

2014 (H26)年度 京都大学 前期 入学試験 数学解説

数学 (理系) 教育学部 (教育科学理系)、医学部 (人間健康科)

総合人間学部 (理系)、経済学部 (理系)

理学部、工学部、薬学部、医学部 (医学科)、農学部

数学 (文系) 総合人間学部 (文系)、文学部、教育学部 (文系)、法学部、経済学部 (一般)

数学 (理系)

200点満点, 150分

1

(30点)

座標空間における次の3つの直線 l , m , n を考える:

l は点 $A(1, 0, -2)$ を通り, ベクトル $\vec{u} = (2, 1, -1)$ に平行な直線である.

m は点 $B(1, 2, -3)$ を通り, ベクトル $\vec{v} = (1, -1, 1)$ に平行な直線である.

n は点 $C(1, -1, 0)$ を通り, ベクトル $\vec{w} = (1, 2, 1)$ に平行な直線である.

P を l 上の点として, P から m , n へ下した垂線の足をそれぞれ Q , R とする. このとき, $PQ^2 + PR^2$ を最小にするような P と, そのときの $PQ^2 + PR^2$ を求めよ.

<解答>

p, q, r を実数として,

l 上の点 P の座標を, $(1, 0, -2) + p\vec{u} = (1+2p, p, -2-p)$ と表わす.

m 上の点 Q の座標を, $(1, 2, -3) + q\vec{v} = (1+q, 2-q, -3+q)$ と表わす.

n 上の点 R の座標を, $(1, -1, 0) + r\vec{w} = (1+r, -1+2r, r)$ と表わす.

したがって, $\overrightarrow{PQ} = (q-2p, 2-q-p, -1+q+p)$

$\overrightarrow{PR} = (r-2p, -1+2r-p, 2+r+p)$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$ だから, $(q-2p, 2-q-p, -1+q+p) \cdot (1, -1, 1)$
 $= q-2p-2+q+p-1+q+p = -3+3q=0, \therefore q=1$

$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{w} = 0$ だから, $(r-2p, -1+2r-p, 2+r+p) \cdot (1, 2, 1)$
 $= r-2p-2+4r-2p+2+r+p = 6r-3p=0, \therefore r=\frac{p}{2}$

$\overrightarrow{PQ} = (q-2p, 2-q-p, -1+q+p) = (1-2p, 1-p, p)$

$\therefore PQ^2 = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = (1-2p)^2 + (1-p)^2 + p^2$

$\overrightarrow{PR} = (r-2p, -1+2r-p, 2+r+p) = \left(-\frac{3p}{2}, -1, 2+\frac{3p}{2}\right)$

$\therefore PR^2 = \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PR} = \left(-\frac{3p}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(2+\frac{3p}{2}\right)^2 = \frac{9p^2}{4} + 1 + 4 + 6p + \frac{9p^2}{4}$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 15p^2 + 7$

したがって $PQ^2 + PR^2$ が最小になるのは $p=0$ のときだから, P は点 $A(1, 0, -2)$ であり, 最小値は7である.

<解説>

3次元座標を扱う問題なので、一見複雑そうだが、しっかり読めば、解答の流れは浮かんでくる。落ち着いて取り組めば、完答できるだろう。

点 (x, y, z) を通りベクトル $\vec{u}$ に平行な直線上の点が、 $(x, y, z) + p\vec{u}$ のように表されることを理解していることがポイントである。続いて、線分をベクトルによって表示し、線分が直交することを、ベクトルの内積が0になることとして計算することがポイントである。

計算は簡単だから、ケアレスミスさえなければ正答を得ることは容易だろう。

2

(30点)

2つの粒子が時刻0において△ABCの頂点Aに位置している。これらの粒子は独立に運動し、それぞれ1秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば、ある時刻で点Cにいる粒子は、その1秒後には点Aまたは点Bにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。この2つの粒子が、時刻0の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。

<解答>

n 秒後に同じ点にいる場合は、1秒前の $(n-1)$ 秒後において、2つの粒子が

(a) 同じ点にいる場合：確率は $p(n-1)$

(b) 異なる点にいる場合：確率は $1-p(n-1)$

のいずれかである。図1のように、(a)で2つの粒子がどの同じ点にいても、1秒後に移動して再び同じ点にいる確率は $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ である。

