

# 2014 ( H26 ) 年度 新潟大学 前期 入学試験 数学解説

< 理・医・歯・工学部 >

1  $a$ を $a \geq 0$ となる実数とし,  $\theta$ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2\sin 2\theta + 4a(\cos \theta - \sin \theta) + 1$$

とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)  $t = \cos \theta - \sin \theta$ とおく。このとき,  $f(\theta)$ を $a, t$ を用いて表せ。

(2)  $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき,  $t$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)  $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき,  $f(\theta)$ の最大値と最小値を $a$ を用いて表せ。

< 解答 >

(1)

$$t^2 = (\cos \theta - \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta = 1 - \sin 2\theta$$

$\sin 2\theta = 1 - t^2$ , これを与式に代入すれば,

$$f(\theta) = 2(1 - t^2) + 4at + 1 = -2t^2 + 4at + 3$$

(2)

$$\begin{aligned} t = \cos \theta - \sin \theta &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta \right) \\ &= \sqrt{2} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ から, } \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi, \text{ すると } -1 \leq \cos \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって  $-\sqrt{2} \leq t \leq 1$

(3)

$$f(\theta) = -2t^2 + 4at + 3 = -2(t-a)^2 + 2a^2 + 3$$

図1に示すように,  $0 \leq a < 1$ のとき,  $t=a$ で最大値となるが,  $1 \leq a$ のとき  $t=1$ で最大値となる。

)  $0 \leq a < 1$ のとき

$t=a$ のとき, 最大値  $2a^2 + 3$

$t=-\sqrt{2}$ のとき, 最小値  $-4\sqrt{2}a - 1$

)  $1 \leq a$ のとき

$t=1$ のとき, 最大値  $4a + 1$

$t=-\sqrt{2}$ のとき, 最小値  $-4\sqrt{2}a - 1$

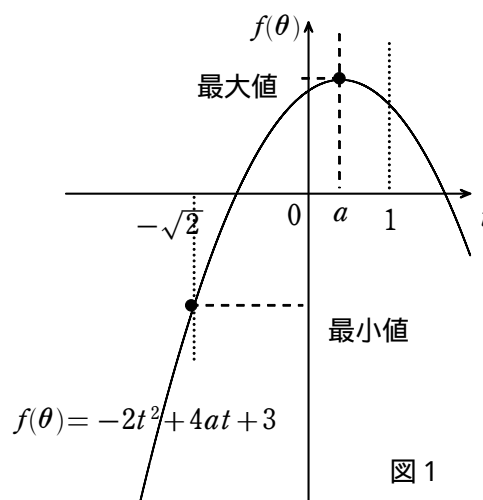


図 1

< 解説 >

変数の範囲が限定された二次関数の最大値, 最小値問題である。変数の範囲を限定するために, 変数を三角関数の関数として表している。

(1)

$\sin 2\theta$  を  $t$  によって表すことを考える。

(2)

三角関数の合成によって,  $t$  を単一の三角関数によって表せば良い。三角関数の合成は習熟すること。

(3)

$a$  の値によって, 最大値, 最小値が異なるので, グラフを描いて考えると良い。

$a \geq 0$  なので,  $0 \leq a < 1$  と  $1 \leq a$  の 2 つの場合について考えればよい。いずれも,  $t = -\sqrt{2}$  で最小値をとる。

**[2]** 一辺の長さが1の正四面体OABCを考える。辺ABを2:1に内分する点をPとし, 線分CPを3:1に内分する点をQとする。また, 直線OC上の点Rを  $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$  となるようにとる。  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。さらに,  $\overrightarrow{OQ}$  の大きさ  $|\overrightarrow{OQ}|$  を求めよ。

(2)  $\overrightarrow{OR}$  と  $\overrightarrow{RC}$  の大きさの比  $|\overrightarrow{OR}| : |\overrightarrow{RC}|$  を求めよ。

(3) OQRの面積を求めよ。

< 解答 >

(1)

図2を参照する。QはCPを3:1に内分する点だから

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OP}$$

PはABを2:1に内分する点だから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{2}{4}\vec{b} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{答})$$

