2013（H25）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

$\boxed{1}$（60点）

(1)　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の2 つの解 α，β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数n について5の整数倍になることを示せ．

(2)　6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ．

＜解答＞

(1)

2 次方程式の解と係数の関係により，$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=5$である。

$k=1$のとき，$\alpha^k+\beta^k-3^k$は，$\alpha+\beta-3=3-3=0=5\times0$，したがって5 の整数倍である。

$k=n-1$のとき，$\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}-3^{n-1}$ は5の整数倍とする。

$k=n$のとき，
$$\begin{aligned}\alpha^n+\beta^n-3^n&=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})-3^n\\&=3(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-3^n-5(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})\\&=3\{(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-3^{n-1}\}-5(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})\end{aligned}$$

したがって，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ は5 の整数倍である。

以上によって，$\alpha^k+\beta^k-3^k$は，$k=1$において5 の整数倍になり，$k=n-1$において5 の整数倍であれば，$k=n$ において5の整数倍である。したがって数学的帰納法により，すべての正の整数n において，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ は5 の整数倍である。

(2)

6 個のさいころを投げて，6 種の目のうち4 種のみからなる6 個の目を出す場合の数

＝（①1 種の目が3 個、他の3 種の目はそれぞれ1 個出る場合の数）

＋（②2 種の目がそれぞれ2 個，他の2 種の目はそれぞれ1 個出る場合の数）

①1 種の目が3 個，他の3 種の目はそれぞれ1 個出る場合の数

＝（6 種の目から1 種の目が出る場合の数）×（残る5 種の目から3 種の目が出る場合の数）

×（6 個のうち3 個のさいころが異なる目を出す場合の数）$={}_6C_1\times{}_5C_3\times{}_6C_3\times3!=7200$通り

②2 種の目がそれぞれ2 個，他の2 種の目はそれぞれ1 個出る場合の数

＝（6 種の目から2 種の目が出る場合の数）×（残る4 種の目から2 種の目が出る場合の数）

×（6 個のうち2 個のさいころが異なる目を出す場合の数）

×（2 種の目それぞれ2 個を並べる場合の数）

$={}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_6C_2\times2!\times(2\times3)=16200$通り

6 個のさいころを投げて，6 種の目のうち4 種のみからなる6 個の目を出す場合の確率

＝（6 個のさいころを投げて，6 種の目のうち4 種のみからなる6 個の目を出す場合の数）

÷（6個のさいころを投げて出る目の組合せの総数）

$=(7200+16200)\div6^6=\dfrac{325}{648}$　（答）

＜解説＞

(1)

すべての正の整数nについて成立する命題の証明問題だから，数学的帰納法を用いることは容易に気づくだろう。その過程で2次方程式の解と係数の関係を利用する。

(2)

ある事象が発生する確率＝（事象を発生させる場合の数）÷（生起するすべての場合の数）
ただし，ここでは場合は同じ頻度で発生することが暗黙の前提である。
確率を求めるためには，事象を理解して，事象を発生させる場合の条件を明らかにすることが必要である。ところが，与えられた事象を発生させる場合の条件を明らかにすることが難しい問題が多い（難しいから問題にするわけである）。そこで，事象を発生させる場合の条件を言い換えて，場合の数を求めやすくすることが必要である。この言い換えが上手にできるかどうかが，確率問題の取扱の成否を左右するといっても過言ではない。言い換えは文言による表現であり，数学に国語力が必要となるゆえんである。

ここでは，求める場合の数を①と②に分けて考えることがポイントである。①で（6 個のうち3 個のさいころが異なる目を出す場合の数）とは，1 種3 個の目と3 種それぞれ1個の目を出すさいころの組合せの場合の数である。

例えば図１のように，5 の目が3 個と1，２，３の目がそれぞれ1個ずつの場合の組合せの数である。1，２，3の目のさいころを決めてしまえば，5 の目のさいころは決まる。1，２，３の目のさいころの組合せは${}_6C_3$である。また1，２，３の並べ方は3!通り。したがって，（6 個のうち3 個のさいころが異なる目を出す場合の数）$={}_6C_3\times 3!$となる。

$\boxed{5}\quad\boxed{1}\quad\boxed{5}\quad\boxed{2}\quad\boxed{5}\quad\boxed{3}$