(b)で同じ点に移動する確率は、粒子がどの異なる2点にあっても、図1のように $\frac{1}{4}$ である。

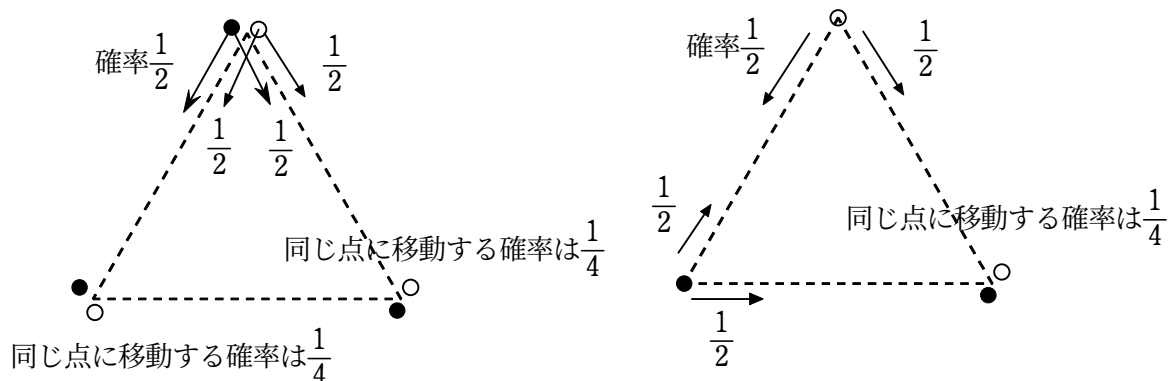
したがって、

$$p(n) = \frac{1}{2}p(n-1) + \frac{1}{4}(1-p(n-1)) = \frac{1}{4}p(n-1) + \frac{1}{4}$$

これを変形して、

$$\begin{aligned} p(n) - \frac{1}{3} &= \frac{1}{4} \left\{ p(n-1) - \frac{1}{3} \right\} = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \left\{ p(n-2) - \frac{1}{3} \right\} = \cdots = \left(\frac{1}{4} \right)^n \left\{ p(0) - \frac{1}{3} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^n \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n \end{aligned}$$

したがって、
$$p(n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$



<解説>

簡単な計算によって求めることができる。(b)において同じ点に移動する確率を求めることに、着想を必要とし、試験の切迫した状況の中では、煩瑣かも知れない。図を描いて考えると着想しやすい。

得られた確率漸化式を $p(n) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left\{ p(n-1) - \frac{1}{3} \right\}$ と表現する常套的方法により、一般項を求める。

考え方にさほどの着想を必要としない別解を説明する。

別解

一つの粒子が n 秒後に頂点A, B, C に存在する確率を P_{An} , P_{Bn} , P_{Cn} とする。

$$P_{An} = \frac{1}{2}P_{Bn-1} + \frac{1}{2}P_{Cn-1} = \frac{1}{2}(1 - P_{An-1}) \quad ①$$

$$P_{Bn} = \frac{1}{2}P_{Cn-1} + \frac{1}{2}P_{An-1} = \frac{1}{2}(1 - P_{Bn-1}) \quad ②$$

$$P_{Cn} = \frac{1}{2}P_{An-1} + \frac{1}{2}P_{Bn-1} = \frac{1}{2}(1 - P_{Cn-1}) \quad ③$$

$$\text{ただし, } P_{An} + P_{Bn} + P_{Cn} = P_{An-1} + P_{Bn-1} + P_{Cn-1} = 1 \quad ④$$

$$\text{①から, } P_{An} - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(P_{A0} - \frac{1}{3}\right), \quad P_{An} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{ただし } P_{A0} = 1$$

$$\text{②から, } P_{Bn} - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(P_{B0} - \frac{1}{3}\right), \quad P_{Bn} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{ただし } P_{B0} = 0$$

$$\text{③から, } P_{Cn} - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(P_{C0} - \frac{1}{3}\right), \quad P_{Cn} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{ただし } P_{C0} = 0$$

$$2 \text{ つの粒子が同時にA にいる確率は } (P_{An})^2 = \frac{1}{9} \left\{ 1 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}^2$$

$$2 \text{ つの粒子が同時にB にいる確率は } (P_{Bn})^2 = \frac{1}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}^2$$

$$2 \text{ つの粒子が同時にC にいる確率は } (P_{Cn})^2 = \frac{1}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}^2$$

したがって、2つの粒子が n 秒後に同じ点にいる確率は

$$p(n)=(P_{An})^2+(P_{Bn})^2+(P_{Cn})^2=\frac{1}{9}\left[\left\{1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2+2\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2\right]=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (\text{答})$$

n 秒後に粒子がA点にいる確率は、その1秒前の $(n-1)$ 秒後においてB点にいる確率の $\frac{1}{2}$ とC点にいる確率の $\frac{1}{2}$ の和である。なぜなら、Bにいる粒子は $\frac{1}{2}$ の確率でAに移動し、同様にCにいる粒子は $\frac{1}{2}$ の確率でAに移動するからである。同様に、 n 秒後に粒子がB点、C点にいる確率を求めることができる。これが①、②、③である。

④の関係を適用すれば、 P_{An} 、 P_{Bn} 、 P_{Cn} を数列の漸化式として表現できる。

2つの粒子が同時にA点にいる確率は、1つがA点にいる確率ともう1つがA点にいる確率の積だから、 $(P_{An})^2$ である。同じ点にいるということは、A、B、Cのいずれかにいるということだから、 $p(n)=(P_{An})^2+(P_{Bn})^2+(P_{Cn})^2$ ということになる。

別解の考え方の流れは解答と比較して容易なのだが、計算がやや煩瑣である。

[3]

(35点)

$\triangle ABC$ は、条件 $\angle B=2\angle A$ 、 $BC=1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする。このとき、 $\cos \angle B$ を求めよ。

