，$b_1\leqq 5$であり場合の数は5通りである。

したがって，Aがちょうど2回投げて勝ちとなる場合の数は，$5\times\sum_{a_1=1}^{5}(a_1+1)=100$通り。

ABAと3回投げて出るサイコロの目の全体の場合の数は$6\times 6\times 6=6^3$通りだから，

Aがちょうど2回投げてAが勝ちとなる確率は，$\dfrac{100}{6^3}=\dfrac{25}{54}$　（答）

(2)

　Aが2回投げても勝たない場合は，$a_1+a_2\leqq 5$，したがって10通り。

Bがちょうど2回投げて勝つ場合は，$b_1\leqq 5$，$b_1+b_2\geqq 6$，したがって20通り。

すると，Bがちょうど2回投げてBが勝ちとなる場合の数は$10\times 20=200$通り。

ABABと4回投げて出るサイコロの目の場合の数は$6\times 6\times 6\times 6=6^4$

すると，Bがちょうど2回投げてBが勝ちとなる確率は$\dfrac{200}{6^4}=\dfrac{25}{162}$　（答）

(3)

　Aが3回投げても勝ちとならない場合は，$a_1+a_2+a_3\leqq 5$

したがって，$a_1+a_2\leqq 5-a_3$

$a_3=1$の場合，$a_1+a_2\leqq 4$，したがって$a_1=1$に対し，$a_2=1$，2，3であり，3通り。

$a_1=2$に対し，$a_2=1$，2であり，2通り。

$a_1=3$に対し，$a_2=1$であり，1通り。

$a_3=2$の場合，$a_1+a_2\leqq 3$，したがって$a_1=1$に対し，$a_2=1$，2であり，2通り。

$a_1=2$に対し，$a_2=1$であり，1通り。

$a_3=3$の場合，$a_1+a_2\leqq 2$，したがって$a_1=1$に対し，$a_2=1$であり，1通り。

したがって，$a_1+a_2+a_3\leqq 5$となるのは，これらを足して，10通り。

同様に，Bが3回投げても勝ちとならない場合は，$b_1+b_2+b_3\leqq 5$で，10通り。

したがって，Bがちょうど3回投げて，ゲームが終了していない場合の数は$10\times 10=100$通り。

Aが3回，Bが3回投げて出るサイコロの目の場合の数は$6\times 6\times 6\times 6\times 6\times 6=6^6$通り。

Bがちょうど3回投げて，ゲームが終了していない確率は$\dfrac{100}{6^6}=\dfrac{25}{11664}$　（答）

<解説>

　確率の問題は，ある条件を満足する場合の数を求める問題に帰着することが多い。この問題でも，条件を満足する整数の組の数を求めることになる。A，Bがn回めに投げたサイコロの目をa_n，b_nとすれば，ある条件を満足する（a_1，a_2，・・）と（b_1，b_2，・・）の組の数を求める問題である。

サイコロの目だから，$1 \leqq a_n$，$b_n \leqq 6$，またa_nとb_nは独立だから，
全体の場合の数は，（a_1，a_2，・・）の場合の数と（b_1，b_2，・・）の場合の数の積になる。

(1)

$a_1+a_2 \geqq 6$を満たす（a_1，a_2）の数，$b_1 \leqq 5$を満たす（b_1）の数を求める問題に帰着する。

(2)

$a_1+a_2 \leqq 5$を満たす（a_1，a_2）の数，$b_1 \leqq 5$，$b_1+b_2 \geqq 6$を満たす（b_1，b_2）の数を求める。

(3)

$a_1+a_2+a_3 \leqq 5$を満たす（a_1，a_2，a_3）の数，$b_1+b_2+b_3 \leqq 5$を満たす（b_1，b_2，b_3）の数を求める。

$\boxed{4}$ 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta,\quad b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\, d\theta \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，eは自然対数の底とする。

(1) 一般項b_nを求めよ。

(2) すべての n について，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

<解答>

(1)

$x=\sin\theta$とおく。$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$，$\theta=\pm\dfrac{\pi}{6}$なら$x=\pm\dfrac{1}{2}$

したがって，$b_n=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\, d\theta=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{nx}dx=\left[\frac{e^{nx}}{n}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)$ （答）

(2)

