

数学 (理科)

第 1 問

実数 a, b に対して平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

によって定める。このとき、次の条件 (i), (ii) がともに成り立つような (a, b) をすべて求めよ。

(i) $P_0 = P_6$

(ii) $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ は相異なる。

<解答>

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \text{によって}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

座標の1次変換は、原点の周りの回転 θ と原点との距離 $r (>0)$ の増減によって表される。

$$\text{すると、1次変換行列 } A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad A^n = r^n \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n \text{ となる。}$$

しかるに $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n$ は回転 θ を n 回繰り返すことだから、

$$A^n = r^n \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^n = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

$$P_0 = P_6 \text{ だから、} A^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r^6 \begin{pmatrix} \cos 6\theta & -\sin 6\theta \\ \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r^6 \begin{pmatrix} \cos 6\theta \\ \sin 6\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって、 $\sin 6\theta = 0$, $\cos 6\theta = 1$, また $r^6 = 1$ すなわち $r = 1$

したがって、 $6\theta = \pm 2k\pi \quad (k=1, 2, \dots)$,

ところが $k=2$ 以上だと 2π 周期で同じ回転角が発生して、条件 (ii) を満たさない。

$$\text{したがって、} \theta = \pm \frac{\pi}{3}, \quad a = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad b = \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{したがって、} (a, b) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (\text{答})$$

<解説>

題意は簡明であるが、解答の方針を立てるのに少々着想を必要とする。まずは、与えられた式を座標の1次変換として表し、変換行列を求める。

題意を考え、変換行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ を見れば、原点の周りの回転移動を思い出すに違いない。 $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ は相異なり、 $P_0 = P_6$ だから、半径1の円周上を P_1 は 60° ずつ回転する点と推定されよう。

そこで, $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とおくのがポイントである。

別解

$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ によって

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって, } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^6 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}^6 = \sum_{k=0}^6 a^{6-k} b^k {}_6C_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{6-k} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^6 a^{6-k} b^k {}_6C_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$$

$$\text{しかるに, } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^6 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって, } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^6 a^{6-k} b^k {}_6C_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a^5 b {}_6C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - a^4 b^2 {}_6C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - a^3 b^3 {}_6C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a^2 b^4 {}_6C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a b^5 {}_6C_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^6 - a^4 b^2 {}_6C_2 + a^2 b^4 {}_6C_4 - b^6 \\ a^5 b {}_6C_1 - a^3 b^3 {}_6C_3 + a b^5 {}_6C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって, } a^6 - a^4 b^2 {}_6C_2 + a^2 b^4 {}_6C_4 - b^6 = a^6 - 15a^4 b^2 + 15a^2 b^4 - b^6 = 1 \quad \textcircled{3}$$

$$a^5 b {}_6C_1 - a^3 b^3 {}_6C_3 + a b^5 {}_6C_5 = 6a^5 b - 20a^3 b^3 + 6a b^5 = 0 \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{ を整理すると, } ab(3a^4 - 10a^2 b^2 + 3b^4) = ab(3a^2 - b^2)(a^2 - 3b^2) = 0$$

$$\text{したがって, } a=0 \text{ または } b=0 \text{ または } b^2=3a^2 \text{ または } b^2=\frac{1}{3}a^2$$

$a=0$ では, $\textcircled{3}$ から $-b^6=1$ となるので, $a=0$ となることはできない。

$b=0$ では, $\textcircled{3}$ から $a^6=1$, したがって $a=\pm 1$ 。 $a=1$ では $\textcircled{1}$ から $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, 条件(ii)に反する。

$a=-1$ では, $\textcircled{1}$ から $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, 条件(ii)に反する。

だから, $b=0$ となることはできない。

$$b^2=3a^2 \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入すると, } a^6 - 45a^6 + 135a^6 - 27a^6 = 64a^6 = 1, \quad a = \pm \frac{1}{2}, \quad b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{では, } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pm 60^\circ) & -\sin(\pm 60^\circ) \\ \sin(\pm 60^\circ) & \cos(\pm 60^\circ) \end{pmatrix} \text{となり, 原点の周りに} \pm 60^\circ \text{の回転を}$$

示すので, 条件(ii)を満たす。すなわち, この変換によって, 半径1の円周上を P_i は 60° ずつ回転し, P_6 で P_0 に戻る。

$$b^2 = \frac{1}{3}a^2 \text{を③に代入すると, } a^6 = -\frac{27}{64} \text{となって, 実数} a \text{は存在しない。}$$

$$\text{したがって, } (a, b) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (\text{答})$$

この解法では, まず(i)の条件を満足する (a, b) を求める。

このとき $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^6$ を計算しなければならない。単純に行列の積を計算するのでは煩瑣にすぎる。

そこで, 上記のように $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく工夫をする。単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をかけるこ

とは1をかけることに等しいから計算は容易である。行列 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の積演算も容易である。

(i)の条件を満足する (a, b) を得たら, (ii)の条件を満足するかどうか調べる。

第 2 問

a を実数とし, $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$g(x) = \sin x + ax$$

このとき $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $x > 0$ において共有点をちょうど3つ持つような a をすべて求めよ。

<解答>

$f(x) = g(x)$ としたとき, $x > 0$ の解が3つ存在する a を求めることと等価である。

$$f(x) - g(x) = \frac{\cos x}{x} - \sin x - ax = x \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} - a \right) \text{だから}$$

$$y = h(x) = \frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \text{とおき, } y = h(x) = a \text{となる} x > 0 \text{の解が3つ存在する} a \text{を求めれば良い。}$$

$$h'(x) = -\frac{\cos x}{x^3}(2 + x^2), \text{したがって} \cos x = 0 \text{で} h'(x) = 0 \text{となり, } h(x) \text{は極値をもち, 図1のような}$$

変化をする。これをグラフにすると, 図2のようになる。

x		$\pi/2$		$3\pi/2$		$5\pi/2$		$7\pi/2$		$9\pi/2$		$11\pi/2$		
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$		$\searrow$	$-2/\pi$	$\nearrow$	$2/3\pi$	$\searrow$	$-2/5\pi$	$\nearrow$	$2/7\pi$	$\searrow$	$-2/9\pi$	$\nearrow$	$2/11\pi$	$\searrow$



図1

図2からわかるように,

$x = \frac{5\pi}{2}$ のときの極値は $h\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -\frac{2}{5\pi}$ だから, $a = -\frac{2}{5\pi}$ ならば $h(x)$ と a は3点を共有する。

また, a が極値 $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{3\pi}$ と $h\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \frac{2}{7\pi}$ の間にあるときは, $h(x)$ と a は3点を共有する。

以上によって, $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点を3つ持つような a は,

$$a = -\frac{2}{5\pi}, \quad \frac{2}{7\pi} < a < \frac{2}{3\pi} \quad (\text{答})$$