<解答>

図2を参照する。 $\triangle ABC$ の面積は、 $S=\frac{1}{2}bc\sin \theta$

$$\text{正弦定理により、}\frac{1}{\sin \theta}=\frac{b}{\sin 2\theta}=\frac{c}{\sin (\pi -3\theta)}=\frac{c}{\sin 3\theta}$$

$$\text{したがって、}b=\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}=2\cos \theta, \quad c=\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta}$$

$$S=\sin 3\theta \cos \theta=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$$

$f(\theta)=\sin 4\theta+\sin 2\theta$ とおく。 $f'(\theta)=4\cos 4\theta+2\cos 2\theta=0$ とおくと、

$$2\cos 4\theta+\cos 2\theta=2(2\cos^2 2\theta-1)+\cos 2\theta=4\cos^2 2\theta+\cos 2\theta-2=0 \text{ により}$$

$$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{33}-1}{8} \text{ を得る。これを満たす}\theta \text{を}\theta_0 \text{とすれば、}f'(\theta_0)=0 \text{である。}$$

$$0<3\theta<\pi \text{ だから } 0<\theta<\frac{\pi}{3}, \text{ また } \cos \frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2} \text{ だから } \theta_0<\frac{\pi}{3} \text{ である。}$$

$f(\theta)$ は図3のように変化するので、 $\theta=\theta_0$ のとき、 $f(\theta)=2S$ が最大となる。

$$\text{以上の結果、}\triangle ABC \text{の面積が最大となるとき、}\cos \angle B=\cos 2\theta_0=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$$

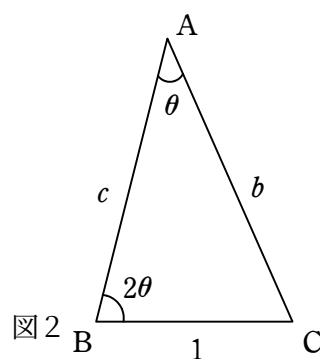


図2

図3

θ	0	θ_0	$\frac{\pi}{3}$
$f'(\theta)$		+	0
$f(\theta)$	0		0

<解説>

正弦定理を利用すれば、対象とする三角形の面積を正弦関数のみからなる簡単な式で表すことができる。

4

(35点)

実数の定数 a, b に対して、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める。すべての実数 x で不等式

$$f(x) \leq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$$

が成り立つような点 (a, b) の範囲を図示せよ。

<解答>

与式を因数分解して、 $f(x)^3 - 2f(x)^2 - f(x) + 2 = \{f(x) + 1\}\{f(x) - 1\}\{f(x) - 2\} \geq 0$

したがって、 $-1 \leq f(x) \leq 1$ ①

$$2 \leq f(x) \quad ②$$

$$\text{①から、} -1 \leq \frac{ax+b}{x^2+x+1} \leq 1$$

$$\text{したがって、} x^2 + (1+a)x + 1 + b = \left\{x + \frac{1+a}{2}\right\}^2 - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + 1 + b \geq 0 \quad ③$$

$$x^2 + (1-a)x + 1 - b = \left\{x + \frac{1-a}{2}\right\}^2 - \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + 1 - b \geq 0 \quad ④$$

③、④がすべての実数 x で成立するためには、

$$\text{③から、} b \geq \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} - \frac{3}{4} \quad ⑤$$

$$\text{④から、} b \leq -\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{3}{4} \quad ⑥$$

$$\text{一方②から、} 2x^2 + (2-a)x + 2 - b \leq 0 \quad ⑦$$

⑦の左辺は x が大きくなるにつれ大きくなるので、すべての実数 x に対し⑦は成立することはない。

以上により、⑤、⑥によって定まる (a, b) が求める範囲であり、図4のようになる。

ただし、境界線は含む。

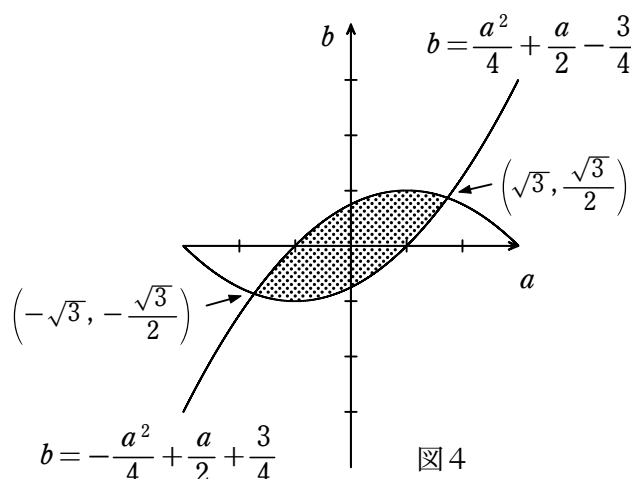


図 4

<解説>

与式を変形して、 $f(x)$ の範囲①、②を求めることは容易だろう。すべての実数 x で成立するということは、 x が $-\infty$ から ∞ に変化しても成立するということである。しかるに、①から得られる③、④式は2次式であり、最小値が存在するので、最小値が③、④式を満足すれば良いことになる。