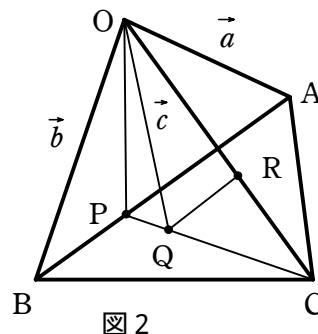


図2

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{16}(\vec{a} \cdot \vec{a} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ だから,}$$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = \frac{1}{16}(1+4+1+2+2+1) = \frac{11}{16}, \therefore |\overrightarrow{OQ}| = \frac{\sqrt{11}}{4} \quad (\text{答})$$

(2)

$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OC} = k\vec{c}$  とおく。  $0 < k < 1$  である。

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR} \text{ だから, } k\vec{c} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) + \overrightarrow{QR}$$

$$\text{両辺に対して, } \vec{c} \text{ との内積をとると, } k\vec{c} \cdot \vec{c} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{c} + \overrightarrow{QR} \cdot \vec{c}$$

$$\overrightarrow{QR} \text{ と } \vec{c} \text{ は直交しているので, } \overrightarrow{QR} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{したがって, } k = \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{c} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$|\overrightarrow{OR}| = |k\vec{c}| = k = \frac{5}{8}, |\overrightarrow{RC}| = |(1-k)\vec{c}| = 1-k = \frac{3}{8}, \therefore |\overrightarrow{OR}| : |\overrightarrow{RC}| = 5 : 3$$

(3)

$$(2) \text{から}, \overrightarrow{QR} = k\vec{c} - \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = \frac{5}{8}\vec{c} - \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = \frac{3}{8}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$OQR = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OR}| \cdot |\overrightarrow{QR}|, |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{|\overrightarrow{QR}|^2} = \frac{\sqrt{19}}{8}, \therefore OQR = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{\sqrt{19}}{8} = \frac{5\sqrt{19}}{128}$$

< 解説 >

立体図形をベクトルによって取り扱う問題。

(1)

PはABを2:1に内分する点だから,  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$  と直ぐに表現したい(図3参照)。

ベクトルを表現する方法にはいろいろあるので, 別解もいろいろある。

別解

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ} = \vec{c} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CP}$$

PはABを2:1に内分する点だから,

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = -\vec{c} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{c} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = -3\vec{c} + \vec{a} + 2\vec{b}$$

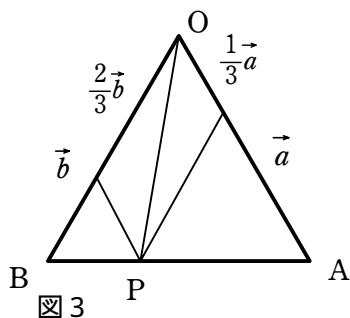


図3

さらに別解, とはいえ, どのベクトルを利用するか, といった程度の違いで, 基本は同じ。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \vec{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) = \vec{b} + \frac{1}{3}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{CP} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = -\vec{c} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{c} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = -3\vec{c} + \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{12}(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) - \frac{1}{12}(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$$

(2)

$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OC} = k\vec{c}$  ( $0 < k < 1$ ) のようにして考えるのがポイントである。

直交しているベクトルの内積は0になることを利用する。

(3)

(2)での考察によって,  $\overrightarrow{QR}$  が直ちに求まる。

[3]  $a, b, c$  を実数とする。  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$  は  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  を満たすとする。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a, b, c$  の値を求めよ。
- (2)  $A$  は逆行列をもつことを示し、 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めよ。
- (3) 自然数  $n$  に対して、 $A^n$  を求めよ。
- (4) 自然数  $n$  に対して、 $(A + 6A^{-1})^n$  を求めよ。

< 解答 >

(1)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \text{したがって } AP = P \begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2a-6 & a+18 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2b+c \\ 6 & 2b-6c \end{pmatrix}$$

, の各成分を比較して,

$$2b+c=-4$$

$$2a-6=6$$

$$a+18=2b-6c$$

$$\text{これより, } a=6, b=0, c=-4 \quad (\text{答})$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Delta = 2 \times (-3) - 1 \times 6 = -12 \neq 0$  だから、 $A$  は逆行列をもつ。

$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{答})$$

(3)

$$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \left\{ \frac{-1}{14} \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} 3^n + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (-4)^n$$

$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} 3^n + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (-4)^n$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} 3^n + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} (-4)^n \quad (\text{答})$$