図１

$\boxed{2}$　（60点）

2 次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対して，$\Delta(A)=ad-bc$，$t(A)=a+d$と定める．

(1)　2 次の正方行列A，Bに対して，$\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$が成り立つことを示せ．

(2)　Aの成分がすべて実数で，$A^5=E$が成り立つとき，$x=\Delta(A)$と$y=t(A)$の値を求めよ．
ただし，Eは2次の単位行列とする．

＜解答＞

(1)

$B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$とする．$AB=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$

$\Delta(AB)=(aa'+bc')(cb'+dd')-(ab'+bd')(ca'+dc')=(ada'd'+bcb'c')-(adb'c'+bca'd')$

$\Delta(A)\Delta(B)=(ad-bc)(a'd'-b'c')=(ada'd'+bcb'c')-(adb'c'+bca'd')$

したがって，$\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$

(2)

(1)の結果を利用して，$\Delta(A^5)=\Delta(A)\Delta(A^4)=\cdots=\{\Delta(A)\}^5=(ad-bc)^5$，一方$\Delta(A^5)=\Delta(E)=1$

したがって，$\{\Delta(A)\}^5=(ad-bc)^5=1$，$x=\Delta(A)=ad-bc=1$　（答）

$A^5=E$から，$(A-E)(A^4+A^3+A^2+A+E)=0$

したがって，$A=E$，または$A^4+A^3+A^2+A+E=0$　①

ⅰ) $A=E$のとき，$y=a+d=1+1=2$

ⅱ) $A^4+A^3+A^2+A+E=0$のとき，

ハミルトン・ケーリーの定理によれば，$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=A^2-yA+E=0$　②

②にA^{-1}を乗じると，$yE=A+A^{-1}$

①にA^{-2}を乗じると，$A^2+A+A^{-2}+A^{-1}+E=(A^2+A^{-2})+(A+A^{-1})+E$

$$=(A+A^{-1})^2-2E+yE+E=y^2E^2+yE-E=0$$

したがって，$y^2+y-1=0$，したがって，$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

以上をまとめると，$y=2$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　（答）

<解説>

(1)

ていねいに計算すれば良い。

(2)

xを求めるために(1)の結果を利用するのは，容易に気づくであろう。

yを求めるためには着想が必要である。まずは，$A^5=E$から，$(A-E)(A^4+A^3+A^2+A+E)=0$ を導こう。次に，$x=\Delta(A)=ad-bc$と$y=t(A)=a+d$から，ハミルトン・ケーリーの定理を利用することを思いつこう。そして，①と②からyを求めることを考える。上手に式の変形をする。②式から $yE=A+A^{-1}$に気づくと速い。

別解を紹介しよう。

一般に，$A=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$とおくことができる。ただし$r$は正の実数。

$$A^5=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=r^5\begin{pmatrix}\cos5\theta & -\sin5\theta\\ \sin5\theta & \cos5\theta\end{pmatrix}$$

したがって，$r^5\sin5\theta=0$，$r^5\cos5\theta=1$，したがって，$\sin5\theta=0$，$\cos5\theta=1$，$r=1$

したがって，$5\theta=2k\pi$，ただしkは整数

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2k\pi}{5} & -\sin\dfrac{2k\pi}{5}\\ \sin\dfrac{2k\pi}{5} & \cos\dfrac{2k\pi}{5}\end{pmatrix}$$

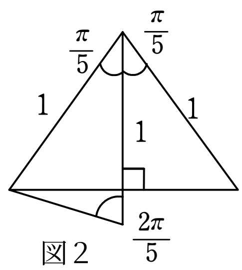

図２

$x=\Delta(A)=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1$　（答）

$y=t(A)=2\cos\dfrac{2k\pi}{5}$，したがって，$k=0$，1，2 に応じて，

$y=2$, $2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $2\cos\dfrac{4\pi}{5}$

$p=\cos\dfrac{\pi}{5}$ とおく。図２より，$2\cos\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}=\sin\dfrac{\pi}{5}$ ，$4\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}=1$