②式を変形すると、⑦式になり、 x が $\pm\infty$ で ∞ に増加するから、成立しないことは明らかである。

5

(30点)

自然数 a, b はどちらも3で割り切れないが、 $a^3 + b^3$ は81で割り切れる。このような a, b の組 (a, b) のうち、 $a^2 + b^2$ の値を最小にするものと、そのときの $a^2 + b^2$ の値を求めよ。

<解答>

p, r を0以上の整数として、

$$a = 3p + q \quad (q = 1, 2)$$

$$b = 3r + s \quad (s = 1, 2)$$

のようにおく。 t を自然数として、

$$a^3 + b^3 = (3p + q)^3 + (3r + s)^3 = 3^3(p^3 + r^3 + p^2q + r^2s) + 3^2(pq^2 + rs^2) + q^3 + s^3 = 81t = 3^4t$$

したがって、 u を自然数として、 $q^3 + s^3 = 3^2u$ ①とおける。

①を満たすのは、 $q = 2, s = 1$ または $q = 1, s = 2$ であって、 $q^3 + s^3 = 3^2$ で、 $u = 1$ である。

$q = 2, s = 1$ または $q = 1, s = 2$ は、 a と b を入れ替えるだけだから、

$a = 3p + 2, b = 3r + 1$ とおいて考える。

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (3p + 2 + 3r + 1)\{(3p + 2)^2 - (3p + 2)(3r + 1) + (3r + 1)^2\} \\ &= 3(p + r + 1)(9p^2 + 9p + 3 - 9pr + 9r^2) = 9(p + r + 1)(3p^2 + 3p + 1 - 3pr + 3r^2) = 3^4t \end{aligned}$$

$$\therefore (p + r + 1)(3p^2 + 3p + 1 - 3pr + 3r^2) = 3^2t$$

$(3p^2 + 3p + 1 - 3pr + 3r^2)$ は3の倍数にはならないから、 v を自然数として、 $p + r + 1 = 3^2v$

$$p + r + 1 = \frac{a + b}{3} \text{ だから、 } a + b = 3^3v \quad \text{②}$$

最小の $a^2 + b^2$ を求めるのだから、②で $v = 1$ として、 $a + b = 27$ の場合を考えれば良い。

$b=27-a$ の直線上の整数の組(a, b)で最も原点から近いのは、明らかに(13, 14)と(14, 13)である。
これらは3の倍数ではない。

したがって、 a^2+b^2 の値を最小にする(a, b)は(13, 14)または(14, 13), そのとき $a^2+b^2=365$

<解説>

3で割り切れない自然数 a, b を, まずは,

$$a=3p+q \quad (q=1, 2)$$

$$b=3r+s \quad (s=1, 2)$$

ようにおくのがポイントである。ついで、 a^3+b^3 は81で割り切れるという題意から、いかなる事実が得られるかを考える。①式を得るのが次のポイントである。

次に $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ の因数分解から得られる事実は何かを検討する。すると、真につごう良く、②式が得られる。これより、 $a+b=27$ という単純な関係式が得られる。本問題は、この条件の下で、 a^2+b^2 の最小値を求めるというか簡明な問題に帰着する。

$$a^2+b^2=a^2+(27-a)^2=2a^2-54a+3^6=2\left(a-\frac{27}{2}\right)^2+\frac{3^6}{2} \quad \textcircled{3}$$

$\frac{27}{2}=13.5$ に最も近い3で割り切れない自然数, すなわち $a=13$ または 14 で③式は最小値をとる。

$a+b=27$ を導く方法には、細かくみれば、いろいろな方法があるだろう。読者なりにトライしてほしい。

6

(35点)

双曲線 $y=\frac{1}{x}$ の第1象限にある部分と、原点Oを中心とする円の第1象限にある部分を、それぞれ C_1, C_2 とする。 C_1 と C_2 は2つの異なる点A, Bで交わり、点Aにおける C_1 の接線 l と線分OAのなす角は $\frac{\pi}{6}$ であるとする。このとき、 C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

<解答>

図5を参照する。

$$C_1 \text{の式は } y=\frac{1}{x} \quad (0 \leq x)$$

$$C_2 \text{の式は } x^2+y^2=r^2 \quad (0 \leq x \leq r, 0 \leq y)$$

点Aの座標を(x_A, y_A)とする。点Aにおける C_1 の接線 l の傾きは $y'=\frac{-1}{x^2}$ だから、 $-\frac{1}{x_A^2}$

$$\tan \alpha = \frac{y_A}{x_A} = \frac{1}{x_A^2}, \quad \tan \beta = -\frac{1}{x_A^2}, \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{6}$$

$$\tan \beta = \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\tan \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{\tan \alpha}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} \tan \alpha + 1}{\sqrt{3} - \tan \alpha}$$

$$\text{したがって, } -\frac{1}{x_A^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{x_A^2} + 1}{\sqrt{3} - \frac{1}{x_A^2}}, \quad x_A^4 + 2\sqrt{3}x_A^2 - 1 = 0, \quad x_A^2 = 2 - \sqrt{3} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}$$

$$x_A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \quad y_A = \frac{1}{x_A} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \quad r^2 = x_A^2 + y_A^2 = 4$$