(4)

$$A + 6A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(A + 6A^{-1})P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \{P^{-1}(A + 6A^{-1})P\}^n \\ &= \{P^{-1}(A + 6A^{-1})P\} \cdot \{P^{-1}(A + 6A^{-1})P\} \cdots \{P^{-1}(A + 6A^{-1})P\} \cdot \{P^{-1}(A + 6A^{-1})P\} \\ &= P^{-1}(A + 6A^{-1})^n P = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 10^n & 0 \\ 0 & (-11)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 10^n & 0 \\ 0 & (-11)^n \end{pmatrix} \\ (A + 6A^{-1})^n &= \frac{1}{2^n} P \begin{pmatrix} 10^n & 0 \\ 0 & (-11)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^n & 0 \\ 0 & (-11)^n \end{pmatrix} \left\{ \frac{-1}{14} \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^n & 0 \\ 0 & (-11)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7 \times 2^n} \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} 10^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} (-11)^n \right\} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

< 解説 >

(1)

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{を計算するよりも, } AP = P \begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{を計算する方が早い。}$$

(2)

逆行列の存在条件と逆行列の公式を覚えていなければならない。もし思い出せなければ、難しくないので計算してしまえば良い。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2b_{11} + b_{21} = 1, \quad 2b_{12} + b_{22} = 0, \quad 6b_{11} - 3b_{21} = 0, \quad 6b_{12} - 3b_{22} = 1$$

$$, \quad \text{から } b_{11} = \frac{1}{4}, \quad b_{21} = \frac{1}{2}, \quad , \quad \text{から } b_{12} = \frac{1}{12}, \quad b_{22} = -\frac{1}{6} \text{ と求まる。}$$

(3)

これは着想が必要だ。しかし、ヒントが与えられている。 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ と対角行列になるということだ。そして、対角行列の積は対角行列になるという性質がある。

$$\text{したがって, } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \text{となる。}$$

加えて、 $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ となることに気づくことも必要だ。

こうした行列の取り扱いは、教科書に「行列の対角化」として記載されている内容とその応用だから、

教科書をしっかり読み込んでいれば、ピンとくるだろう。

(4)

一見難しそうなのだが、このように小問が続く場合は問題が誘導的に構成されていると想定して考えよう。(3)で $A^n$ を求めたのだから、同じように求めることができるのではないかと考えるのが自然だろう。そこで、まずは $A+6A^{-1}$ を計算する。続いて、 $P^{-1}(A+6A^{-1})P$ を計算すると、思惑通り対角行列になるではないか。ここまで解れば、(3)と同様の問題であるとして解くことができる。

**4** 関数 $f(x)=(-4x^2+2)e^{-x^2}$ について、次の問いに答えよ。

(1)  $f(x)$ の極値を求めよ。

(2)  $a$ を $a \geq 0$ となる実数とし、 $I(a)=\int_0^a e^{-x^2} dx$ とする。このとき、定積分 $\int_0^a x^2 e^{-x^2} dx$ を $a$ 、 $I(a)$ を用いて表せ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ 、 $x$ 軸、 $y$ 軸および直線 $x=5$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

< 解答 >

(1)

$$f'(x) = -8xe^{-x^2} - 2x(-4x^2+2)e^{-x^2} = 4(2x^2-3)xe^{-x^2} = 0 \text{ とすれば,}$$

$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}$  において、 $f'(x)=0$ となる。図4のように $f(x)$ は変化する。

したがって極値は、極小値 $f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=4e^{-\frac{3}{2}}$ 、極大値 $f(0)=2$ 、極小値 $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=4e^{-\frac{3}{2}}$  (答)

|         |                       |            |                      |
|---------|-----------------------|------------|----------------------|
| $x$     | $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ | $0$        | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ |
| $f'(x)$ | -                     | 0          | +                    |
| $f(x)$  | $\searrow$            | $\nearrow$ | $\searrow$           |
|         | $-4e^{-\frac{3}{2}}$  | $2$        | $-4e^{-\frac{3}{2}}$ |

図4

(2)