$4p(2p^2-1)=1$，$(2p+1)(4p^2-2p-1)=0$，$p>0$だから，$4p^2-2p-1=0$から，$p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\cos\dfrac{2\pi}{5}=2p^2-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos\dfrac{4\pi}{5}=2\cos^2\dfrac{2\pi}{5}-1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

したがって，$y=2$, $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 　（答）

$A^5=E$ということから，5回の回転変換によって元へ戻るような変換ということに気づくと，行列は一般に$A=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$とおけることを思い出す。$r>0$は座標の原点からの距離の伸縮を表し，$\theta$は原点を中心とする回転角を表す。

なお$y=2\cos\dfrac{2k\pi}{5}$で，$k=3$では$\cos\dfrac{2k\pi}{5}=\cos\dfrac{6\pi}{5}=\cos\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\pi=\cos\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\pi=\cos\dfrac{4\pi}{5}$,

$k=4$では$\cos\dfrac{2k\pi}{5}=\cos\dfrac{8\pi}{5}=\cos\left(1+\dfrac{3}{5}\right)\pi=\cos\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\pi=\cos\dfrac{2\pi}{5}$ となるから，

$k=0$，1，2 として良い。

$y=2$, $2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $2\cos\dfrac{4\pi}{5}$ を答として満点なのか分からないので，具体的な値を求めた。

$\boxed{3}$ （60点）

kを定数とするとき，方程式$e^x-x^e=k$の異なる正の解の個数を求めよ.

＜解答＞

$f(x)=e^x-x^e$として，$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=0$となるのは，$x=1$，e

したがって，$f(x)$は図３のような変化をし，図４のようなグラフとなる。

方程式$e^x-x^e=k$の異なる正の解の個数は，曲線$f(x)=e^x-x^e$と直線$f(x)=k$の交点の個数である。

したがって，kの値に応じて，$f(x)=e^x-x^e=k$の異なる正の解の個数は以下の通りである。

$k<0$のとき，0個

$k=0$のとき，1個

$0<k\leqq 1$のとき，2個

$1<k<e-1$のとき，3個

$k=e-1$のとき，2個

$e-1<k$のとき，1個　　　（答）

x	0		1		e		∞
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

図３

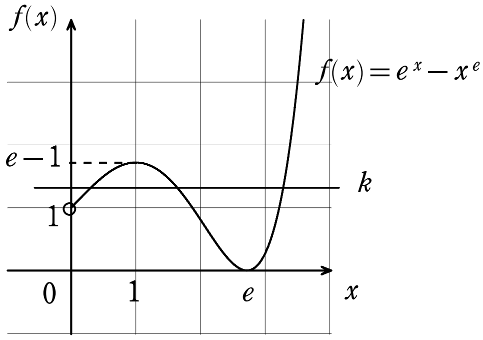

図４

＜解説＞

方程式$e^x-x^e=k$の異なる正の解の個数は，曲線$f(x)=e^x-x^e$と直線$f(x)=k$の交点の個数であると考えて，グラフを描いてみようと思い立つ。ところが，$f(x)=e^x-x^e$のグラフがどうなるか，直感的には分からない。そこで，グラフの形を理解するために，$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=0$となるxを求める。

ところが，$e^x-ex^{e-1}=0$の解を求めることも意外に難しい。$e^{x-1}=x^{e-1}$として，直感的に$x=1$，eが解とするのも良いが，解が２つかどうかわからない。筆者は以下のような方法をとった。

$e^x=ex^{e-1}$として，両辺の対数をとる。$x=1+(e-1)\log x$，$x-1=(e-1)\log x$

図５のように$y_1=x-1$と$y_2=(e-1)\log x$のグラフは描きやすい。$x=1$で交わることは容易に分かる。$y_2'=\dfrac{e-1}{x}$だから，$y_2=(e-1)\log x$の傾きは次第に減少するので，もう一つ交点がある。$x=e$に目星をつけて代入してみると，確かに$y_1=y_2=e-1$となる。したがって$e^x-ex^{e-1}=0$の解は$x=1$，eである。