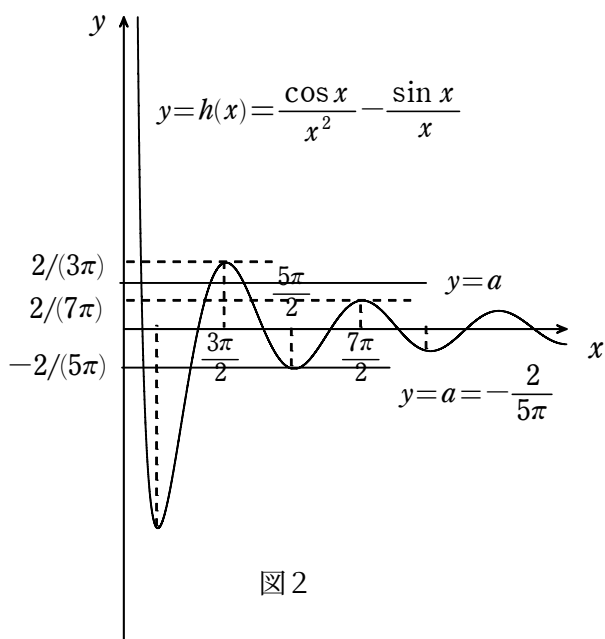


図2

<解説>

2つのグラフが共有点を3つもつということは, $p(x) = f(x) - g(x) = \frac{\cos x}{x} - \sin x - ax = 0$ が3つの解をもつということである。まずは, 問題をこのように置き直すことは, 多くの読者のすることだろう。次に $p(x) = 0$ の解を求めようとする。しかし, 解けない。さすれば, $p(x)$ のグラフを描いて, 略解を調べよう。しかし $p(x)$ は3つの関数の合成でグラフを描くのは, なかなか面倒だ。 $p(x)$ の導関数も $p'(x) = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - \cos x - a$ となって, 極値を与える x を求めることさえ困難だ。

ここで, 単純な着想として, $p(x) = x\left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} - a\right)$ として, $y = h(x) = \frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$ と $y = a$ のグラフの共有点を求める問題に置き直すことを考える。グラフ $h(x)$ の振る舞いがわかれば, 直線 $y = a$ との共有点を求めることは容易だろうという推測が着想の理由だ。 $h(x)$ の導関数が幸い単純な関数となり, 極値を与える x と極値が容易に求まる。

第 3 問

A, Bの2人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが1枚あり、最初はAがそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

- (i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出ればA に1点を与え、コインはA がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、A はコインをB に渡す。
- (ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出ればB に1点を与え、コインはB がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、B はコインをA に渡す。

そしてA, B のいずれかが2点を獲得した時点で、2点を獲得した方の勝利とする。たとえば、コインが表, 裏, 表, 表と出た場合、この時点でA は1点, B は2点を獲得しているのでB の勝利となる。

- (1) A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときにAの勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

<解答>

(1)

n 回目の試行(コイン投げ)でA が勝つのは、その試行でA が表を出すことである。加えて、それまでの $(n-1)$ 回の試行でA が1回表を出していることである。この間、B は1回も表を出していないか、1回表を出したかいずれかである。

(a) B が1回も表を出していない場合

裏が出るごとに手番が交替する。最初はAの手番だったので、Aが表を出す前に裏が偶数回(0を含む)続かなければならない。奇数回ではBの手番になる。次にまたAが表を出すためには、同じく裏が偶数回(0を含む)続かなければならない。すると、裏が偶数回とAの表が2回あるので、試行回数 n は偶数である。すると図1のような場合である。 $n=2k$ とすれば、 $(n-2)=(2k-2)$ 個のUを偶数個に分割する場合はAの左側にUを0, 2, 4, ..., $(2k-2)$ 個置く場合だから、その数は k 通りである。

n 回の試行の1つの発生確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ だから、

$$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n}{2} = \frac{n}{2^{n+1}}, \text{ ただし } n \text{ は偶数 } (2, 4, 6, \dots)$$

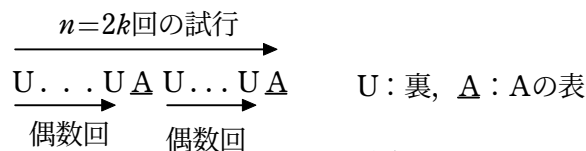


図1

(b) B が1回表を出した場合

図2-1のようにAの表, Bの表, Aの表となるか、図2-2のように最初にBの表が出るかである。いずれの場合も手番の交代が2度必要だから、裏が出る回数は偶数、表が出る回数は3回だから、

試行回数 n は奇数回である。 $n=2k+1$ として、 $k \geq 2$ 、 $n \geq 5$ である。

図2-1の場合は、最初の $\mathbf{A}$ の左に偶数個 $(0, 2, \dots, 2k-4)$ のUを置いた後、残る偶数個 $(2k-2, \dots, 4, 2)$ のUのうち、 $\mathbf{B}$ の左側に奇数個のUを置く場合である。 $(2k-2)$ 個のUのうち、 $\mathbf{B}$ の左側に奇数個のUを置く場合は $(1, 3, \dots, 2k-3)$ だから、その場合の数は $(k-1)$ 通りである。したがって、図2-1の場合の数は、

$$(k-1)+(k-2)+\dots+2+1=\frac{k(k-1)}{2}=\frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2}=\frac{(n-1)(n-3)}{8} \text{通りである。}$$

図2-2の場合は、 $\mathbf{B}$ の左に奇数個 $(1, 3, \dots, 2k-3)$ のUを置いた後、残る奇数個 $(2k-3, \dots, 3, 1)$ のUのうち、 $\mathbf{A}$ の左側に奇数個 $(1, 3, \dots, 2k-3)$ のUを置く場合である。この場合の数は $(k-1)$ 通りだから、図2-2の場合の数は同様に、

$$(k-1)+(k-2)+\dots+2+1=\frac{k(k-1)}{2}=\frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2}=\frac{(n-1)(n-3)}{8} \text{通りである。}$$

したがって、 $p(n)=\frac{(n-1)(n-3)}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$ 、ただし n は $n \geq 5$ の奇数 $(5, 7, \dots)$

また $p(1)=p(3)=0$ と、 $n=1, 3$ でも成立する。

以上をまとめると、

$$n \text{ が偶数 } (2, 4, 6, \dots) \text{ のとき, } p(n)=\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$n \text{ が奇数 } (1, 3, 5, \dots) \text{ のとき, } p(n)=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$$

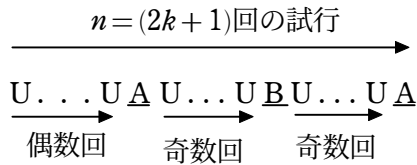


図2-1

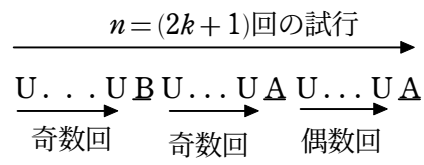


図2-2

U: 裏, A: Aの表, B: Bの表

(2)

$p(n)=\frac{n}{2^{n+1}}$ では、 $n=2k$ ($k=1, 2, \dots$) とおき、

$p(n)=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$ では、 $n=2k+1$ ($k=1, 2, \dots$) とおいて、

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)}{4^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k} \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{の右辺第一項について, } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^k} + \frac{k-1}{4^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}$$

$$\text{したがって, } \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{4^k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4^m} \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}, \text{ したがって } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} = \frac{4}{9} \quad \textcircled{2}$$