不定積分 $\int x^2 e^{-x^2} dx$ に対して部分積分法を適用すると、

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x^2} dx &= \int \left(\frac{-x}{2}\right)(-2xe^{-x^2})dx = \left(\frac{-x}{2}\right)e^{-x^2} - \int \left(\frac{-x}{2}\right)'(e^{-x^2})dx \\ &= \left(\frac{-x}{2}\right)e^{-x^2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \int_0^a x^2 e^{-x^2} dx = \left[ \frac{-xe^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} dx \right]_0^a = \frac{-ae^{-a^2}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^a e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{-ae^{-a^2}}{2} + \frac{1}{2} I(a) \quad (\text{答})$$

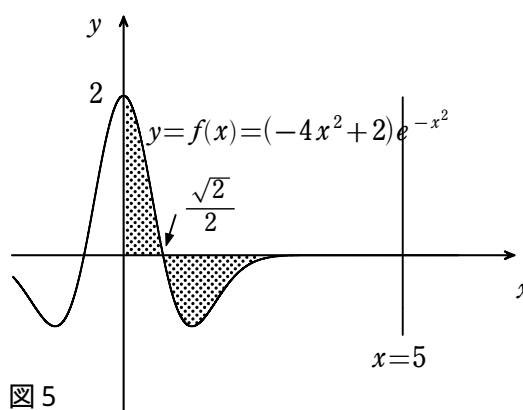
(3)

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a (-4x^2 + 2)e^{-x^2} dx = -4 \int_0^a x^2 e^{-x^2} dx + 2 \int_0^a e^{-x^2} dx = 2ae^{-a^2} - 2I(a) + 2I(a) = 2ae^{-a^2}$$

$$\text{求める面積は, } S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^5 -f(x)dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^5 f(x)dx$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^5 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx \text{ であるから, } S = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx - \int_0^5 f(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}, \quad \int_0^5 f(x)dx = 10e^{-25}, \quad \text{したがって } S = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} - 10e^{-25} \quad (\text{答})$$



< 解説 >

(1)

導関数を求めて、導関数=0とする $x$ が極値を与える。図4のような図を描いて、このことを明らかにする。常套的方法である。

(2)

部分積分法により、不定積分を実行する。部分積分法は積分の具体的実施で頻用される方法だから、教科書をよく読み、習熟しておきたい。その公式は

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

本問では被積分関数  $x^2 e^{-x^2} = \left(\frac{-x}{2}\right)(-2xe^{-x^2})$  とおくことがミソである。

つまり,  $f(x) = \frac{-x}{2}$ ,  $g(x) = e^{-x^2}$  とおく。

(3)

略図を描いて、求める面積の図形を概ね理解する。ここでは、 $x=5$ という値には特別の意味がなさそう。  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  より大きければ、良いという程度の意味合いで設定した値に過ぎない。

5 自然数  $n$  に対して,  $a_n = \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$  とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 自然数  $n$  に対して, 不等式

$$\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$  を求めよ。

(3) 自然数  $n$  に対して,  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$  となることを示せ。

(4) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$  を求めよ。

< 解答 >

(1)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| &= \left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx \right| \\ &= \left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| \end{aligned}$$

$$0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1} = x^{2n+2} \text{ だから,}$$

$$\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| = \left| \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| \leq \left| \int_0^1 x^{2n+2} dx \right| = \int_0^1 x^{2n+2} dx = \left[ \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+3}$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$x = \tan \theta \text{ とおくと, } dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad x^2 + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

また  $x=0$  で  $\theta=0$ ,  $x=1$  で  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , したがって

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{x^2 \{1 - (-x^2)^n\}}{1 - (-x^2)}$$

$\frac{x^2 \{1 - (-x^2)^n\}}{1 - (-x^2)}$  は, 初項  $x^2$ , 公比  $(-x^2)$  の等比数列の  $n$  項までの和だから,

$$\frac{x^2 \{1 - (-x^2)^n\}}{1 - (-x^2)} = \sum_{k=1}^n x^2 (-x^2)^{k-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{2k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^{2k}$$

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^{2k} dx = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$$

(4)

$$(1) \text{によって, } \left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| \leq \frac{1}{2n+3}$$

$$\text{したがって, } \frac{-1}{2n+3} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \leq \frac{1}{2n+3}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - \frac{1}{2n+3} \leq a_n \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx + \frac{1}{2n+3}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - \frac{1}{2n+3} \leq \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx + \frac{1}{2n+3}$$

したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - \frac{1}{2n+3} \right\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx + \frac{1}{2n+3} \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - \frac{1}{2n+3} \right\} = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx + \frac{1}{2n+3} \right\} = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{したがって, } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{\pi}{4} \quad (\text{答})$$

< 解説 >

(1)

与式を普通に変形して凝視すれば,  $\frac{1}{2n+3}$  が  $x^{2n+2}$  の積分から出てくる分数と解って, 証明に結びつくだろう。

(2)

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  の計算方法を自力で考案するのは難しい。教科書に定積分の方法として掲載されている。

$x = \tan \theta$  と変数変換することで容易に計算できる。これを失念していたら, おそらく手が出ない。

ただし,  $x^2$  を含む分数や  $\sqrt{\quad}$  の積分では, 三角関数への変数変換によって計算できる場合が多いというくらいは, 頭に入れておけば,  $x = \tan \theta$  あるいは  $x = \sin \theta$  といった変数変換に結びつくかも知れない。

(3)

$a_n$  の式を凝視して等比数列の和の公式として,  $\frac{x^2[1 - (-x^2)^n]}{1 - (-x^2)}$  を思いつくかどうか, 解答への分

かれ目だ。

筆者は初めは, 上記に気づけなかったもので, 下のような力まかせの方法を考えた。いかにも面倒である。上手に公式を使うと, 簡単に解けるという見本としてあえて記載しておく。見習うことのない

ように。

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \\
 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} &= \sum_{j=0}^n (-1)^j x^{2n-2j} + \frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2} = \sum_{k=n}^0 (-1)^{n-k} x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2}, \text{ただし } k=n-j \text{ とおいた。} \\
 \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \left\{ \sum_{k=n}^0 (-1)^{n-k} x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2} \right\} dx = \sum_{k=n}^0 \int_0^1 (-1)^{n-k} x^{2k} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2} dx \\
 &= \sum_{k=n}^0 (-1)^{n-k} \left[ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} = \sum_{k=n}^0 (-1)^{n-k} \frac{1}{2k+1} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} \\
 a_n &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4} + \sum_{k=n}^0 (-1)^{2n-k+1} \frac{1}{2k+1} + (-1)^{2n+2} \frac{\pi}{4} \\
 &= 1 - 1 + \sum_{k=n}^1 (-1)^{2n-k+1} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{2n} (-1)^{-k+1} \frac{1}{2k+1} \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{2k} (-1)^{-k+1} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1}
 \end{aligned}$$

(4)

(3)の証明ができなくても、(1)、(3)の事実から、容易に求めることができる。(3)ができなくても、諦めないこと。当たり前だが、問題を読むことが大事だ。

#### < 総評 >

例年、新潟大学の数学問題は難問奇問は少なく、基礎的な学力を問うもので、筆者はなかなか良問だと思うことが多い。今年もそのように感じた。このレベルの問題を普通に解くことができれば、東大京大級の数学問題に十分チャレンジできるのではないかな。

[1]

2次関数の最大値，最小値問題。変数が三角関数の関数になるため，変数の範囲が限定される。2次関数の係数によって場合分けして考える必要がある。題意は簡明であり，基礎的な事項を踏まえていれば完答できる。難易度はB -。

[2]

入試数学の立体図形の問題の一つとして，正四面体をベクトル表示によって扱う問題はしばしば出題されるので，習熟している読者も多いだろう。図形を描いて，ベクトルを書き込み，問題の全体像を把握しながら，線分を上手にベクトルの和や差で表す。題意も図形も簡明だから，大きな困難は感じないだろう。難易度B -。

[3]

逆行列による行列の対角化の応用問題。教科書に掲載されている対角化とその応用問題を勉強していれば対応できるだろう。少々着想が必要なので簡単とはいえないが，題意は簡明だから完答したい。難易度B。

[4]

指数関数を含む多項式の微分積分問題。部分積分法に習熟している必要がある。題意は簡明であり，解答方針に戸惑うことはなからう。難易度B。

5

多項式を数列によって表現し，積分を用いて数列の極限を求める。着眼，着想を必要とするので，やや難しい。難易度 B +。

< 人文・教育・経済・農学部 >

1 理系の 1 に同じ。

2 一辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P とし，線分 CP を 3 : 1 に内分する点を Q とする。また，直線 OC 上の点 R を  $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$  となるようにとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とおく。このとき，次の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{OQ}$  を  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$  を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{OR}$  を  $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$  を用いて表せ。
- (3)  $\overrightarrow{QR}$  の大きさ  $|\overrightarrow{QR}|$  を求めよ。