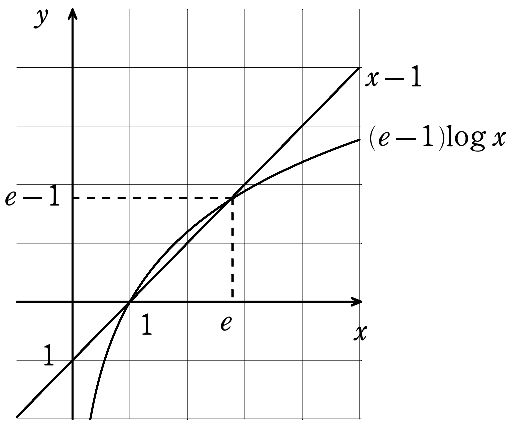

図５

別解を紹介しよう。

$t=e^x$とおく。すると$x=\log t$，$t>1$，$x>0$である。

$e^x-x^e-k=t-(\log t)^e-k=0$の解の個数は，直線$y=t-k$と曲線$y=(\log t)^e$の交点の数である。

曲線$y=(\log t)^e$の傾きは，$y'=\dfrac{1}{t}e(\log t)^{e-1}=\dfrac{ex^{e-1}}{e^x}=\dfrac{ex^e}{xe^x}$

$y'=1$の解は，$x=1$，e である。$x=1$ならば$t=e$，$x=e$ならば$t=e^e$ である。

$y=t-k$ が$y=(\log t)^e$と点$(e^e,\ e^e)$で接するのは$k=0$のとき。

また，$y=t-k$が$y=(\log t)^e$と点$(e,\ 1)$で接するのは$k=e-1$のとき。

以上によって，図６のように，直線$y=t-k$と曲線$y=(\log t)^e$の交点の個数は

$k<0$のとき，0個，$k=0$のとき1個，$0<k\leqq 1$のとき2個，$1<k<e-1$のとき3個

$k=e-1$のとき2個，$e-1<k$のとき，1個

この方法の利点は，直線$y=t-k$と曲線$y=(\log t)^e$のグラフとも描きやすいことである。
$y'=1$の解，すなわち$x=1$，eを求めることは，上記の解答と同じである。

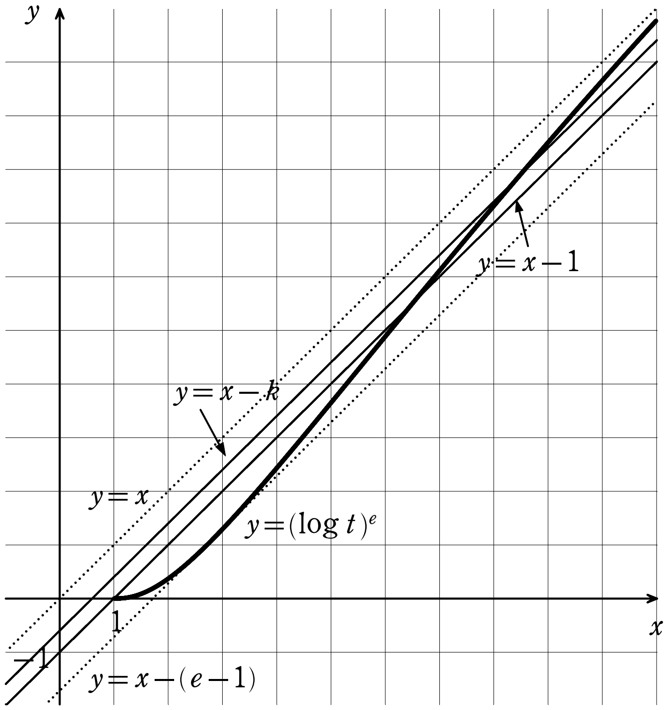

図６

$\boxed{4}$（60点）

正の整数nに対し，$0\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲において$\sin 4nx \geqq \sin x$を満たす$x$の区間の長さの総和を$S_n$とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$を求めよ.