①の右辺第二項について、②を利用して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(k-1)^2}{4^k} + \frac{2k}{4^k} - \frac{1}{4^k} \right\} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^2}{4^{k-1}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k} + \frac{8}{9} - \frac{1}{3}$$

$$\text{したがって, } \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k} = \frac{5}{9}, \text{ したがって, } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k} = \frac{20}{27} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{を}\textcircled{1} \text{に利用して, } \sum_{n=1}^{\infty} p(n) = \frac{2}{9} + \frac{10}{27} = \frac{16}{27} \quad (\text{答})$$

<解説>

一見易しそうな問題だが、難問である。 n 回の試行の一つの場合が発生する確率は、明らかに $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。したがって、(Aが勝つ確率) $= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (\text{Aが勝つ場合の数})$ となる。

(1)では、まずAが勝利するのは、どんな場合か考える。もちろんAが2回めの表を出したときで、Bが出した表は0か1回である。そこで、Bの表の回数によって場合分けして考察する。Bが表を出す回数が0ということは、試行回数が偶数ということに注意する。図を描いて、このような場合の数を考えると良い。

Bが表を1回出す場合は、試行回数が奇数になることに注意する。同様に図を描いて、そのような場合の数を求める方法を考える。

(2)では数列の和の計算が必要となる。試行回数 n の偶奇によって $p(n)$ の表式が異なるが、求める $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を①のようにすっきり表現することが必要である。すると、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k}$ という無限数列の和の計算が必要となることがわかる。この計算では、無限数列の取扱であることが一つのポイントである。すなわち、解答で示したように、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}$ とおいている。これは証明を要する。

当然、 ∞ ではなく有限の m 項までの和ならば、 $\sum_{k=1}^m \frac{k-1}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{4^k} \neq \sum_{k=1}^m \frac{k}{4^k}$ である。

ここでは、数列の項について、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{4^m} = 0$ なので、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}$ が成立する。

$$\text{すなわち, } S_m = \sum_{k=1}^m \frac{k}{4^k} \text{とおけば, } \sum_{k=1}^m \frac{k-1}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{4^k} = S_{m-1}$$

$$S_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{4^k}, \quad S_m - S_{m-1} = \frac{m}{4^m}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (S_m - S_{m-1}) = 0 \text{だから,}$$

$$S_{\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{4^m} + S_{m-1} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{m-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{k-1}{4^{k-1}} \text{ となって,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} \text{ が成立する。}$$

次に $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k}$ の計算も悩ましい。有限数列 $\sum_{k=1}^m k^2$ の計算は教科書に掲載されている。これを自力で導くのは、なかなか難しい。しかし、これを導いた式を思い起こせば、参考になるだろう。ここでも、無限数列ということで、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)^2}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k}$ であることを利用する。

同じような計算だが、以下のように $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k}$ を求めることもできる。

$$\frac{(k+1)^2}{4^{k+1}} - \frac{k^2}{4^k} = \frac{1}{4^k} \left\{ \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 - k^2 \right\} = \frac{1}{4} \frac{1}{4^k} + \frac{1}{2} \frac{k}{4^k} - \frac{3}{4} \frac{k^2}{4^k} \quad (4)$$

④の左辺について、 $k=1$ から m までの和をとると、 $\sum_{k=1}^m \left\{ \frac{(k+1)^2}{4^{k+1}} - \frac{k^2}{4^k} \right\} = \frac{(m+1)^2}{4^{m+1}} - \frac{1}{4}$

$m \rightarrow \infty$ とすれば、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{(k+1)^2}{4^{k+1}} - \frac{k^2}{4^k} \right\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(m+1)^2}{4^{m+1}} - \frac{1}{4} \right\} = -\frac{1}{4}$

④の右辺の第一項の $k=1$ から ∞ までの和について、 m 項までの和をとって $m \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 \left(1 - \frac{1}{4^m} \right)}{3} = \frac{1}{12}$$

④の右辺の第二項の $k=1$ から ∞ までの和について、②を用いて、 $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k} = \frac{2}{9}$

したがって、④の第三項の $k=1$ から ∞ までの和について、

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k} = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} + \frac{1}{4} = \frac{15}{27}, \quad \text{したがって、} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{4^k} = \frac{20}{27}$$

ここでは、思考の過程が十分理解できるように、ていねいに記載したが、もちろん、ここまで詳細に記載しなければならない、というわけではない。基本的な思考の過程と結論が正しければ良い。

第 4 問

$\triangle ABC$ において $\angle BAC = 90^\circ$ 、 $|\overrightarrow{AB}| = 1$ 、 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$ とする。 $\triangle ABC$ の内部の点Pが

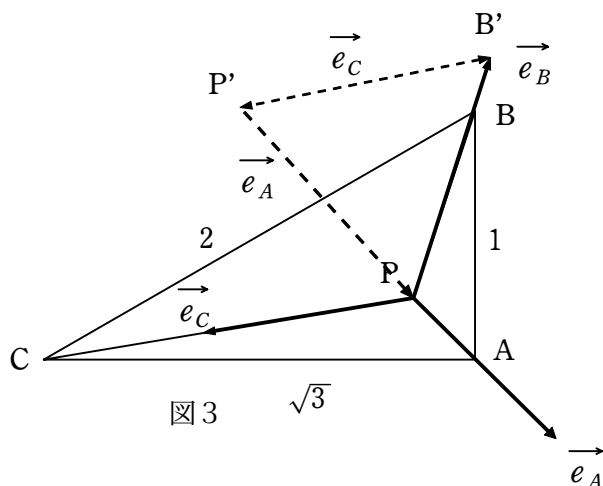
$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \vec{0}$$

を満たすとする。

- (1) $\angle APB$ 、 $\angle APC$ を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{PA}|$ 、 $|\overrightarrow{PB}|$ 、 $|\overrightarrow{PC}|$ を求めよ。

<解答>

(1)



$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} = \vec{e}_A, \quad \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} = \vec{e}_B, \quad \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \vec{e}_C \text{ とする。} |\vec{e}_A| = |\vec{e}_B| = |\vec{e}_C| = 1 \text{ である。}$$

$\vec{e}_A + \vec{e}_B + \vec{e}_C = 0$ だから、ベクトル $\vec{e}_A, \vec{e}_B, \vec{e}_C$ は正三角形を構成する。

したがって、これら三つのベクトルの交差する角度は 120° である。

したがって、 $\angle APB = \angle APC = 120^\circ$ (答)

(2)

題意から、 $\angle CBA = 60^\circ$ である。

$$|\overrightarrow{PA}| = a, \quad |\overrightarrow{PB}| = b, \quad |\overrightarrow{PC}| = c \text{ とする。}$$

$\angle CBP + \angle BCP = \angle CBP + \angle ABP = 60^\circ$, したがって $\angle BCP = \angle ABP$