< 解答 >

(問題設定は理系の 2 に同じ。)(問題 (2) は理系の 2(1) の前半に同じ。)

(1)

理系の 2(1) の解答，解説を参照すること。図 1 を参照して考える。

(2)

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

$$(1) \text{ から } \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OC} = k\vec{c} \text{ とおく。 } 0 < k < 1 \text{ である。}$$

$$\overrightarrow{QR} = k\vec{c} - \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$$

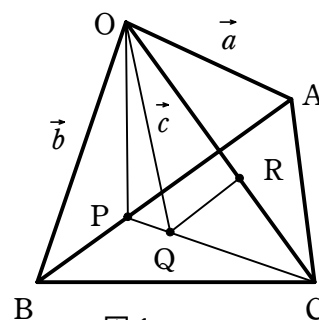


図 1

$$\text{両辺に対して，} \vec{c} \text{ との内積をとると， } \overrightarrow{QR} \cdot \vec{c} = k\vec{c} \cdot \vec{c} - \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{c}$$

$$\overrightarrow{QR} \text{ と } \vec{c} \text{ は直交しているので， } \overrightarrow{QR} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{したがって， } k = \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{c} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$\overrightarrow{QR} = \frac{5}{8}\vec{c} - \frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{8}(3\vec{c} - 2\vec{a} - 4\vec{b}) \quad (\text{答})$$

(3)

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{|\overrightarrow{QR}|^2} = \sqrt{\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QR}}$$

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QR} = \frac{1}{64}(9\vec{c} \cdot \vec{c} + 4\vec{a} \cdot \vec{a} + 16\vec{b} \cdot \vec{b} - 12\vec{a} \cdot \vec{c} + 16\vec{a} \cdot \vec{b} - 24\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{1}{64}(9 + 4 + 16 - 6 + 8 - 12) = \frac{19}{64}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QR}} = \frac{\sqrt{19}}{8} \quad (\text{答})$$

ここで、 $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 1$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ である。

< 解説 >

理系の問題 [2] と同じ問題設定で、設問を簡単にしたものなので、理系の解答を参照してほしい。

(2)

$\overrightarrow{OR}$  と  $\overrightarrow{QR}$  が直交するということは、それらの内積が 0 ということである。

(3)

ベクトルの内積の計算方法は良く理解しておこう。

[3] A の箱には 1 から 20 までの整数が 1 つずつ書かれた 20 枚のカードが入っている。B の箱には 1 から 30 までの整数が 1 つずつ書かれた 30 枚のカードが入っている。A, B の箱から 1 枚ずつカードを取り出し、取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和を  $X$  とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $X$  が 2 の倍数となる確率を求めよ。
- (2)  $X$  が 2 の倍数であるが 5 の倍数でない確率を求めよ。
- (3)  $X$  が 5 の倍数となる確率を求めよ。
- (4)  $X$  が 2 の倍数にも 5 の倍数にもならない確率を求めよ。

< 解答 >

(1)

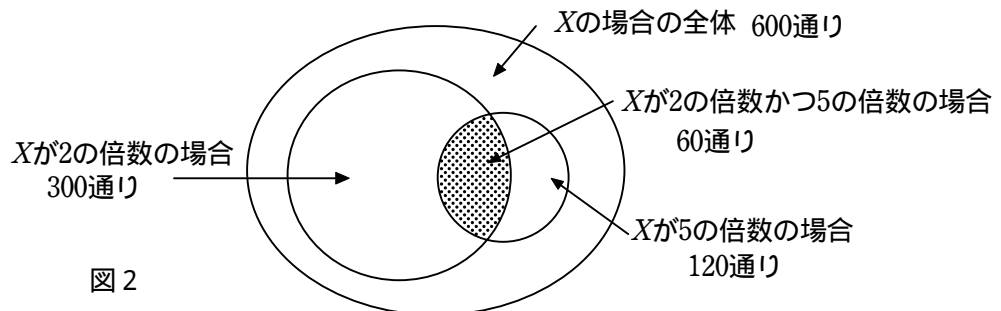
$X$  が 2 の倍数 (偶数) になるのは、A, B のカードが両方とも奇数か偶数の場合である。