$y = \frac{1}{x}$ と $x^2 + y^2 = r^2 = 4$ のもう一つの交点Bの座標 (x_B, y_B) は, $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 4$ から,

$$x_B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \quad y_B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 2$ だから $\triangle ABO$ は正三角形, したがって $\angle AOB = 60^\circ$

C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積 S

$$= (\text{C}_1 \text{ と直線 AB で囲まれた図形の面積}) + (\text{C}_2 \text{ と直線 AB で囲まれた図形の面積}) = S_1 + S_2$$

$$S_1 = (\text{扇形 ABO の面積}) - (\text{三角形 ABO の面積}) = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

直線 AB の方程式は $y = -x + \sqrt{6}$ だから,

$$S_2 = \int_{x_A}^{x_B} \left(-x + \sqrt{6} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + \sqrt{6}x - \log|x| \right]_{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} + \log(2 - \sqrt{3})$$

$$S = S_1 + S_2 = \log(2 - \sqrt{3}) + \frac{2\pi}{3} \quad (\text{答})$$

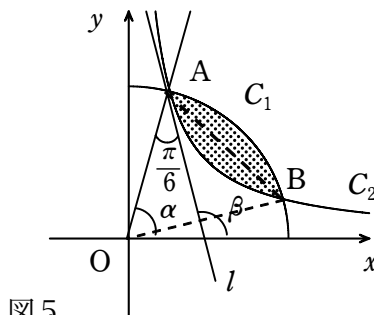


図 5

<解説>

交点 A, B の座標を求め, 面積積分をすることを考える。関数図形の問題では, 当然ながら, 図をできるだけ正確に描いて考える。すると, 計算からだけでは見えない図形特徴が見えてきて, 思考を進めるヒントが見えてくる。

直線の傾きは, x 軸となす角のタンジェント (正接) であることを知っていなければならない。そうすれば, 交点 A, B の座標は容易に求まるであろう。

さて面積を求めるためには, $S = \int_{x_A}^{x_B} \left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{1}{x} \right) dx$ とするのが常套的であろう。そのうえで,

$$x = 2\sin\theta \text{ とおくと, } \sqrt{4 - x^2} = 2\cos\theta, \quad dx = (2\cos\theta)d\theta, \quad \sqrt{4 - x^2} dx = 4\cos^2\theta d\theta = 2(\cos 2\theta + 1)$$

$$\int_{x_A}^{x_B} \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_{\theta_A}^{\theta_B} (\cos 2\theta + 1) d\theta = 2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta \right]_{\theta_A}^{\theta_B} = (\sin 2\theta_B - \sin 2\theta_A) + 2(\theta_B - \theta_A)$$

となる。しかし、 θ_B , θ_A を具体的に求めることが困難である。

ここは、積分計算にとりかかる前に、描いた図形を凝視しよう。特に、円曲線に関わる計算では、積分計算を用いなくても良い場合がある。曲線 C_1 と C_2 は直線 $y=x$ に関して対称だから、交点A, Bも対称だから、 $\triangle ABO$ は2等辺三角形である。さらに、 $\triangle ABO$ は正三角形に見えるので、念のためABを計算する。容易に2と暗算できる。したがって、円弧の部分の面積を計算できる。

<理系総評>

各分野にわたり、標準的以上の難易度の問題が揃っている。6問をざっと読み、難易度や得手不得手を判断し、解答順序を決めよう。筆者は、[3], [4], [1], [6], [2], [5]の順序で取り組みたいと思った。確率や整数の問題は、解答方針に着眼、着想が必要であり、論理思考力も必要とするので、後回しにしたいという心理が働いてしまう。しかし、今年確率の問題は、例年に比して、やや易しいので先に着手しても良いかも知れない。

[3], [4], [1], [6]は完答し、[2], [5]は少なくとも部分点は得たいところだ。

[1]

直線のベクトル表示による取扱いの問題。3次元座標を扱うので、一見、複雑な問題と思いがちだが、そうではない。ある点を通りベクトルに平行な直線の表現式、ベクトルの内積、直交するベクトルの内積、などの基礎事項を的確に理解し応用できること。難易度B。

[2]

確率漸化式の問題。去年も感じたのだが、さらに易化したように思える。 n 秒後の確率は1秒前の $(n-1)$ 秒後の確率によって表現できれば、漸化式が得られ、数列の一般項を求める問題になる。この考え方、表現形式、計算は難しくない。難易度はB。

[3]

題意は簡明で、解答方針に迷うことはないだろう。計算も難しいところはない。正弦定理と三角関数の微分が基礎となる問題である。着実に完答したい。難易度C。

[4]

2次式の範囲に関する問題。題意は簡明であり、扱う不等式も単純なものだから、容易に扱えるだろう。難易度はBー。

[5]

整数の問題である。解答方針の構想に困難があるから、難問である。方針の構想に頭を悩ますより、まずは与えられた条件、 $a^3 + b^3 = 3^4 t$ (t は自然数) から、いかなるわかり易い条件が得られるかを検討するために、鉛筆を動かそう。そのためには、3で割り切れない自然数を $a = 3p + q$ のようにおくことが、着眼の一つだ。すると、うまいことに、 $q^3 + s^3 = 3^2 u$ (u は自然数) が得られ、 $q = 2$, $r = 1$ のような具体的な条件が得られることがわかる。