また $\angle BPC = \angle APB = 120^\circ$ だから $\triangle BPC \sim \triangle BPA$

したがって、 $BC : AB = PB : PA = PC : PB$, したがって $2 : 1 = b : a = c : b$

これより $b = 2a, c = 2b = 4a$, $\triangle APB$ に余弦の法則を適用すると、

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab = a^2 + 4a^2 + 2a^2 = 7a^2 = (AB)^2 = 1$$

$$\text{これを解くと } a = \frac{\sqrt{7}}{7}, \quad b = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \quad c = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{したがって、} |\overrightarrow{PA}| = a = \frac{\sqrt{7}}{7}, \quad |\overrightarrow{PB}| = b = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \quad |\overrightarrow{PC}| = c = \frac{4\sqrt{7}}{7} \quad (\text{答})$$

<解説>

題意は簡明であり、計算も容易だが、少々 の着想を必要とする。

(1)

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} = \vec{e}_A, \quad \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} = \vec{e}_B, \quad \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \vec{e}_C \text{ において、} |\vec{e}_A| = |\vec{e}_B| = |\vec{e}_C| = 1 \text{ であることに気づけば、}$$

容易に扱えるようになる。 $\vec{e}_A + \vec{e}_B + \vec{e}_C = 0$ であるということは、ベクトル $\vec{e}_A, \vec{e}_B, \vec{e}_C$ は三角形を構成する。しかも長さがすべて1の正三角形になる。

図3のように、 $\overrightarrow{P'P} = \vec{e}_A$ になるように P' を決め、 $\overrightarrow{PB'} = \vec{e}_B$ とすれば、 $\overrightarrow{B'P'} = \vec{e}_C$ である。

なぜなら、 $\vec{e}_A + \vec{e}_B + \overrightarrow{B'P'} = 0 = \vec{e}_A + \vec{e}_B + \vec{e}_C$ だから。

また $|\vec{e}_A| = |\vec{e}_B| = |\vec{e}_C| = 1$ だから、 $\triangle PB'P'$ は正三角形である。

したがって、 $\angle B'PP' = 60^\circ$, $\therefore \angle APB = \angle APC = 120^\circ$

(2)

$\triangle BPC \sim \triangle BPA$ を明らかにして、各辺の比例関係によって、 $|\overrightarrow{PA}|, |\overrightarrow{PB}|, |\overrightarrow{PC}|$ を求める。この際、余弦の法則を用いる。

別解を示そう。余弦の法則により、

$$\triangle APB \text{ について、} a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab = 1 \quad \textcircled{1}$$

$$\triangle BPC \text{ について、} b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ = b^2 + c^2 + bc = 2^2 = 4 \quad \textcircled{2}$$

$$\triangle CPA \text{ について、} c^2 + a^2 - 2ca \cos 120^\circ = c^2 + a^2 + ca = (\sqrt{3})^2 = 3 \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1}\text{から}, (c-a)(a+b+c)=3 \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{3}\text{から}, (b-a)(a+b+c)=1$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{1}\text{から}, (c-b)(a+b+c)=2$$

$$\text{したがって}\frac{c-a}{3}=b-a=\frac{c-b}{2}, \text{したがって}c=3b-2a, \textcircled{4}\text{に代入すると}, (b-a)(4b-a)=1$$

$$\text{したがって}, a^2-5ab+4b^2=1 \quad \textcircled{5}, \textcircled{5}-\textcircled{1}\text{により}3b^2-6ab=3b(b-2a)=0, b=2a$$

$$\text{これを}\textcircled{1}\text{に代入して}, 7a^2=1, a=\frac{\sqrt{7}}{7}, b=2a=\frac{2\sqrt{7}}{7}, c=3b-2a=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

第 5 問

次の命題Pを証明したい。

命題P 次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数 (1以上の整数) A が存在する。

(a) A は連続する3つの自然数の積である。

(b) A を10進法で表したとき, 1が連続して99回以上現れるところがある。

以下の問いに答よ。

- (1) y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

- (2) 命題Pを証明せよ。

<解答>

- (1)

$$(x+y-1)(x+y)(x+y+1) = \{(x+y)^2-1\}(x+y)$$

$$= (x^3+3yx^2) + \{(3xy^2+y^3)-(x+y)\} > (x^3+3yx^2) \quad \textcircled{1}$$

$$= x^3+(3y+1)x^2 + \{(3xy^2+y^3)-(x+y)-x^2\} < x^3+(3y+1)x^2 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\text{から}, \{(3xy^2+y^3)-(x+y)\} > 0, (3y^2-1)x+y^3-y > 0, x > \frac{y-y^3}{3y^2-1}$$

しかるに自然数 y について, $\frac{y-y^3}{3y^2-1} \leq 0$ だから, $x > 0$ であればよい。

$$\textcircled{2}\text{から}, \{(3xy^2+y^3)-(x+y)-x^2\} < 0, \text{したがって}x^2-(3y^2-1)x-y^3+y > 0$$

$f(x) = x^2 - (3y^2-1)x - y^3 + y = 0$ としたとき, 自然数 y に対して

解の判別式 $D = (3y^2-1)^2 + 4(y^3-y) > 0$ であるから, $f(x) = 0$ は実数解をもつ。

$$\text{実数解は}, \frac{3y^2-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3y^2-1}{2}\right)^2 + y^3-y}, \frac{3y^2-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{3y^2-1}{2}\right)^2 + y^3-y} \leq 0 \text{ だから},$$

$$f(x) > 0 \text{ であるための正の実数 } x \text{ は}, x > \frac{3y^2-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{3y^2-1}{2}\right)^2 + y^3-y}$$

- (2)

$3y$ を99桁まで1が連続して99回現れる数とする。すなわち,

$3y=10^{98}+10^{97}+\dots+10+1$ とおく。

$10^{98}+10^{97}+\dots+10+1=111\sum_{k=0}^{32}10^{3k}=3\times 37\sum_{k=0}^{32}10^{3k}$ だから、 $y=37\sum_{k=0}^{32}10^{3k}$ で y は自然数となる。

したがって、 $3y=10^{98}+10^{97}+\dots+10+1$ とおくことができる。

$x=10^N$ とおく。 N は(1)の条件を満足するような十分大きな自然数とする。

$$x^3+3yx^2=10^{3N}+(10^{98}+10^{97}+\dots+10+1)10^{2N}=(10^N+10^{98}+10^{97}+\dots+10+1)10^{2N}$$

$N>98$ であれば、 x^3+3yx^2 は1が連続して99回現れる数となる。

$$x^3+(3y+1)x^2=(10^N+10^{98}+10^{97}+\dots+10+1)10^{2N}+10^{2N}$$

しかるに(1)により、 $x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$ だから、

$$\begin{aligned}(10^N+10^{98}+10^{97}+\dots+10+1)10^{2N}&<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)\\&<(10^N+10^{98}+10^{97}+\dots+10+1)10^{2N}+10^{2N}\end{aligned}$$

したがって、 $(x+y-1)(x+y)(x+y+1)=(10^N+10^{98}+10^{97}+\dots+10+1)10^{2N}+M$ とおくことができる。ただし、 M は $1<M<10^{2N}-1$ なる自然数である。

したがって、連続する3つの自然数である $(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ を A とすれば、 A は1が連続して99回現れるところのある自然数となる。以上によって、命題 P が証明された。