両方とも奇数の場合の数は、A が 10 通り、B が 15 通りだから、 $10 \times 15 = 150$  通り。

両方とも偶数の場合の数は、A が 10 通り、B が 15 通りだから、 $10 \times 15 = 150$  通り。

したがって、 $X$  が 2 の倍数 (偶数) になる場合の数は  $150 + 150 = 300$  通り。

すべての場合の数は  $20 \times 30 = 600$  通りだから、 $X$  が 2 の倍数 (偶数) になる確率は  $\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$  (答)



(2)

図 2 のように  $X$  が 2 の倍数かつ 5 の倍数の場合を 2 の倍数である場合から引けば良い。

$X$  が 2 の倍数かつ 5 の倍数の場合とは、 $X$  が 10, 20, 30, 40, 50 の場合である。

$X=10$  となるのは (A, B) が (1, 9), (2, 8), ..., (8, 2), (9, 1) だから、場合の数は 9 通り。

$X=20$  となるのは (A, B) が (1, 19), (2, 18), ..., (18, 2), (19, 1) だから、場合の数は 19 通り。

$X=30$  となるのは (A, B) が (1, 29), (2, 28), ..., (28, 2), (29, 1) だから、場合の数は 20 通り。

$X=40$ となるのは $(A, B)$  が  $(10, 30), (11, 29), \dots, (19, 21), (20, 20)$  だから, 場合の数は11通り。

$X=50$ となるのは,  $(A, B)$  が  $(20, 30)$ だから, 場合の数は1通り。

$X$  が10, 20, 30, 40, 50の場合の数は, 以上の和となり, 60通り。

$X$  が2の倍数であるが5の倍数でない場合の数は,  $300 - 60 = 240$ 通り。

$X$  が2の倍数であるが5の倍数でない確率は  $\frac{240}{600} = \frac{2}{5}$  (答)

(3)

$X$  が奇数でかつ5の倍数である場合は,  $X$  が5, 15, 25, 35, 45の場合である。

$X=5$ となるのは $(A, B)$  が  $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$  だから, 場合の数は4通り。

$X=15$ となるのは $(A, B)$  が  $(1, 14), (2, 13), \dots, (13, 2), (14, 1)$  だから, 場合の数は14通り。

$X=25$ となるのは $(A, B)$  が  $(1, 24), (2, 23), \dots, (19, 6), (20, 5)$  だから, 場合の数は20通り。

$X=35$ となるのは $(A, B)$  が  $(5, 30), (6, 29), \dots, (19, 16), (20, 15)$  だから, 場合の数は16通り。

$X=45$ となるのは $(A, B)$  が  $(15, 30), (16, 29), \dots, (19, 26), (20, 25)$  だから, 場合の数は6通り。

$X$  が5, 15, 25, 35, 45の場合の数は, 以上の和となり, 60通り。

したがって,  $X$  が5の倍数となるのは,  $X$  が10, 20, 30, 40, 50の場合の数と $X$  が5, 15, 25, 35, 45の場合の数の和であり, 場合の数は  $60 + 60 = 120$ 通り

したがって,  $X$  が5の倍数となる確率は,  $\frac{120}{600} = \frac{1}{5}$  (答)

(4)

図2から明らかなように,  $X$ が2の倍数でも5の倍数でもない場合の数は,

$600 - 300 - 120 + 60 = 240$ 通り

したがって, その確率は  $\frac{240}{600} = \frac{2}{5}$  (答)

< 解説 >

確率 = (与えられた条件を満たす場合の数) / (場合の数全体)

ここでは, 場合はすべて同じ確率で発生することを前提としている。

この問題では, 図2のように条件を満足する場合の範囲を模式図として表現するとわかり易い。

(1)

奇数 + 奇数 → 偶数 (2の倍数), 偶数 + 偶数 → 偶数, 奇数 + 偶数 → 奇数

であることは自明であろう。

(2)

求める場合はいかなる条件なのか, 図2を見ればわかる。

( $X$ が2の倍数であるが5の倍数でない場合の数)

= ( $X$ が2の倍数である場合の数) - (2の倍数かつ5の倍数である場合の数)

(2の倍数かつ5の倍数) という条件は, ここでは $X$  が10, 20, 30, 40, 50を意味する。

それぞれの条件を満足する場合の数をていねいに数える。難しくはないが, ミスしないように。

(3)