$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$において，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$，この不等式に$e^{n\sin\theta}(>0)$を乗じると，

$$(0<)\ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta} \leqq e^{n\sin\theta}\cos\theta \leqq e^{n\sin\theta} \quad ①$$

①の2番目の不等式より，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\, d\theta \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta$，ゆえに$b_n \leqq a_n$

また①の最初の不等式より，$\displaystyle\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\, d\theta$，

したがって，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\, d\theta$，ゆえに$a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$

以上によって，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つ

(3)

$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$により，$\dfrac{1}{n}\log(nb_n) \leqq \dfrac{1}{n}\log(na_n) \leqq \dfrac{1}{n}\log\left(\dfrac{2nb_n}{\sqrt{3}}\right)$

したがって，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nb_n) \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n) \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{2nb_n}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\log(nb_n)\right\}$$

$\dfrac{1}{n}\log(nb_n)=\dfrac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)$ により，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nb_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log e^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\frac{n}{2}\log e=\frac{1}{2}$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\log(nb_n)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nb_n)=\frac{1}{2}$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)=\frac{1}{2}$　（答）

＜解説＞

一見難しそうな積分式が出てきたが，$x=\sin\theta$なる変数変換によって，容易にb_nの積分は可能になる。$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$において，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$となることがポイント。このことには直ぐに気がつくであろう。a_nの積分を直接求める必要はない。

$\boxed{5}$ 2次の正方行列Aを$A=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$で定める。$n=1$，2，3，・・・

に対して，点P_n $(x_n，y_n)$を関係式
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
で定める。ただし，$x_0=1$，$y_0=0$とする。

(1)　A^4を求めよ。

(2)　$n=0$，1，2，・・・　に対して，
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
が成り立つことを示せ。ただし，Eは2次の単位行列とする。

(3)　原点OからP_nまでの距離OP_nが最大となるnを求めよ。

<解答>

(1)

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

とおくと，$\theta=135°=\frac{3}{4}\pi$ が満足する。すなわち，行列Aは原点を中心として角度$\frac{3}{4}\pi$の回転移動をする変換行列である。A^4 はこの回転を4 回続けて行うのだから，4θの回転移動となる。

したがって，$A^4=\begin{pmatrix}\cos 4\theta & -\sin 4\theta\\ \sin 4\theta & \cos 4\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 3\pi & -\sin 3\pi\\ \sin 3\pi & \cos 3\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$　（答）

(2)

$$\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}=(E-A^{k+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\quad ①$$

が任意の整数 $k=n$ において成立することを数学的帰納法によって証明する。

$k=0$では，$(E-A^{k+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=(E-A)(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$

となって成立する。

$k=n-1$において①が成立するとする。すなわち，$\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}=(E-A^n)(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

$k=n$において，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}&=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=A(E-A^n)(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\ &=A(E-A^n)(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+(E-A)(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\ &=\{A(E-A^n)+(E-A)\}(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=(A-A^{n+1}+E-A)(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\ &=(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となって，①が成立する。

以上のように①式は$k=0$で成立し，任意の整数$k=n-1$で成立するとすれば，nでも成立するので数学的帰納法により，任意の整数n において，$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ が成立する。

(3)

$n=8p+q$　（$p=0，1，2，3，\cdots$；$q=0，1，2，3，4，5，6，7$）とおく。

$A^8=(A^4)^2=(-E)^2=E$，すると，$A^n=A^{8p+q}=A^{8p}A^q=(E)^pA^q=EA^q=A^q$

図３に示すように，$A^q\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$は点$(1,\ 0)$を 角度$\frac{3}{4}\pi\times q$の回転移動をすることになる。

また，$\sum_{k=0}^{7} A^k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0$である。

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix}x_{n-2}\\y_{n-2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\cdots+A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$=(A^n+A^{n-1}+\cdots+A+E)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(A^{8p+q}+A^{8p+q-1}+\cdots+A+E)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\left\{A^{8p}(A^q+A^{q-1}+\ldots+A+E)+\sum_{j=0}^{p-1}A^{8j}\sum_{k=0}^{7}A^k\right\}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(A^q+A^{q-1}+\cdots+A+E)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

図３を参照しながら，$\begin{pmatrix}x_q\\y_q\end{pmatrix}$を具体的に調べる。

$q=0$　$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$(\mathrm{OP}_0)^2=1$