<解答>

図７に$\sin 4nx$と$\sin x$のグラフを示す。$\sin 4nx$と$\sin x$の交点のx座標からS_nを求めればよい。

$\sin 4nx$と$\sin x$の交点のx座標は$\sin 4nx-\sin x=0$の解だから,

$$\begin{aligned}\sin 4nx-\sin x&=\sin\left(\frac{4nx+x}{2}+\frac{4nx-x}{2}\right)-\sin\left(\frac{4nx+x}{2}-\frac{4nx-x}{2}\right)\\&=\sin\frac{4nx+x}{2}\cos\frac{4nx-x}{2}+\sin\frac{4nx-x}{2}\cos\frac{4nx+x}{2}\\&\quad-\sin\frac{4nx+x}{2}\cos\frac{4nx-x}{2}+\sin\frac{4nx-x}{2}\cos\frac{4nx+x}{2}\\&=2\sin\frac{4nx-x}{2}\cos\frac{4nx+x}{2}=0\end{aligned}$$

$\sin\dfrac{4nx-x}{2}=0$から$\dfrac{4nx-x}{2}=k\pi$，したがって$x=\dfrac{2k\pi}{4n-1}$，$k=0$，1，2，．．．．，$n-1$

ただし，$x=\dfrac{2k\pi}{4n-1}\leqq\dfrac{\pi}{2}$だから，$k\leqq n-1$

$\cos\dfrac{4nx+x}{2}=0$から$\dfrac{4nx+x}{2}=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，したがって$x=\dfrac{2k+1}{4n+1}\pi$，$k=0$，1，2，．．．．，$n-1$

ただし，$x=\dfrac{2k+1}{4n+1}\pi\leqq\dfrac{\pi}{2}$だから，$k\leqq n-1$

$\dfrac{2k\pi}{4n-1}<\dfrac{2k+1}{4n+1}\pi<\dfrac{2(k+1)\pi}{4n-1}$なので，$\sin 4nx$と$\sin x$の交点は，

0，$\dfrac{\pi}{4n+1}$，$\dfrac{2\pi}{4n-1}$，$\dfrac{3\pi}{4n+1}$，$\dfrac{4\pi}{4n-1}$，．．．．，$\dfrac{2n-2}{4n-1}\pi$，$\dfrac{2n-1}{4n+1}\pi$

したがって，$\sin 4nx\geqq\sin x$を満たすxの区間$l_k=\dfrac{2k+1}{4n+1}\pi-\dfrac{2k\pi}{4n-1}=\dfrac{4n-4k-1}{16n^2-1}\pi$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}l_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{4n-4k-1}{16n^2-1}\pi=\frac{\pi}{16n^2-1}\sum_{k=0}^{n-1}(4n-4k-1)=\frac{2n^2+n}{16n^2-1}\pi=\frac{2+\frac{1}{n}}{16-\left(\frac{1}{n}\right)^2}\pi$$