<解説>

(1)では命題 P を証明するための誘導式を示している。この式を用いて、命題 P を証明する問題である。この設問は容易だろう。得られた結果は、命題 P に対して直接的に関わるものではない。自然数 y によって定まる実数よりも大きな x に対して、(1)の与式が成立することを(2)では利用する。

(2)は与式を利用するにしても、解答方針の着想が必要である。 x を自然数とすれば、 $(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ が連続する3つの自然数の積であることは明らかである。そこで、これをはさむ x^3+3yx^2 と $x^3+(3y+1)x^2$ とを、1が連続して99回現れるところのある自然数として表現できれば、証明に近づくことができるのではないかと推測できよう。

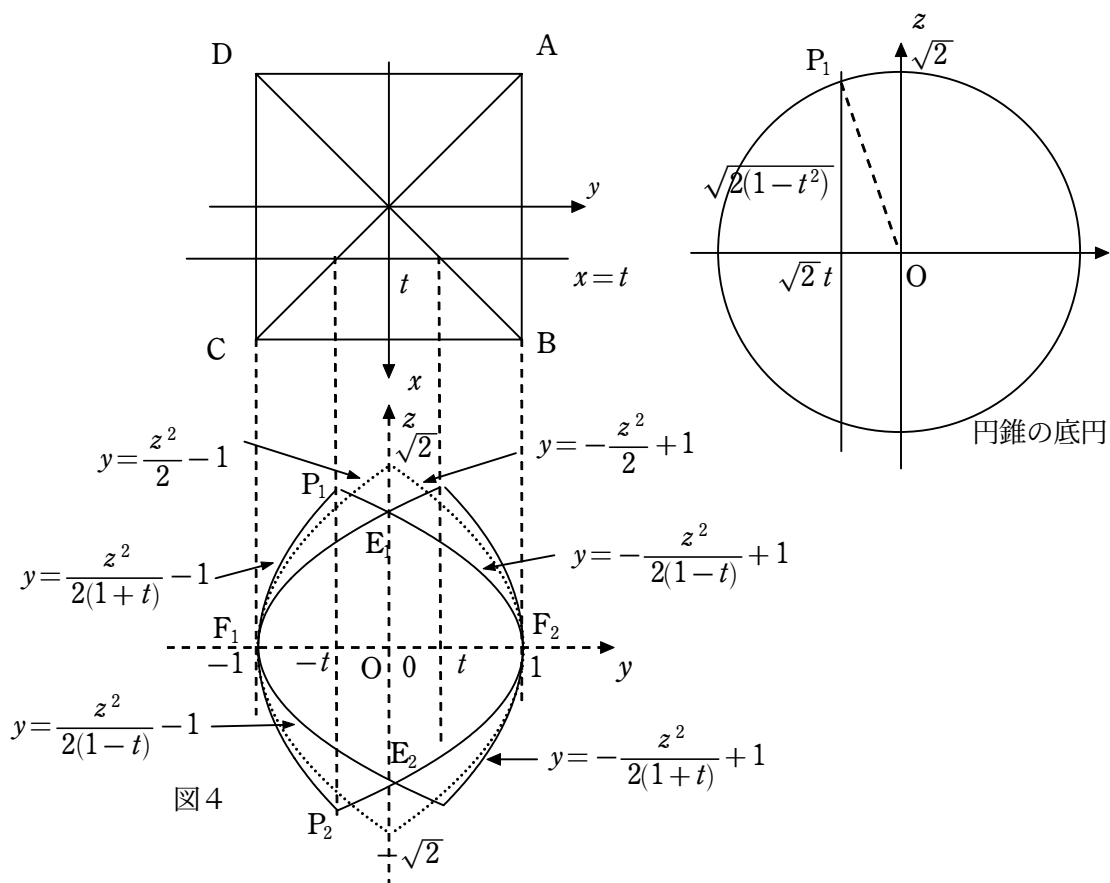
ここで、天下りになるが、 $3y=10^{98}+10^{97}+\dots+10+1$ のように、 $3y$ を1が連続して99回現れる最小の数とおくことがポイントである。 y が自然数であるから、 $10^{98}+10^{97}+\dots+10+1$ が3の倍数であることに注意しなければならない。その上で、 x を十分大きな10のべき乗とすれば、 x^3+3yx^2 と $x^3+(3y+1)x^2$ とも、1が連続して99回現れるところのある自然数として表現できることに気づく。

第 6 問

座標空間において、 xy 平面内において不等式 $|x|\leq 1$ 、 $|y|\leq 1$ により定まる正方形 S の4つの頂点を $A(-1, 1, 0)$ 、 $B(1, 1, 0)$ 、 $C(1, -1, 0)$ 、 $D(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を、直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1 、直線 AC を回転させてできる立体を V_2 とする。

- (1) $0\leq t<1$ を満す実数 t に対し、平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。
- (2) V_1 と V_2 の共通部分の面積を求めよ。

<解答>



(1)

図4を参照する。 V_1 は直線BDを軸として $\triangle ABC$ を回転してできる円錐と $\triangle ADC$ を回転してできる円錐からなる。

平面 $x=t$ は円錐の側線に平行だから、切り口の図形は放物線になる。

放物線の方程式は、直線 $y=-t$ との交点の z 座標が $\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2}t)^2}=\pm\sqrt{2(1-t^2)}$ だから、

$$\triangle ABC \text{を回転してできる円錐の断面の放物線, } y = -\frac{z^2}{2(1-t)} + 1 \quad \textcircled{1}$$

$$\triangle ADC \text{を回転してできる円錐の断面の放物線, } y = \frac{z^2}{2(1+t)} - 1 \quad \textcircled{2}$$

したがって、切り口の断面積は、

$$S = 2 \int_0^p \left\{ -t - \frac{z^2}{2(1+t)} + 1 \right\} dz + 2 \int_0^p \left\{ -\frac{z^2}{2(1-t)} + 1 + t \right\} dz, \quad \text{ただし } p = \sqrt{2(1-t^2)}$$

$$\int_0^p \left\{ -t - \frac{z^2}{2(1+t)} + 1 \right\} dz = \left[(1-t)z - \frac{z^3}{6(1+t)} \right]_0^p = (1-t)p - \frac{p^3}{6(1+t)}$$

$$\int_0^p \left\{ -\frac{z^2}{2(1-t)} + 1 + t \right\} dz = \left[(1+t)z - \frac{z^3}{6(1-t)} \right]_0^p = (1+t)p - \frac{p^3}{6(1-t)}$$

$$S = 4p - \frac{2p^3}{3(1-t^2)} = 4\sqrt{2(1-t^2)} - \frac{4}{3}\sqrt{2(1-t^2)} = \frac{8}{3}\sqrt{2(1-t^2)} \quad (\text{答})$$

(2)

V_2 は直線ACを軸として $\triangle BCD$ を回転してできる円錐と $\triangle BAD$ を回転してできる円錐からなる。

$$\triangle BCD \text{を回転してできる円錐の断面の放物線, } y = \frac{z^2}{2(1-t)} - 1 \quad (3)$$

$$\triangle BAD \text{を回転してできる円錐の断面の放物線, } y = -\frac{z^2}{2(1+t)} + 1 \quad (4)$$