$q=1$　$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}+1\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$(\mathrm{OP}_1)^2=2-\sqrt{2}$

$q=2$　$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}+1\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}+1\\\frac{1}{\sqrt{2}}-1\end{pmatrix}$，$(\mathrm{OP}_2)^2=3-2\sqrt{2}$

$q=3$　$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}+1\\\frac{1}{\sqrt{2}}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$，$(\mathrm{OP}_3)^2=4-2\sqrt{2}$

$q=4$　$\begin{pmatrix}x_4\\y_4\end{pmatrix}=A^4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$，$(\mathrm{OP}_4)^2=3-2\sqrt{2}$

$q=5$　$\begin{pmatrix}x_5\\y_5\end{pmatrix}=A^5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_4\\y_4\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}-1\end{pmatrix}$，$(\mathrm{OP}_5)^2=2-\sqrt{2}$

$q=6$　$\begin{pmatrix}x_6\\y_6\end{pmatrix}=A^6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_5\\y_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$(\mathrm{OP}_6)^2=1$

$q=7$　$\begin{pmatrix}x_7\\y_7\end{pmatrix}=A^7\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_6\\y_6\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$(\mathrm{OP}_7)^2=0$

$\mathrm{OP_n}$ が最大となるのは$q=3$のとき，すなわち$n=8p+3$　($p=1$，２，３，・・・)　（答）

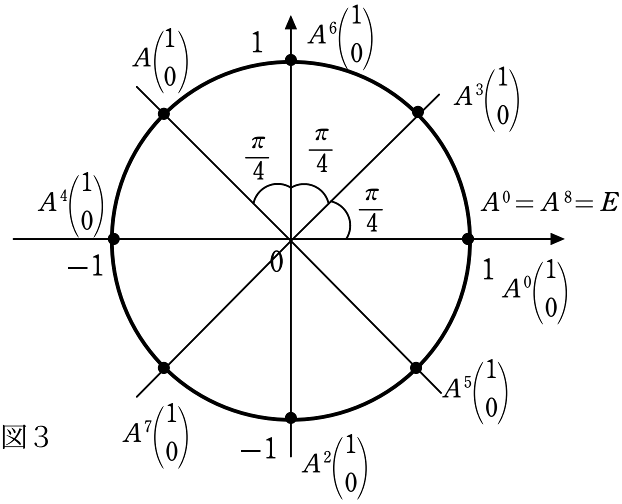

図３

＜解説＞

(1)

行列Aを見つめる。原点を中心とする角度θの回転移動の変換行列は

$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$であることを思い出す。$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

としてみると，$\theta=135^\circ=\frac{3}{4}\pi$のときに成立することが分かる。つまり，行列$A$は原点を中心として角度$\frac{3}{4}\pi$の回転移動の変換行列である。そして，$A^4=-E$ということは，$A^8=E$となって，８回の回転によって，元へ戻るということを意味している。

単純に行列の積の計算をしても良い。

$$A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^4=AA(A^2)=(A^2)(A^2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-E$$

(2)

整数$n=0$，１，２，・・・　に対して成立する式の証明は，数学的帰納法を用いると良い，ということは多くの読者の知るところだろう。

ここでは，$(E-A)(E-A)^{-1}=E$であるから，$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(E-A)(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$とおいて，式を変形することがポイントである。すると，行列の積の分配の法則により，上手に式の変形ができる。すなわち，$(A+B)C=AC+BC$，である。

別解を考えてみよう。与えられた二つの式を凝視すると，何かに気づく。

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad ②$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ③$$

②は等比数列のn項までの和，③はその和の公式に類似しているではないか。

実際に，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = V_n$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U$とおくと，

$$V_n = AV_{n-1} + U = A(AV_{n-2} + U) + U = A^2(AV_{n-3} + U) + AU + U$$

$$= \cdots = A^n V_0 + A^{n-1}U + A^{n-2}U + \cdots + AU + U = (A^n + A^{n-1} + \cdots + A + E)U$$

ただし，$V_0 = U$である。等比数列の和の公式を求めるときと同様に，

$AV_n = A(A^n + A^{n-1} + \cdots + A + E)U$だから，$V_n - AV_n = (E - A)V_n = (E - A^{n+1})U$