したがって，$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\pi}{8}$　（答）

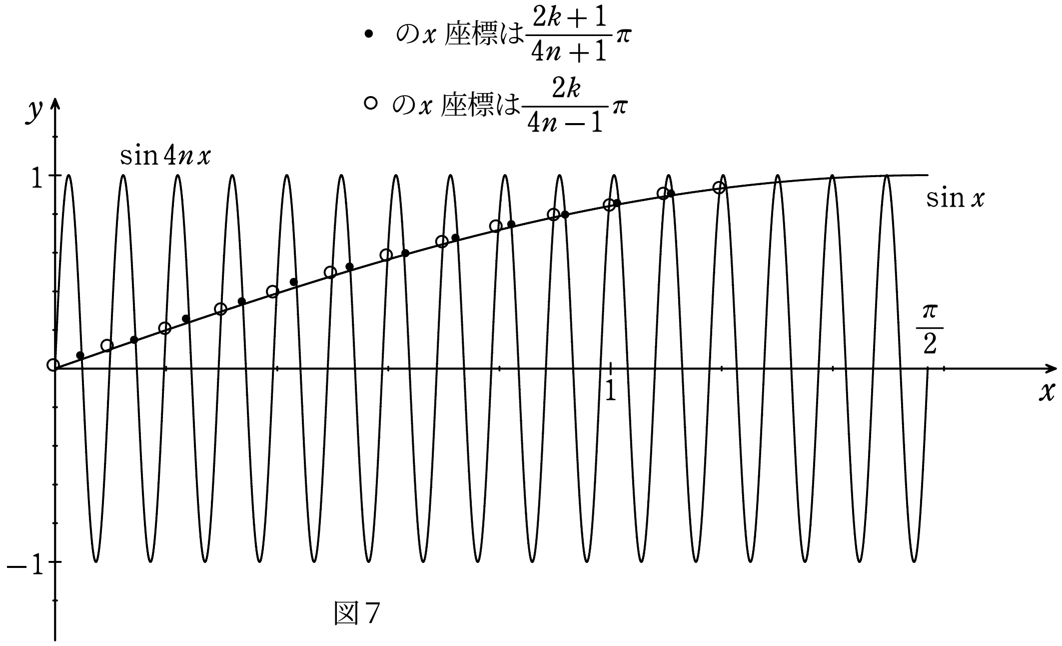

図７

＜解説＞

まずはグラフを描いて，問題のポイントを把握しよう。難しいグラフではないのだが，nを具体的に定めて描く必要がある。図７では$n=16$としている。すると，$\sin 4nx$と$\sin x$の交点のx座標からS_nを求めることができることがわかる。

$\sin 4nx-\sin x=0$の解を求めるのだが，三角関数の差を積に変換する公式によって，解を求めることが第一のポイントである。次に，解の一般解を求めることが必要である。その上で，解の並びについて調べることが第二のポイントである。これによって，$\sin 4nx\geqq\sin x$を満たすxの区間の長さを一

般的に表現することができる。あまり難しく考えないで，素直に考えることが大事である。

$\boxed{5}$ (60点)

a，bを正の実数とし，円C_1：$(x-a)^2+y^2=a^2$と楕円C_2：$x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$を考える．

(1)　C_1がC_2に内接するためのa，bの条件を求めよ．

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$とし，C_1がC_2に内接しているとする．このとき，第１象限におけるC_1とC_2の接点の座標$(p\ ,\ q)$を求めよ．

(3)　(2)の条件のもとで，$x \geqq p$の範囲において，C_1とC_2で囲まれた部分の面積を求めよ．

＜解答＞

$(x-a)^2+y^2=a^2$　①，$x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　②

(1)

C_1がC_2に内接する場合は２つある。図８(a)と(b)である。

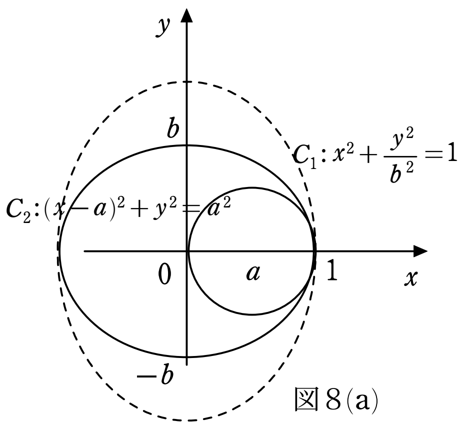

図８(a)

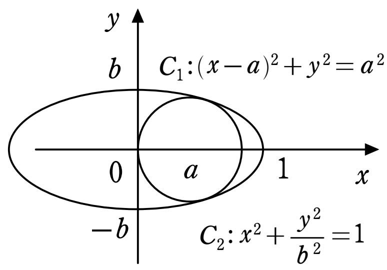

図８(b)

（ｉ）　図８(a)の場合

点(1，0)において内接する。したがって$2a=1$だから，円C_1は$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$　③

②，③から，$(1-b^2)x^2-x+b^2=0$　④，したがって，$(x-1)\{(1-b^2)x-b^2\}=0$

C_1がC_2に点(1，0)において内接するということは，④が$x=1$以外の解をもたないということ。

$1-b^2=0$のとき，解は$x=1$のみ，したがって$b=1$

$1-b^2 \fallingdotseq 0$のとき，$x=\dfrac{b^2}{1-b^2}$が解となる。この解が$0 \leqq x < 1$でなければよい。すなわち，

$\dfrac{b^2}{1-b^2}<0$または$\dfrac{b^2}{1-b^2} \geqq 1$，$\dfrac{b^2}{1-b^2}<0$から$b^2>1$，$\therefore\ b>1$

$\dfrac{b^2}{1-b^2} \geqq 1$から$b^2 \geqq \dfrac{1}{2}$，$\therefore\ b \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，したがって $b \geqq 1$または $b \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$だから，$b \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ⅱ)　図８(b)の場合