$X$ が5の倍数となる場合の数 = ( $X$ が偶数で5の倍数の場合の数) + ( $X$ が奇数で5の倍数の場合の数)

( $X$ が偶数で5の倍数の場合の数) は(2)で求めたから, ( $X$ が奇数で5の倍数の場合の数) を求めれば

良い。

(4)

(1), (2), (3)の結果から求める。図2に場合の数を書き込めば、自ずと計算できる。

**4** 座標平面上の曲線  $y=|x^2+2x|$  を  $C$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 曲線  $C$  と直線  $y=x+2$  の共有点の座標を求めよ。

(2) 曲線  $C$  と直線  $y=x+2$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 曲線  $C$  と直線  $y=x+a$  がちょうど2つの共有点をもつような実数  $a$  の値の範囲を求めよ。

< 解答 >

(1)

$y=|x^2+2x|=|x(x+2)|$  , したがって曲線  $C$  は

$x < -2$  のとき ,  $y=x(x+2)$

$-2 \leq x < 0$  のとき ,  $y=-x(x+2)$

$0 \leq x$  のとき ,  $y=x(x+2)$

$y=x+2$  との共有点は

$x < -2$  のとき ,  $y=x(x+2)=x+2$  ,  $x=1, -2$  であるが ,  $x < -2$  を満たさないなので共有点はない。

$-2 \leq x < 0$  のとき ,  $y=-x(x+2)=x+2$  , したがって  $x=-2, -1$

$0 \leq x$  のとき ,  $y=x(x+2)=x+2$  , したがって  $x=1$

以上によって、共有点の座標は  $(-2, 0), (-1, 1), (1, 3)$

(2)

図3からわかるように、曲線  $C$  と直線  $y=x+2$  で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 - 2x - x - 2) dx + \int_{-1}^0 (x + 2 + x^2 + 2x) dx + \int_0^1 (x + 2 - x^2 - 2x) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^{-1} + \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 + \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{13}{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

図3からわかるように、

$0 < a < 2$  で2つの共有点

$a < a$  で2つの共有点

ただし、 $a$  は  $y=-x^2-2x$  と  $y=x+a$  が接するときの  $a$  である。

$-x^2-2x=x+a$  として、 $x^2+3x+2+a=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+a=0$  が重解をもつ。

$-\frac{9}{4}+a=0$  から、 $a=\frac{9}{4}$

以上により、2つの共有点をもつ実数  $a$  の範囲は、 $0 < a < 2, \frac{9}{4} < a$

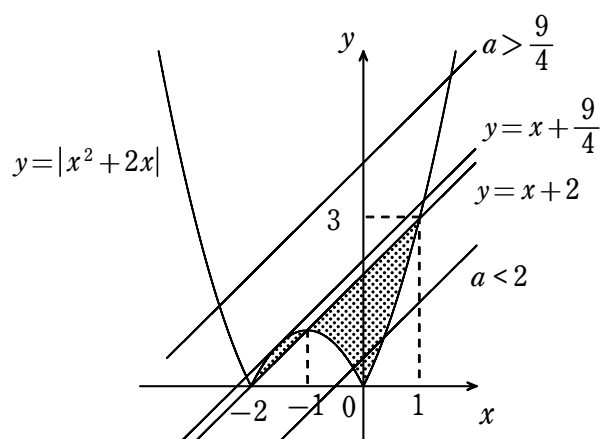


図 3

< 解説 >

グラフを描いて考える。難しいグラフではない。

(1)

絶対値記号を外して，交点の座標を求める。

(2)

図によって，面積を求める図形を確認し，積分範囲を確定する。

(3)

3つの共有点をもつ  $a$  が存在することが図からわかるだろう。

< 総評 >

例年同様，特別の発想力や思考力を必要とする問題はない。基礎知識を基に，的確に思考すれば，概ね解答が可能であろう。

1

理系の問題 1 と同じ。難易度は B。

2

理系の問題 2 とほぼ同じ。難易度は B -。

3

わかり易い確率の問題。やや煩瑣なところもあり，不注意ミスのないように扱う。B。

4

二次関数と一次関数の交点の問題。また，それらが囲む図形の面積の問題。難易度は B。

141215