平成 26 年度入学試験問題

数　　学（理，医，歯，工学部）

注　意　事　項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で 5 ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された 2 箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部，学科	解答すべき問題（○印）					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部（数学科，物理学科）及び工学部	○	○	○	○	○	5 枚	120 分
理学部（化学科，生物学科，自然環境科学科）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○		4 枚	90 分
医学部（医学科）及び歯学部		○	○	○	○	4 枚	90 分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 a を $a \geqq 0$ となる実数とし，θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2\sin 2\theta + 4a(\cos\theta - \sin\theta) + 1$$

とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $t = \cos\theta - \sin\theta$ とおく。このとき，$f(\theta)$ を a, t を用いて表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2 一辺の長さが1の正四面体OABCを考える。辺ABを2：1に内分する点をPとし，線分CPを3：1に内分する点をQとする。また，直線OC上の点Rを$\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$となるようにとる。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{OQ}$の大きさ$\left|\overrightarrow{OQ}\right|$を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OR}$と$\overrightarrow{RC}$の大きさの比$\left|\overrightarrow{OR}\right| : \left|\overrightarrow{RC}\right|$を求めよ。

(3) $\triangle$OQRの面積を求めよ。

3 a，b，c を実数とする。行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ a & -3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ は $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a，b，c の値を求めよ。

(2) A は逆行列をもつことを示し，A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4) 自然数 n に対して，$(A+6A^{-1})^n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数$f(x)=(-4x^2+2)e^{-x^2}$について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の極値を求めよ。

(2) aを$a \geqq 0$となる実数とし，$I(a)=\int_0^a e^{-x^2}dx$とする。このとき，定積分$\int_0^a x^2e^{-x^2}dx$をa，$I(a)$を用いて表せ。

(3) 曲線$y=f(x)$，x軸，y軸および直線$x=5$で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ 自然数 n に対して，$a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して，不等式

$$\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx - a_n \right| \leqq \frac{1}{2n+3}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。