②から，$y^2 = b^2 - b^2x^2$，①に代入して整理し，$(1-b^2)x^2 - 2ax + b^2 = 0$　⑤

$b^2 = 1$は，(ⅰ)に含まれるから，$b^2 \neq 1$とする。

⑤を変形して，$\left(x - \dfrac{a}{1-b^2}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{1-b^2}\right)^2 - \dfrac{b^2}{1-b^2}$

⑤が重解をもつ条件は$\left(\dfrac{a}{1-b^2}\right)^2 - \dfrac{b^2}{1-b^2} = 0$により，$b < 1$，$a = b\sqrt{1-b^2}$

また解に対して，$0 < \dfrac{a}{1-b^2} < 1$だから，$b^2 < 1$，$0 < \dfrac{b}{\sqrt{1-b^2}} < 1$

したがって，$0 < b < \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

以上，(ⅰ)，(ⅱ)をまとめると，

$a = \dfrac{1}{2}$，$b \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（答）

$a = b\sqrt{1-b^2}$，$0 < b < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（答）

(2)

$b = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$だから，上記の(ⅱ)の場合である。

④に$a = b\sqrt{1-b^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$を代入すると，$x^2 - \sqrt{2}\,x + \dfrac{1}{2} = 0$，$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y^2 = b^2 - b^2x^2 = \dfrac{1}{6}$，$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，したがって第１象限における$C_1$と$C_2$の接点の座標$(p,\ q)$は

$(p,\ q) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$　（答）

(3)

①を変形して，$y = \pm\sqrt{a^2 - (x-a)^2}$，②を変形して，$y = \pm\sqrt{b^2 - b^2x^2}$

図９(a)を参照すると求める面積は，

$$S = 2\int_p^{2a}\left(\sqrt{b^2 - b^2x^2} - \sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)dx + 2\int_{2a}^{1}\sqrt{b^2-b^2x^2}\,dx$$

$$= 2b\int_p^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - 2\int_p^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx$$

第一項の積分は，$\displaystyle\int_p^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\Big[\sin 2\theta + 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

ただし上記積分では，$x = \sin\theta$とおき，$x = p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき$\theta = \dfrac{\pi}{4}$，$x = 1$のとき$\theta = \dfrac{\pi}{2}$である。

第二項の積分，$\int_p^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\sqrt{\frac{2}{9}-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}\,dx$ は

図９(b)の打点部の面積だから，$\frac{1}{6}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{6}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{\pi}{27}-\frac{\sqrt{3}}{36}$

以上によって，$S=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\frac{2\pi}{27}+\frac{\sqrt{3}}{18}=\left(\frac{\sqrt{3}}{12}-\frac{2}{27}\right)\pi-\frac{\sqrt{3}}{9}$　（答）

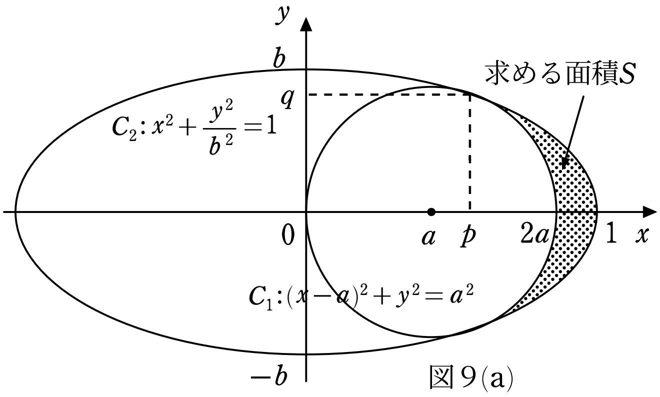

図９(a)

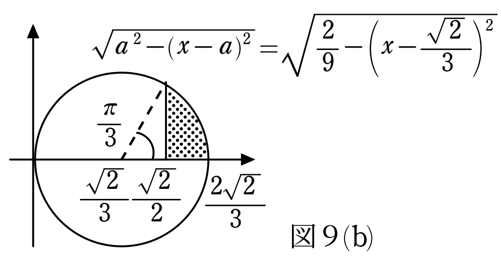

図９(b)