すると、 V_1 と V_2 の共通部分の断面は図形 $E_1F_1E_2F_2$ となる。

$$\text{図形} E_1F_1E_2F_2 \text{の面積を} S(t) \text{とすれば, 共通部分の体積は, } V_C = \int_{-1}^1 S(t) dt = 2 \int_0^1 S(t) dt$$

$$S(t) = 4 \int_0^q \left\{ -\frac{z^2}{2(1-t)} + 1 \right\} dz = 4 \left[z - \frac{z^3}{6(1-t)} \right]_0^q = 4q - \frac{2q^3}{3(1-t)}$$

ただし q は $y=0$ の直線と放物線の交点 E_1 の z 座標で、 $q = \sqrt{2(1-t)}$

$$\text{すると, } S(t) = 4\sqrt{2(1-t)} - \frac{8}{3}\sqrt{2(1-t)} = \frac{8}{3}\sqrt{1-t}$$

$$\text{したがって, } V_C = 2 \int_0^1 S(t) dt = \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{1-t} dt = \frac{16\sqrt{2}}{3} \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{32\sqrt{2}}{9} \quad (\text{答})$$

<解説>

立体の問題ということで腰が引けそうになるが、ぐっと落ち着いて考える。どんな立体になるか、切断面はどうなるかを、頭の中で描かなければならない。可能な限り、立体図形を具体的に頭の中に描くことだ。正方形の対角線を軸として回転するのだから、辺を側線とする円錐が二つできることは容易にわかる。二つの円錐はもう一方の対角線を直径とする円を底円として接続する。

次に、切り口の図形も描いてみる。図4のように、 (x, y) 平面の下に、切断面となる (y, z) 平面を描いて考察するとよい。平面による円錐の切り口が2次曲線になることの説明が数学Cに記載されていることを思い出すと速い。

本問のように切断する平面が円錐の側線に平行な場合、切り口は放物線になる。これを知っているかどうか、本問解答のポイントだ。もちろん、天下一に放物線になるとして考察を進めてよい。だが、どんな曲線になるかを考えていくようだと、解答に至るのは容易ではない。楕円、放物線、双曲線が切断面と側線の角度関係によって決まる。

(1)

二つの円錐の切断だから、二つの放物線ができるはずだ。切断面と円錐底円の交線で二つの放物線は接続する。ということで、 (y, z) 平面に放物線を描いて、放物線の方程式を求める。交点の z 座標が求まれば、放物線の頂点は決まっているのだから、放物線の方程式は容易に求まる。

交点の z 座標は図のように円錐の底円を描くと、 $x=t$ の平面と底円の交点の z 座標になる。すると、それは、 $\sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2}t)^2} = \sqrt{2(1-t^2)}$ である。

(2)

V_2 の切断面の切り口は、 z 軸に関して V_1 の切り口と対称な放物線になる。 V_1, V_2 の共通部分は両者の切り口の共通部分である。そこで、共通部分の面積 S を t の関数 $S(t)$ として求める。共通部分の体積は、微小体積 $S(t)dt$ を $t=-1$ から 1 まで加算していけば良い。つまり積分である。この際、 -1 から 0 までの積分と 0 から 1 までの積分は等しいことを利用して計算する。共通部分の立体は yz 平面に関して対

称だからで、このことは図4から明らかである。

<総評>

例年以上に骨のある問題が揃った。まずは第1問、第4問は、題意が簡明で解答の方針が立てやすいので完答したい。続いて第2問もほぼ正答したいところだ。しかしこれらの問題も着眼、着想がないと容易には解けないところに東大入試数学の高度さがある。問題3、5、6は難問である。難易の程度は読者の得手不得手によって異なるであろうが、粘り強く食らいついて部分点を獲得し、全体として70点以上獲得したいところだ。

第1問

回転による座標変換を与える行列を求める問題。結果の予測が容易にできる。1次変換を座標の回転と伸縮によって表現する手法を理解していなければならない。難易度はB－。

第2問

難易度はB。式の変形について、少々着想を必要とするが、そこに気がつけば、難しい問題ではない。問題文にグラフという用語を使っているのだから、グラフを的確に描いて、理解することが重要である。

第3問

確率の問題で、結果として得られる確率の和は、無限数列の和を求める問題である。難易度はA－。なかなか歯ごたえのある問題である。率直のところ、良くぞこのような問題を考えたものだ、という感想を抱く。確率過程の結果として得られる確率の和の計算がほど良い難しさの数列の和になっている、お見事！と思ってしまう。

ある事象の発生確率を求めることは、事象を発生させる場合の数を求めることである。多くのケースでは、個々の場合が発生する確率は等しいので、 $(\text{事象が発生する確率}) = (\text{個々の場合の発生確率}) \times (\text{事象を発生させる場合の数})$ となる。難易度はA。

第4問

図形をベクトルによって扱う問題。題意は簡明であるから、難しくはない。上手く解くために、少々の着想を必要とする。難易度はB－。

第5問

整数の問題。着想力や思考力を要する整数問題がよく出題される。残念ながら筆者は独力で正答することができなかった。ネットのいくつかのサイトの解答例を参考にして、解答と解説を書いた。だから、苦言を呈するわけではないが、この問題はやや奇問だと思う。

なぜ奇問かといえば、「連続する3つの自然数の積からなる自然数の中に、1が連続して99個現れる自然数がある」ということを証明しなさい、ということだが、99という意味ありげな大きな数字に特別の意味がない、ということである。99という大きな数字にとらわれて、特別な意味を考えるようで

はいけないのであって、99の代わりに3, 6, 9, ..., 96, 102, 105, ...でも同じことである。使うからには必然性のある数字であってほしい。ここでは3の方が良いであろう。

難易度はA－。

第6問

立体の面積，体積の問題である。平面の回転によってできる図形を頭の中で描き，紙上に描くことが必要である。円錐の断面が2次曲線になることの知識が必要である。側線と平行な平面のよる切断面の切り口が放物線になること，放物線の方程式を的確に求めること。立体図形の把握はやや煩瑣な行為であるので，粘り強く取り組む。難易度はA－。

数学（文科）

第 1 問

関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C ，原点 O を通る傾き t の直線を l とし， C と l が O 以外に共有点をもつとする。 C と l の共有点を O ， P ， Q とし， $|\overrightarrow{OP}|$ と $|\overrightarrow{OQ}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の1つが接点である場合は， O ， P ， Q のうちの2つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。