もう一つの着眼は、因数分解 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 3^4 t$ から何か得られないかと考えること

だ。すると、 $p+r+1=3^2v$ 、 $a+b=3^3v$ (v は自然数) のような簡明な条件が得られる。

以上のような、着眼、着想が必要なのだが、初めから結果が見えているわけではない。やみくもに、鉛筆を動かしても望ましい結果が得られるわけでもない。できるだけ、単純な計算に取り組んで、良い見通しが得られないかを考えることが大事だろう。難易度A。

⑥

題意は簡明な関数図形の問題だから、解答方針に惑うことはないだろう。ただし、安易に積分計算を行うと、迷路に入る。図形をできるだけいねいに描いて、凝視してできるだけ単純な計算ですむようにすることが大事だ。難易度はB。

140826

数学 (文系)

120分

①

(30点)

$0 \leq \theta < 90^\circ$ とする. x についての4次方程式

$$\{x^2 - 2(\cos \theta)x - \cos \theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan \theta)x + 3\} = 0$$

は虚数解を少なくとも1つ持つことを示せ。

<解答>

与えられた4次方程式から、

$$x^2 - 2(\cos \theta)x - \cos \theta + 1 = 0 \quad \text{①} \quad \text{または、}$$

$$x^2 + 2(\tan \theta)x + 3 = 0 \quad \text{②} \quad \text{である。}$$

①の解の判別式 $D = \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 < 0$, すなわち $\frac{-\sqrt{5}-1}{2} < \cos \theta < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ③ のとき

2次方程式 ① は虚数解をもつ。ただし $0 \leq \theta < 90^\circ$ だから、③は $0 < \cos \theta < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ④ である。

$\cos \theta \neq 0$ だから、虚数解は2つである。 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ とすれば、④ から $\alpha < \theta < 90^\circ$ ⑤

②の解の判別式 $D = \tan^2 \theta - 3 < 0$, すなわち $-\sqrt{3} < \tan \theta < \sqrt{3}$ ⑥ のとき

2次方程式 ② は虚数解をもつ。ただし、 $0 \leq \theta < 90^\circ$ だから、⑥ は $0 \leq \tan \theta < \sqrt{3}$ ⑦ である。

$\tan \beta = \sqrt{3}$ するとき、 $\beta = 60^\circ$ だから、⑦から $0 \leq \theta < 60^\circ$

$\theta = 0$ のとき、 $\tan \theta = 0$ で ② の x の1次の項はなくなるので、虚数解は1つである。それ以外の範囲では、虚数解は2つである。

また、 $\cos \alpha > \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$ だから、 $\alpha < 60^\circ$ である。

以上によって、

$\theta = 0$ では、② が1つの虚数解をもつので、4次方程式は1つの虚数解をもつ。

$0 < \theta \leq \alpha$ では、② が2つの虚数解をもつので、4次方程式は2つの虚数解をもつ。

$\alpha < \theta < 60^\circ$ では、①、② がそれぞれ2つの虚数解をもつので、4次方程式は4つの虚数解をもつ。

$60^\circ \leq \theta < 90^\circ$ では、① が2つの虚数解をもつので、4次方程式は2つの虚数解をもつ。

以上によって、与えられた4次方程式は少なくとも虚数解を1つもつ。

<解説>

与えられた4次方程式は2つの2次方程式の積だから、それぞれの2次方程式が虚数解をもつ条件を考えればよい。虚数解を与える条件は $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ に対する範囲として定まる。これを θ に対する条件に置き換える。

2つの2次方程式が虚数解をもつ θ の範囲を重ね合せて、 θ の範囲に応じて、虚数解の数を明らかにする。最終的に、与えられた $0 \leq \theta < 90^\circ$ において、必ず虚数解が存在することを示す。

2

(30点)

t を実数とする。 $y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $P(1, t)$ から接線を引く。

- (1) 接線がちょうど1本だけ引けるような t の範囲を求めよ。
- (2) t が(1)で求めた範囲を動くとき、 $P(1, t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ。

<解答>

(1)

$y=x^3-x$ の導関数は、 $y'=3x^2-1$

$y=x^3-x$ 上の点 (a, a^3-a) における接線の方程式は、 $y=(3a^2-1)x-2a^3$ ①

これが、点 $P(1, t)$ を通るとすれば、 $t=-2a^3+3a^2-1$ ②

接線がちょうど1本ということは、②を満たす a が1個ということである。

$f(a)=-2a^3+3a^2-1$ とすれば、 $f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$

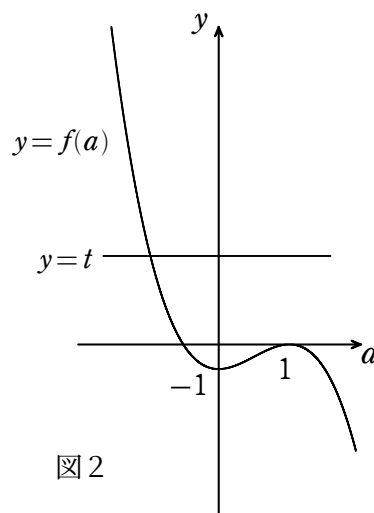
$f(a)$ は図1のような変化をする。 $y=f(a)$ のグラフは図2である。

