第　1　問

関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を ℓ とし，C と ℓ が O 以外に共有点をもつとする。C と ℓ の共有点を O，P，Q とし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合は，O，P，Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。

第　2　問

座標平面上の 3 点

$$\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2}),\quad \mathrm{Q}(0,\sqrt{2}),\quad \mathrm{A}(a,\sqrt{a^2+1})\quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

を考える。

(1)　2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2)　Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和

$$\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$$

は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

第　3　問

a，b を実数の定数とする。実数 x，y が

$$x^2 + y^2 \leqq 25, \quad 2x + y \leqq 5$$

をともに満たすとき，$z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$ の最小値を求めよ。

第　4　問

A，B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A，B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A，B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。