<解答>

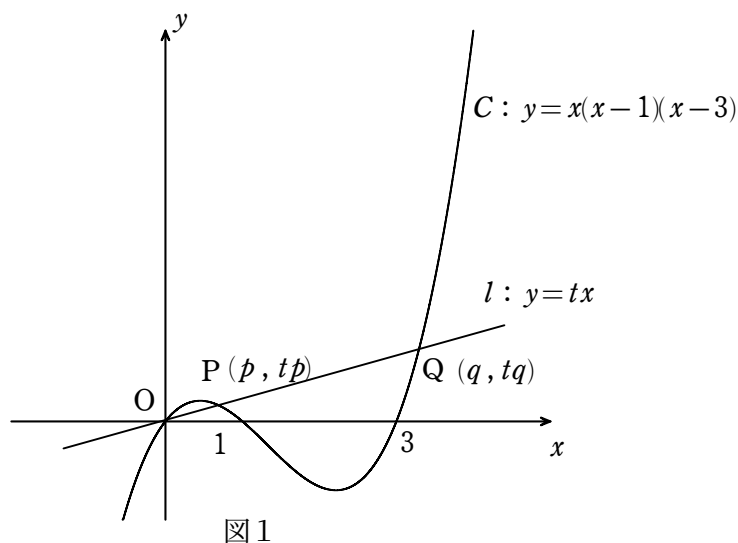


図 1 を参照する。

直線 l の方程式は $y=tx$ だから， $x(x-1)(x-3)=tx$ として， $x=0$ および $(x-1)(x-3)=t$ の解が共有点 O ， P ， Q の x 座標である。

$(x-1)(x-3)=t$ の二つの実数解を p ， q として， P は点 (p, tp) ， Q は点 (q, tq) とする。

$x^2-4x+(3-t)=0$ が実数解をもつためには，解の判別式 $D=4-(3-t)\geq 0$ だから， $t\geq -1$

$|\overrightarrow{OP}|^2=(1+t^2)p^2$ ， $|\overrightarrow{OQ}|^2=(1+t^2)q^2$ ，したがって， $g(t)=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|=(1+t^2)pq=(1+t^2)(3-t)$

$-1 \leq t \leq 3$ のとき $g(t) = (1+t^2)(3-t)$, $\frac{dg(t)}{dt} = -3t^2 + 6t - 1 = 0$ とすれば, $t = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$

$3 < t$ のとき $g(t) = (1+t^2)(t-3)$, $\frac{dg(t)}{dt} = 3t^2 - 6t + 1 > 0$ となって極値は存在しない。

すると, 関数 $g(t)$ の増減は

t	-1		$1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$		$1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$		3	
$\frac{dg(t)}{dt}$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	
$g(t)$	2		$4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}$		$4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}$		0	

したがって, 極値は $4\left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{9}\right), 0$

<解説>

グラフを描いて, 問題の主意を把握する。共有点をもつための t の範囲, 関数 $g(t)$ を確定するのは難しくはないだろう。

$(x-1)(x-3)=t$ の二つの実数解を p, q とし, P は点 (p, tp) , Q は点 (q, tq) とする。このように考えることが着眼である。すると容易に関数 $g(t)$ を確定することができよう。

その上で, t の範囲に応じて関数 $g(t)$ を定め, 導関数とそれが 0 値になる t を求める。これは関数の増減と極値を求める常套的方法である。

第 2 問

座標平面上の 3 点

$$P(0, -\sqrt{2}), Q(0, \sqrt{2}), A(a, \sqrt{a^2+1}) \quad (0 \leq a \leq 1)$$

を考える。

- (1) 2 つの線分の長さの差 $PA - AQ$ は a によらない定数であることを示し, その値を求めよ。
- (2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき, 線分の長さの和

$$PA + AB + BC$$

は a によらない定数であることを示し, その値を求めよ。

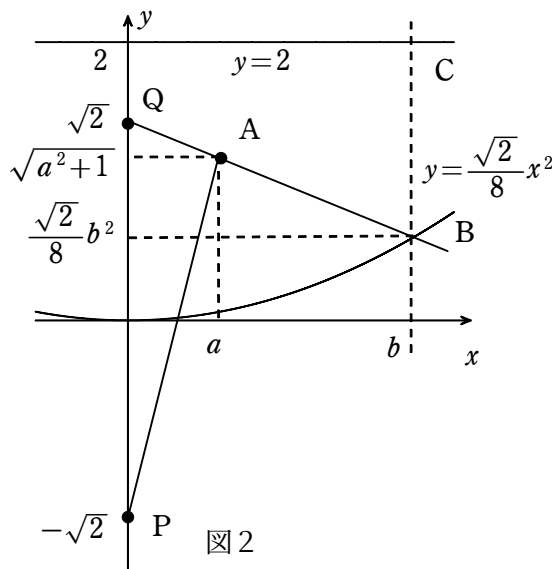
<解答>

(1)

図 2 を参照する。

$$PA^2 = a^2 + (\sqrt{a^2+1} + \sqrt{2})^2 = 2a^2 + 2\sqrt{2(a^2+1)} + 3$$

$=2(a^2+1)+2\sqrt{2(a^2+1)}+1=\{\sqrt{2(a^2+1)}+1\}^2$, $PA=\sqrt{2(a^2+1)}+1$
 $AQ^2=a^2+(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2})^2=2a^2-2\sqrt{2(a^2+1)}+3=\{\sqrt{2(a^2+1)}-1\}^2$, $AQ=\sqrt{2(a^2+1)}-1$
 したがって、 $PA-AQ=2$ 、したがって $PA-AQ$ は a によらない定数である。



(2)

$$PA+AB+BC=2+AQ+AB+BC=2+QB+BC$$

点Bの x 座標を b とする。

$$\begin{aligned}
 QB &= \sqrt{b^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{8}b^2 - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{32} - \frac{b^2}{2} + 2} = \sqrt{\frac{b^4}{32} + \frac{b^2}{2} + 2} \\
 &= \sqrt{2\left(\frac{b^4}{64} + \frac{b^2}{4} + 1\right)} = \sqrt{2\left(\frac{b^2}{8} + 1\right)^2} = \sqrt{2}\left(\frac{b^2}{8} + 1\right)
 \end{aligned}$$

$$BC = 2 - \frac{\sqrt{2}}{8}b^2$$

$$\text{したがって、} PA+AB+BC=2+QB+BC=2+\sqrt{2}$$

したがって、 $PA+AB+BC$ は a によらない定数である。

<解説>

図をていねいに描いて、必要な点、値、式等を書き込む。するとどのように問題を扱えば良いか見えてくるだろう。

(1)まずは、紛れなく単純に2点間の距離を計算するのが良いだろう。ここで、得られた式を凝視して、 $PA=\sqrt{2(a^2+1)}+1$ と $AQ=\sqrt{2(a^2+1)}-1$ を導く必要がある。その前提として、 $a^2+(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2})^2=\{\sqrt{2(a^2+1)}+1\}^2$ を導かねばならない。これに気づかないと難しくなる。

$A(x, y)$ としたとき、 $y=\sqrt{x^2+1}$ だから、点Aはこの曲線上の点である。

$$\text{すると} PA=\sqrt{x^2+(y+\sqrt{2})^2}=\sqrt{y^2-1+(y+\sqrt{2})^2}=\sqrt{2y^2+2\sqrt{2}y+1}=\sqrt{(\sqrt{2}y+1)^2}=\sqrt{2}y+1$$

同様に $AQ = \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{2}y - 1)^2} = \sqrt{2}y - 1$, したがって, $PA - AQ = 2$ のように, 比較的容易に気づくことができる。

(2) $0 \leq a \leq 1$ だから, 点 A は曲線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ と直線 $y = 2$ の間にある。図を見て, 単純に計算していけば良いだろう。