両辺に$(E-A)^{-1}$をかけて，$(E-A)^{-1}(E-A)V_n = V_n = (E-A)^{-1}(E-A^{n+1})U$

ここで困った。行列では一般に交換の法則は成り立たないので，

$(E-A)^{-1}(E-A^{n+1})U = (E-A^{n+1})(E-A)^{-1}U$とはいえないのである。しかし，ここまで記述すれば，満点に近い点が得られるであろう。

(3)

$\mathrm{OP_n} = \sqrt{x_n{}^2 + y_n{}^2}$が最大となる$n$を求める問題だが，少々煩項である。ここでは，８回の回転移動をすれば元に戻るのだから，$n = 8p + q$ （$p = 0$，１，２，３，・・・；$q = 0$，１，２，３，４，５，６，７）として，$q = 0$，１，２，・・，７の中から最大となるものを選べば良い。

上記の解答では，与えられた②を変形して，図３を利用することにより，簡便に$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix}$を求める方法を記述した。

別解を紹介しよう。

与えられた2つの式②，③のいづれを用いるかを考えねばならない。②では回転移動した点に(1，0)を加えなければならないので，計算が煩項になりそうだが，やってみよう。

$$\begin{pmatrix} x_{q+1} \\ y_{q+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_q + y_q) + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_q - y_q) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0{}^2 + y_0{}^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + y_0) + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 - y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad x_1{}^2 + y_1{}^2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix}, \quad x_2{}^2 + y_2{}^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+y_2)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-y_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix},\quad {x_3}^2+{y_3}^2=4-2\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_3+y_3)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3-y_3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix},\quad {x_4}^2+{y_4}^2=3-2\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_4+y_4)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_4-y_4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 \end{pmatrix},\quad {x_5}^2+{y_5}^2=2-\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_5+y_5)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_5-y_5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\quad {x_6}^2+{y_6}^2=1$$

$$\begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(x_6+y_6)+1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_6-y_6) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad {x_7}^2+{y_7}^2=0$$

上記を視察すると，1より大きいのは，$q=3$の場合のみで，$q=3$のときOP_nが最大になる。
すなわち，$n=8p+3$　($p=0$，1，2，3，・・・)

次に，もう一つ別解を考えよう。
せっかく③が与えられ，帰納法で証明したのだから，③を上手に使いたいところだ。ところが，
$(E-A)^{-1}$ が具体的に分からない。逆行列の公式を利用して，計算してみると

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}(E-B)=\frac{1}{2+\sqrt{2}}(E-A^{-1})$$

ただし，$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

$(E-A)^{-1}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}(E-A^{-1})$であることがわかる。

すると$(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}(E-A^{n+1})(E-A^{-1})=\frac{1}{2+\sqrt{2}}(E-A^7-A^{q+1}+A^q)$

$(E-A^7-A^{q+1}+A^q)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$を計算すれば，$\begin{pmatrix}x_q\\y_q\end{pmatrix}$が分かる。図３を描けば，容易に計算できる。

$(E-A^{n+1})(E-A^{-1})=E-A^{-1}-A^{n+1}+A^n=E-A^7-A^{q+1}+A^q$について具体的に調べる。

$q=0\quad(2E-A^7-A)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

$q=1\quad(E-A^7-A^2+A)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$

$q=2\quad(E-A^7-A^3+A^2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$q=3\quad(E-A^7-A^4+A^3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$q=4\quad(E-A^7-A^5+A^4)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$q=5\quad(E-A^7-A^6+A^5)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$

$q=6\quad(E-A^7-A^7+A^6)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$

$q=7\quad(E-A^7-A^8+A^7)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

原点Oから$\mathrm{P_n}$までの距離$\mathrm{OP_n}$は$\sqrt{{x_n}^2+{y_n}^2}$だから，${x_q}^2+{y_q}^2$が最大となるのは上記を視察して，$q=3$または6のときである。

$q=3$では$(\mathrm{OP_3})^2=\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2({x_3}^2+{y_3}^2)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2(8+4\sqrt{2})$,

$q=6$では$(\mathrm{OP_6})^2=\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2({x_6}^2+{y_6}^2)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2(6+4\sqrt{2})$