＜解説＞

円，楕円の方程式と積分の問題。解法に特段の着想を必要とするものではないが，ていねいな取扱いを必要とする。

(1)

内接する場合として図８(a)，(b)の二つに分けて考えるのが分かり易い。(a)は(b)の特殊な場合であるが，$2a=1$とおかないと，得られない。

(ｉ)でC_1がC_2に点(1，0)において内接する条件について，別の考え方を紹介する。
円C_1が楕円C_2に内接するためには，接点(1，0)近傍の傾きが円C_1の方が小さいことが必要である。

③をxで微分して，$2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2yy'=0$，$y'=-\frac{x-\frac{1}{2}}{y}$

$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$をxで微分して，$2x+\frac{2yy'}{b^2}=0$，$y'=-\frac{b^2x}{y}$

$b^2x\geqq x-\frac{1}{2}$，$(1-b^2)x\leqq\frac{1}{2}$，$x\leqq1$で成立するためには，$b^2\geqq\frac{1}{2}$，したがって，$a=\frac{1}{2}$，$b\geqq\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)

特に問題はなかろう。

(3)

不定積分$\int\sqrt{t^2-x^2}\,dx$ について，置換積分法により，$\frac{x}{t}=\sin\theta$ とおいて，$dx=(t\cos\theta)d\theta$

$$\int\sqrt{t^2-x^2}\,dx=t\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}\,dx=t^2\int\cos^2\theta\,d\theta=t^2\int\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=\frac{t^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)$$

であることは理解していなければならない。教科書に掲載されている。

＜総評＞

180分，大５問で300点満点である。昨年は大６問だった。昨年から30分，50点増えて，数学の比重が増した。今年は時間，点数は昨年と同じだが，大１問減ったのはなぜだろう。東工大の数学問題を解くには，粘り強い思考と解答への道を切り開く着想，着眼が随所に必要となる。大６問は受験生の負担が大きく，成績が悪かったのかも知れない。

今年の問題も一筋縄ではいかない問題が揃っている。私の場合，１(1)，２，３，１(2)，５，４の順に着手したい。１(1)，２，３は完答し，１(2)，５，４は７割ほどの部分点を獲得したい。

$\boxed{1}$(60点)

２問からなる。(1)は2次方程式の解の性質を理解していること。数学的帰納法を用いることに気づけば，容易だろう。難易度Ｃ

(2)が確率問題であることは去年と同様だ。題意は簡明な確率の問題だが，場合の条件の言い換えを上手にすることが重要だ。限られた時間の中での解答なので，難しい。難易度Ｂ

$\boxed{2}$(60点)

なかなか工夫が凝らされた行列の問題である。(1)は単純に計算すれば良いだけの問題である。(1)の結果を利用すれば，x は容易に求まる。次に$A^5=E$から，$(A-E)(A^4+A^3+A^2+A+E)=0$の因数分解がポイントである。ここは素直に，$A^5=E$からAの表式を求めようとすれば良いわけだ。

次は$A^4+A^3+A^2+A+E=0$からAを求めることだが，ここでハミルトン･ケーリーの定理を利用することが重要だ。この定理を利用する問題が出題される場合が多いので，教科書に出ている問題や過去問を解いて理解を深めよう。難易度Ａ－

$\boxed{3}$(60点)

簡単のようで存外手強い問題である。$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=0$の解，$x=1$，eを求めることがポイントなのだが，簡単ではない。直感に頼ることもやむを得ない。完璧に答えようとすると，時間が不足する。$x=1$，eに対応する極値を求め，$f(x)=e^x-x^e$のグラフを大雑把に描いて，$f(x)=k$との交点の数を考察する。難易度Ａ－

$\boxed{4}$(60点)

簡単なようだが存外手強い問題である。グラフをていねいに描いて問題の趣旨を把握する。難しく考え過ぎることなく，問題を素直に取り扱うことだ。すなわち，$\sin 4nx-\sin x=0$の解を一般的に求めることだ。そして一般解の並びを表現できれば，容易である。難易度Ａ

$\boxed{5}$(60点)

題意は簡明で，解答方針に迷うところはない。ていねいに考察し，ていねいに計算していけば良い。円が楕円に内接する場合について，場合分けするという簡単な着想が必要である。難易度Ｂ＋

140220