$y=f(a)$ と $y=t$ とが1点で交わる、すなわち接線がちょうど1本となる t の範囲は

$t > 0, t < -1$ (答)

図1

a		0		1	
$f'(a)$	-	0	+	0	-
$f(a)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$



(2)

(1)において、 $f(a)=t>0$ から $a<-\frac{1}{2}$ ，また $f(a)=t<-1$ から $a>\frac{3}{2}$

$y=x^3-x$ と接線②の交点は、 $x^3-x=(3a^2-1)x-2a^3$ を解いて、 $(-2a, -8a^3+2a)$

(i) $a < -\frac{1}{2}$ のとき

$$S(t) = \int_a^{-2a} \{(3a^2-1)x - 2a^3 - (x^3-x)\} dx = \left[\frac{3}{2}a^2x^2 - 2a^3x - \frac{x^4}{4} \right]_a^{-2a} = \frac{27}{4}a^4 > \frac{27}{64}$$

(ii) $a > \frac{3}{2}$ のとき

$$S(t) = \int_{-2a}^a \{(x^3-x) - (3a^2-1)x + 2a^3\} dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}a^2x^2 + 2a^3x \right]_{-2a}^a = \frac{27}{4}a^4 > \frac{2187}{64}$$

以上によって、 $S(t) > \frac{27}{64}$

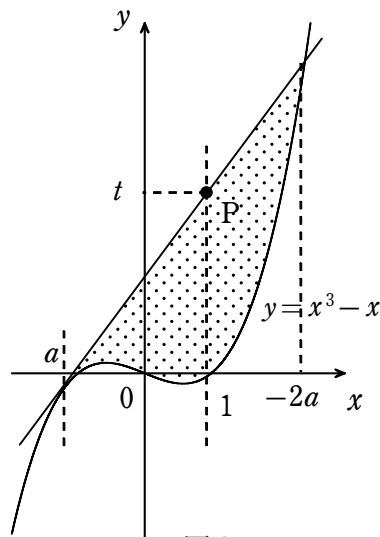


図 3

<解説>

接線が1本という条件を求める数式を、どのように表現するかがポイントである。それが、②を満たす a が1個ということである。この条件から得られる t を見積もるためには、グラフを描いて判断するのが速い。

(2)もグラフを描いて、面積を求めるための被積分関数と積分範囲を確認して計算を進める。

3

(30点)

理系の1に同じ。

4

(30点)

次の式

$$a_1=2, \quad a_{n+1}=2a_n-1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 次の不等式

$$a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし、 $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

<解答>

(1)

$$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1) = 2^2(a_{n-1} - 1) = \dots = 2^n(a_1 - 1) = 2^n \text{ だから,}$$

$$a_n = 2^{n-1} + 1$$

(2)

$$a_n^2 - 2a_n = (2^{n-1} + 1)^2 - 2(2^{n-1} + 1) = 2^{2n-2} - 1 > 10^{15}$$

$$\log_{10} 2^{2n-2} = (2n-2)\log_{10} 2 > \log_{10}(10^{15} + 1) = \log_{10} 10^{15} \left(1 + \frac{1}{10^{15}}\right) = 15 + \delta$$

$$\text{ただし } \delta = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{10^{15}}\right) \doteq 0$$

$$\text{したがって, } 2n-2 > \frac{15+\delta}{\log_{10} 2} > \frac{15+\delta}{0.3011} = 49.81 + \delta_1, \text{ ただし } \delta_1 = \frac{\delta}{0.3011} \doteq 0,$$

$$n > 25.9 + \frac{1}{2}\delta_1, \text{ これを満たす最小の自然数は26}$$

$$\text{一方, } n=26 \text{ とおけば, } 2^{2n-2} = 2^{50} = (2^{10})^5 > (10^3 + 24)^5 > 10^{15} + 24^5 > 10^{15} + 1 \text{ である。}$$

$$\text{したがって, } a_n^2 - 2a_n > 10^{15} \text{ を満たす最小の自然数は26}$$

<解説>

(1)

数列の一般項を求める常套的方法を直ちに思い出そう。

(2)

ここでは、与えられた $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ から、 $\log_{10} 2 < 0.3011$ のみを適用している。

$$0.3010 < \log_{10} 2 \text{ を適用すると, } 2n-2 > \frac{15+\delta}{\log_{10} 2} \text{ において, } 2n-2 < \frac{15+\delta}{0.3010} = 49.84 + \delta_2 \text{ となる可能性が}$$

$$\text{ある。すると, } n < 25.92 + \frac{1}{2}\delta_2 \text{ となって, } 25.9 + \frac{1}{2}\delta_1 < n < 25.92 + \frac{1}{2}\delta_2 \text{ で } n \text{ が定まらない。そこで,}$$

$$n=26 \text{ とおいたとき, } a_n^2 - 2a_n = 2^{2n-2} - 1 > 10^{15} \text{ を満足するかを確認しておく。}$$