したがって，$\mathrm{OP_n}$が最大となるのは$q=3$のとき，

すなわち$n=8p+3$　$(p=1,2,3,\cdots)$　（答）

$\boxed{6}$　半径１の円を底面とする高さ$\frac{1}{\sqrt{2}}$の直円柱がある。底面の円の中心をOとし，直径を一つ取りABとおく。ABを含み底面と45°の角度をなす平面でこの直円柱を2つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分をVとする。

(1)　直径ABと直交し，Oとの距離がt $(0\leqq t\leqq 1)$であるような平面でVを切ったときの断面積$S(t)$を求めよ。

(2)　Vの断面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

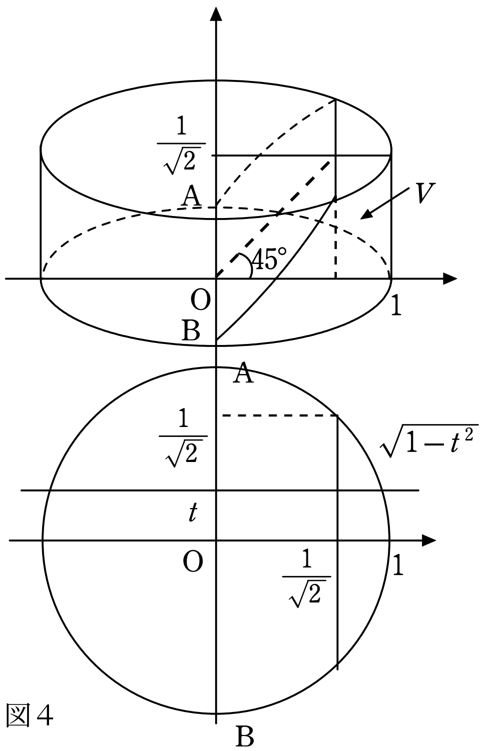

図４

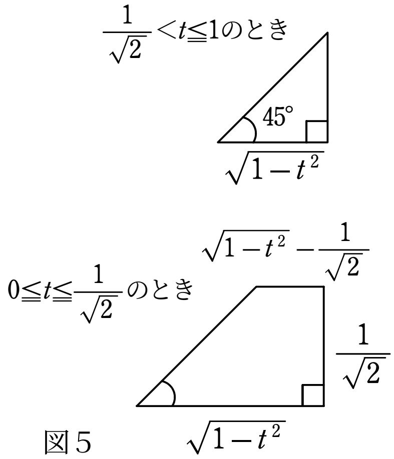

図５

図４に円柱の底面の直径ABを含み45°をなす平面で切った図と上方から見た図を示す。また図５に問題文のようにVを平面で切った場合の断面図を示す。断面の形状はtが小さい場合には台形，大きくなると，直角2等辺三角形になる。

(ｉ) $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき：断面は台形

下底の長さは$\sqrt{1-t^2}$，上底は$\sqrt{1-t^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，高さ$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$だから，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\quad（答）$$

(ⅱ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<t\leqq 1$のとき：断面は直角2等辺三角形，直角をはさむ辺の長さは$\sqrt{1-t^2}$

$$S(t)=\frac{1}{2}(1-t^2)\quad（答）$$

(2)

体積は，$0\leqq t\leqq 1$の範囲で求める体積の2倍だから，

$$V\text{の体積}=2\int_0^1 S(t)dt=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{1-t^2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(1-t^2)dt$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1(1-t^2)dt$$

$$=\sqrt{2}\left[\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\Big[t\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{2}}=\frac{8-5\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8} \quad \text{（答）}$$

＜解説＞

立体図形の体積を求める問題。頭の中で与えられた図形の構造を描き，紙面に問題解決に役立つような絵を描くことが解答する上で欠かせない。

すると，Vの断面は簡単な図形になることが分かる。断面積$S(t)$，厚さdtの物体の体積は$S(t)dt$だから，体積は$S(t)$を$0 \leqq t \leqq 1$の範囲で積分すれば良い。

不定積分$\int\sqrt{1-t^2}\,dt$の求め方は教科書に掲載されている。常套的な方法だから，頭に入れておく。

$t=\sin\theta$とおくと，$\sqrt{1-t^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$，$\dfrac{dt}{d\theta}=\cos\theta$

$$\int\sqrt{1-t^2}\,dt=\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int(\cos 2\theta+1)d\theta=\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{\theta}{2}$$