第 3 問

a, b を実数の定数とする。実数 x, y が

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad 2x + y \leq 5$$

とともに満たすとき, $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2b$ の最小値を求めよ。

<解答>

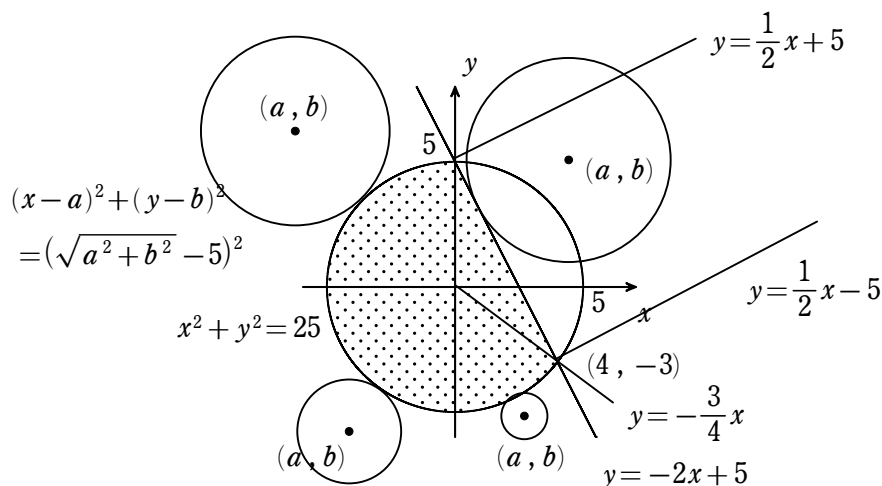


図 3

図 3 を参照する。

$$z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by = (x - a)^2 + (y - b)^2 - (a^2 + b^2) \geq -(a^2 + b^2)$$

したがって, 点 (x, y) と点 (a, b) の距離の 2 乗 $(x - a)^2 + (y - b)^2$ が最小のとき z は最小となる。

(i) $a^2 + b^2 \leq 25, 2a + b \leq 5$ のとき

$x = a, y = b$ となりえるので, 最小値は $-(a^2 + b^2)$

(a, b) が (i) の範囲外の場合, すなわち

(ii) $a^2 + b^2 > 25$ かつ $2a + b \leq 5$ のとき

(a, b) を中心とする円が $x^2 + y^2 = 25$ の円に接触するとき z が最小になる。

(a, b) と接点 (x, y) の距離は $(\sqrt{a^2 + b^2} - 5)$ だから

$$\text{最小値は } z = (\sqrt{a^2 + b^2} - 5)^2 - (a^2 + b^2) = 25 - 10\sqrt{a^2 + b^2}$$

(iii) $2a + b > 5$ のとき, 図のように 5 つに分かれる。

(a) $a < 0$

(ii)と同じく (a, b) を中心とする円が $x^2 + y^2 = 25$ の円に接触するとき z が最小になる。

$$\text{最小値は } z = (\sqrt{a^2 + b^2} - 5)^2 - (a^2 + b^2) = 25 - 10\sqrt{a^2 + b^2}$$

(b) $b > \frac{a}{2} + 5$ かつ $a \geq 0$

点 $(0, 5)$ と点 (a, b) の距離が最小になるので、 $z = a^2 + (5 - b)^2 - (a^2 + b^2) = 25 - 2b$ が最小値

(c) $\frac{a}{2} - 5 \leq b \leq \frac{a}{2} + 5$

点 (a, b) を中心とする円が直線 $2x + y = 5$ と接するときに z が最小になる。

点と直線の距離の公式により、点 (a, b) と直線 $2x + y = 5$ の距離の2乗は

$$\left(\frac{|2a + b - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right)^2 = \frac{(2a + b - 5)^2}{5} \text{ だから,}$$

$$z = \frac{(2a + b - 5)^2}{5} - (a^2 + b^2) = 5 - 4a - 2b + \frac{4ab - a^2 - 4b^2}{5} \text{ が最小値}$$

(d) $b < \frac{a}{2} - 5$ かつ $b \geq -\frac{3}{4}a$

点 $(4, -3)$ と点 (a, b) の距離が最小になるので、

$$z = (4 - a)^2 + (-3 - b)^2 - (a^2 + b^2) = 25 - 8a + 6b \text{ が最小値}$$

(e) $b < -\frac{3}{4}a$

(ii)と同じく (a, b) を中心とする円が $x^2 + y^2 = 25$ の円に接触するとき z が最小になる。

$$\text{最小値は } z = (\sqrt{a^2 + b^2} - 5)^2 - (a^2 + b^2) = 25 - 10\sqrt{a^2 + b^2}$$

<解説>

図を描いて、まずは点 (x, y) の存在領域を確定する。次に、 z の式を凝視して問題解決に資するように変形する。すると、点 (a, b) の存在領域ごとに z の最小値が異なることが理解できるであろう。

点 (a, b) の領域をどのように場合分けするか。図の上に点 (a, b) を中心とする円を描いて考える。すると点 (a, b) と点 (x, y) の距離が最短になるのは、点 (a, b) を中心とする円が (x, y) の存在領域に接するときであることがわかる。

その上で、細かく (a, b) の存在領域と点 (x, y) との最短距離を考えていく。この際、できるだけいねいに図を描き、正確に (a, b) の存在領域の区分けをすること。

点と直線の距離の公式を覚えていない場合は、下記のように計算する。時間がかかるけれど。

接点は $\left(\frac{a - 2b + 10}{5}, \frac{5 - 2a + 4b}{5} \right)$ だから、点 (a, b) と直線 $2x + y = 5$ の距離の2乗は

$$\left(\frac{10 - 4a - 2b}{5} \right)^2 + \left(\frac{5 - 2a - b}{5} \right)^2 \text{ となって, } z = 5 - 4a - 2b + \frac{4ab - a^2 - 4b^2}{5} \text{ が最小値}$$

第 4 問 (理科の第6問(1)に同じ)

<解答>、<解説>は理科を参照のこと。

＜総評＞

文科としては骨のある問題が揃っている。難易度Cといえども、的確な数学力がないと解けない。第1問、第2問は完答し、第3問は概ねできなければならない。第4問は理系の受験生にとっても難しい問題だが、部分点は欲しいところだ。第1問、第2問を完答し、第3問、4問は部分点を獲得して、75%ほどの得点を期待したい。

第1問

3次式、1次式のグラフの共有点から作られる3次式の微分の問題。難易度はCだから、完答したい。

第2問

図形とその式に関する問題。少々の着想が必要だが、難易度はCだから、完答したい。

第3問

これも図形と式に関する問題。題意を的確にとらえ、 (a, b) の存在領域に関する場合分けを的確に行うことが必要である。うがった見方をすれば、文科志望の学生に、状況把握と状況に応じた場合分けの論理力を要求しているといえる。計算もやや煩瑣であり、難易度はB+。

第4問

確率の問題で、理科の第6問(1)に同じ。理科にとってもやや難しいのだから、文科の問題としても難しい。確率の考え方は多くの実務において重要だから、文科の入試問題には必出であろう。文系志望者は論理力を養う上で確率の考え方には習熟してほしい。難易度はA。

130916