もう少し、的確に求める別解を紹介する。

$$x \geq 1 \text{ の実数として, } 2^{2x-2} - 1 = 10^{15} \text{ とおけば,}$$

$$\log_{10}(2^{2x-2}) = (2x-2)\log_{10} 2 = \log_{10}(10^{15} + 1) > \log_{10} 10^{15} \left(1 + \frac{1}{10^{15}}\right) = 15 + \delta$$

$$\text{ただし } \delta = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{10^{15}}\right) \doteq 0$$

$$\text{したがって } 2x-2 = \frac{15+\delta}{\log_{10} 2}, \text{ } 0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011 \text{ であるから,}$$

$$49.81 + \delta_1 < \frac{15 + \delta}{0.3011} < \frac{15 + \delta}{\log_{10} 2} = 2x - 2 < \frac{15 + \delta}{0.3010} < 49.84 + \delta_2,$$

$$\text{ただし } \delta_1 = \frac{\delta}{0.3011} \div 0, \quad \delta_2 = \frac{\delta}{0.3010} \div 0$$

$$\text{したがって, } \frac{1}{2}(49.81 + \delta_1) + 1 < x < \frac{1}{2}(49.84 + \delta_2) + 1, \quad \therefore 25.9 + \frac{1}{2}\delta_1 < x < 25.92 + \frac{1}{2}\delta_2 < 26$$

$$2^{2n-2} - 1 > 10^{15} = 2^{2x-2} - 1 \text{ だから, } n > x \text{ なる最小の整数は } 26$$

5

(30点)

1から20までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり、それぞれの目が出る確率は等しいものとする。A、B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ、大きな目を出した方はその目を得点とし、小さな目を出した方は得点を0とする。また同じ目が出た場合は、A、B ともに得点を0とする。このとき、Aの得点の期待値を求めよ。

<解答>

A がサイコロを投げ、 k の目を出したとする。B が $k-1$ 以下の目を出す確率は $\frac{k-1}{20}$

したがって、 k の目が出たときのAの得点の期待値は $k \times \frac{k-1}{20}$

k は1から20まで等しい確率 $\frac{1}{20}$ で発生するから、Aの得点の期待値は $\frac{1}{20} \times \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} k(k-1)$

$$k(k-1) = \frac{1}{3} \{ (k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) \} \text{ だから,}$$

$$\sum_{k=1}^{20} k(k-1) = \frac{1}{3} \times 21 \times 20 \times 19 = 7 \times 20 \times 19$$

$$\text{したがって, Aの得点の期待値は } \frac{1}{20} \times \frac{1}{20} (7 \times 20 \times 19) = \frac{133}{20} \quad (\text{答})$$

<解説>

A の目が k のとき、B が $k-1$ 以下の目のとき、A は得点を得る。

$$f(k) = (k+1)k(k-1) \text{ とおくと, } 3k(k-1) = f(k) - f(k-1)$$

したがって、 $\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \{ f(k) - f(k-1) \} = \frac{1}{3} \{ f(n) - f(0) \} = \frac{1}{3} (n+1)n(n-1)$ を得る。

$\sum_{k=1}^{20} k(k-1)$ の計算方法を自分で考案することは容易ではない。しかし、数学Bの教科書の数列の章

に出ている。このように、数列を1次元多い多項式の階差数列で表わすことによって、数列の和の表式を求めることができることを覚えておこう。

数学Bの教科書に出ているように、 $\sum_{k=1}^n k^2$ を求める方法は以下である。

$$k^2 = \frac{1}{3} \{ k^3 - (k-1)^3 \} + k - \frac{1}{3} \text{ だから,}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \{k^3 - (k-1)^3\} + \sum_{k=1}^n k - \frac{n}{3} = \frac{n^3}{3} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ここでも、 k^2 を1次元多い k^3 を含む多項式の階差数列によって表すことにより、 k^2 の数列の和の表式を求めることができる。

<文系総評>

文系とはいえ、120分150点満点の数学入試で、汗をかきそうな問題がそろっている。とはいえ、当然ながら、極端に難しい問題はない。私なら、[4]、[1]、[5]、[3]、[2]の順で着手し、前3題は完答し、全体として80%近い得点を得たいところだ。

[1]

題意は簡明であり、解答方針はすぐに定めることができる。 θ の範囲に応じて、虚数解の数をていねいに数えること。難易度はB－。

[2]

関数図形の微分積分の問題。「接線がちょうど1本だけひける」という要件を数学的に表現するとどういうことか、ここを的確に把握することが必要だ。グラフをていねいに描いて、理解を深める。難易度はB＋。

[3]

理系の[1]と同じ問題。文系の問題としては難しいかも知れない。難易度B＋。

[4]

この数列の一般項を求める方法は基本的なものだから、スムーズに解答したい。ここで必要となる対数演算も基本的なものである。難易度C。

[5]

表式を求める確率の思考過程は難しいものではない。スムーズに解答したい。計算がやや難しいのだが、教科書に掲載されているので、理解しておきたい。難易度B。

140903