＜総評＞

6 問を150 分で解く。全問を一読して，分野や難易を大雑把に把握して，着手すべき問題の順序を決めて取り組みたい。当然ながら，受験者にとって解答方針を考え易く，易から難と思われるものの順に着手する。筆者は１，４，２，５，３，６の順序と考えた。１，４，２は完答したい。５，３，６は部分点は確保したい。

$\boxed{1}$

3 次方程式，2 次方程式の問題。題意は簡明であり，解答方針も考え易い。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$

立体図形の問題である。立体図形には腰が引けてしまう受験者もいるだろう。脳内に図形のイメージを構成することは，人によって得手不得手がずいぶん異なるものである。筆者は不得手で，このような問題には苦労する。しかし理系を志す人には，立体図形を描くことは必ず役に立つことがあるので，できるだけトライしてみてほしい。なぜなら，理系の仕事はモノを扱う場合が多く、モノは立体だから。

とはいえ，この問題の立体は単純なものである。できるだけ正確に問題図を描いてみよう。その上で，長さ1，直角，60°などの主要数値を頭に入れよう。難易度Ｂ。

$\boxed{3}$

確率の問題だが，去年に比べ明らかに易化している。確率の問題は，解答の方針を考案することに時間がかかる。しかし本問題では容易である。場合の数を数える問題に帰着するのだが，場合の数を決める条件を的確に表現することがポイントである。ここでは，条件を満足する整数の組を数える。難易度Ｂ。

$\boxed{4}$

　三角関数や指数関数を含む積分の問題だが，特段に難しい積分を要求するものではない。変数の範囲を考慮し、式を凝視すれば，扱い易い問題であることが分かるであろう。難易度Ｂ－。

$\boxed{5}$

　行列の問題。与えられた行列が回転移動の変換であることに気づくことが必要だ。気づかなくても考察を進めることはできるが，回転移動と考えれば，思考はずいぶん楽になる。

　(1)では，単純に行列計算するよりも，回転移動を4 回繰り返すと考えると良い。(2)は数学的帰納法によれば良い。難易度Ｃ。(2)では，(1)は誘導と考えてしまうと，つまづく。数学的帰納法と行列の積の分配の法則を使う。等比数列の和を求める方法による別解を示したが，行列の積では交換の法則が一般的には成立しないので，完全な証明にはならなかった。出題者はどのようにして，③式を導いたのか興味がある。もう少し考えてみたい。難易度Ｂ。

　(3)では具体的に計算しないと最大を与えるn が分からない。$A^8=E$だから，③式によって，$n=8$ごとに$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$は同じ値を繰り返すことが分かる。したがって，$n=8p+q$　（$p=0$，１，２，３，・・・；$q=0$，１，２，３，４，５，６，７）とおいて，いずれのqが最大を与えるかを求める問題と考えることがポイントである。

　いろいろな解法がありそうなので，方針を立てることが大事だ。どの方法でも少々煩瑣になるのはやむをえない。試験という時間が切迫する環境下での粘り強さや根気が問われる。難易度Ａ－。全体として難易度はＡ－。

$\boxed{6}$

　立体図形の積分の問題。立体は苦手という受験者も多いだろうが，複雑な図形ではないし，計算も難しいものではないので，落ち着いて取り組んでほしい。√を含む不定積分については，常套的方法を理解しておく。難易度Ｂ。

131210

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

$\boxed{1}$　aを実数とする。以下の問いに答よ。

(1)　2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$が，$-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に2 つの異なる実数解をもつようなaの値の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，放物線$y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点のy 座標が取りうる値の範囲を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$x^2-2(a+1)x+3a=\{x-(a+1)\}^2-(a+1)^2+3a=\{x-(a+1)\}^2-(a^2-a+1)=0$$

$\{x-(a+1)\}^2=(a^2-a+1)=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，したがって2 つの異なる実数解が存在する。

$-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に2 つの異なる実数解が存在するためには，$f(x)=x^2-2(a+1)x+3a$とおいて，

図１に示すように，

$-1<a+1<3$　①，$0 \leqq f(-1)=5a+3$　②，$0 \leqq f(3)=3-3a$　③，が必要となる。

①から$-2<a<2$，②から$-\dfrac{3}{5} \leqq a$，③から$a \leqq 1$，以上によって，　　（答）

(2)

$$y=x^2-2(a+1)x+3a=\{x-(a+1)\}^2-(a^2-a+1)\quad ①$$

したがって，放物線の頂点のy座標は，$q(a)=-a^2+a-1=-\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}$

$a=\dfrac{1}{2}$は$-\dfrac{3}{5} \leqq a \leqq 1$だから，図２に示すように，最大値は$q\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$

最小値は$q\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{49}{25}$，したがって，$-\dfrac{49}{25} \leqq$放物線①の頂点の$y$座標$\leqq -\dfrac{3}{4}$　（答）

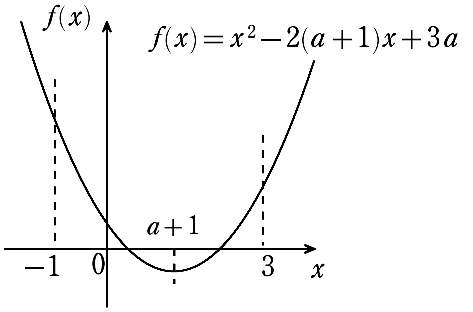

図１

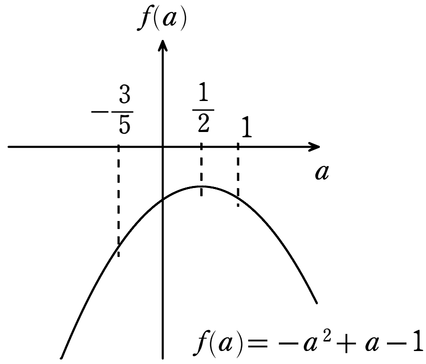

図２

<解説>

2次関数の値の範囲に関する問題である。

(1)では，2次関数の常套的な式の変形により，実数解の存在が明らかである。その実数解が特定の範囲に存在するための条件は，図１を描いてみれば理解できる。

(2)では，放物線の頂点のy座標はaの2次関数となる。2次関数の値の範囲を求める問題。図２を描いて最大値、最小値を与えるaから求める。

$\boxed{2}$　理系の問題$\boxed{2}$と同じである。上記を参照のこと。

$\boxed{3}$　A，Bの2人が，サイコロを1回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に6以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。Aから投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1)　Bがちょうど1回投げてBが勝ちとなる確率を求めよ。

(2)　Bがちょうど2回投げてBが勝ちとなる確率を求めよ。

(3)　Bがちょうど2回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

（理系の問題$\boxed{3}$と同じ問題設定である。理系の解答と解説を参照のこと）

<解答>

(1)

A，Bが投げたn回めのサイコロの目をそれぞれa_n，b_nとする。$1 \leqq a_n$，$b_n \leqq 6$である。

Aが1回投げてAが勝ちとならない場合の数は，$a_1 \leqq 5$だから，5通りである。

その後，Bが投げてBが勝ちとなるのは，$b_1=6$だから，1通りである。

A，Bが1回ずつ投げて出る目の場合の数は6×6通りだから，Bが1回投げてBが勝ちとなる確率は，

$\dfrac{5 \times 1}{6 \times 6}=\dfrac{5}{36}$　（答）

(2)　理系の問題(2)に同じなので，そちらを参照のこと。

(3)

Aが2回投げても勝ちとならない場合は，$a_1+a_2 \leqq 5$

$a_1=1$に対し，$a_2=1$，2，3，4であり，4通り。

$a_1=2$に対し，$a_2=1$，2，3 であり，3通り。

$a_1=3$に対し，$a_2=1$，2であり，2通り。

$a_1=4$に対し，$a_2=1$であり，1通り。

したがって，$a_1+a_2 \leqq 5$となるのは，これらを足して，10通り。

同様に，Bが2回投げても勝ちとならない場合は，$b_1+b_2 \leqq 5$で，10通り。

したがって，Bがちょうど2回投げて，ゲームが終了していない場合の数は$10 \times 10=100$通り。

Aが2回，Bが2回投げて出るサイコロの目の場合の数は$6 \times 6 \times 6 \times 6=6^4$通り。

Bがちょうど2回投げて，ゲームが終了していない確率は$\dfrac{100}{6^4}=\dfrac{25}{324}$　（答）

<解説>

理系の問題$\boxed{3}$と同じ問題設定なので，そちらの解説を参照のこと。

$\boxed{4}$　tは$0 \leqq t \leqq 1$を満たす実数とする。放物線$y=x^2$，直線$x=1$，およびx軸とで囲まれた図形をA，放物線$y=4(x-t)^2$と直線$y=1$とで囲まれた図形をBとする。AとBの共通部分の面積を$S(t)$とする。

(1)　$S(t)$を求めよ。

(2)　$0 \leqq t \leqq 1$における$S(t)$の最大値を求めよ。

<解答>

(1)

$y=x^2$　①

$y=4(x-t)^2$　②

①，②の交点の座標は，$\left(\dfrac{2t}{3}, \dfrac{4t^2}{9}\right)$，$(2t, 4t^2)$，したがって両放物線は図３のようになる。

（ⅰ）$2t \leqq 1$，すなわち$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$のとき

$$S(t)=\int_{\frac{2t}{3}}^{2t}\{x^2-4(x-t)^2\}dx=\Big[-x^3+4tx^2-4t^2x\Big]_{\frac{2t}{3}}^{2t}=\frac{32t^3}{27} \quad \text{（答）}$$

（ⅱ）$\dfrac{1}{2}<t \leqq 1$のとき

$$S(t)=\int_{\frac{2t}{3}}^{1}\{x^2-4(x-t)^2\}dx=\Big[-x^3+4tx^2-4t^2x\Big]_{\frac{2t}{3}}^{1}=\frac{32t^3}{27}-4t^2+4t-1 \quad \text{（答）}$$

⑵

（ⅰ）$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$のとき

$t=\dfrac{1}{2}$のとき最大値$S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{27}$をとる。

（ⅱ）$\dfrac{1}{2}<t \leqq 1$のとき

$S'(t)=\dfrac{32t^2}{9}-8t+4=\dfrac{32}{9}\left(t^2-\dfrac{9t}{4}+\dfrac{9}{8}\right)$，$S'(t)=0$とすれば，$t=\dfrac{9}{8}\pm\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{11}{8}$

図４のように，$t=\dfrac{3}{4}$で最大値$S\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

以上によって，$S(t)$の最大値は$\dfrac{1}{4}$　（答）

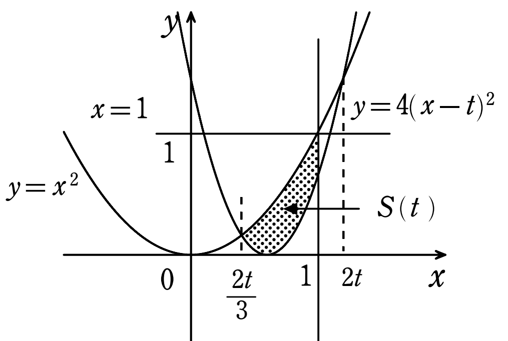

図３

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗		↘	

図４

＜解説＞

2次関数の積分の問題。題意は簡明だから図を描いて，場合分けを理解していねいに計算する。

⑴

図を描いて考える。簡単な放物線だから容易だろう。すると，両放物線の交点がどこにあるかで，場合分けしなくてはならないことに気づく。交点の座標も$x^2=4(x-t)^2$として容易に求まる。

(2)

$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$のとき，$S(t)$は単調増加関数だから，$t=\frac{1}{2}$で最大値をとることは明らか。

だから，$\frac{1}{2}<t \leqq 1$のみで最大値を考えれば良い。

<総評>

４問を100分で解く。例年より易化したと思う。難易度や解答方針の考慮の程度からみて，１，４，３，２の順に手をつけたい。１，４は完答し，３，２は6 割以上の部分点を獲得したい。

$\boxed{1}$

2次方程式の解に関する問題。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

理系と同じ問題。立体図形をベクトルによって扱う問題。ベクトルの内積や合成について理解していなければならない。文系問題としては，やや難しいか。難易度はＢ＋。

$\boxed{3}$

理系とほぼ同様の確率の問題だが，例年よりも易化したので，文系には手ごろなレベルだろう。難易度はＢ。

$\boxed{4}$

2次関数が作る図形の面積を積分によって求める問題。難易度Ｂ。

131212