2014（H26)年度　東北大学　前期入学試験　物理解説

（物理，化学，生物，地学のうち２科目受験で150分）

1

＜解答＞

問（１）(a)

ばね１に沿う方向に働く力として，ばね１による力$-kr$，ばね２による力$-kr$，遠心力$mr\omega^2$がある。したがって，$F=mr\omega^2-2kr$　（答）

(b)

$F=mr_0\omega^2-2kr_0$，$F<0$のとき，小物体には変位に比例した復元力が働くから単振動をする。

$mr_0\omega^2-2kr_0<0$，$\therefore\ \omega<\sqrt{\dfrac{2k}{m}}=\omega_{max}$，$\omega$が$\omega_{max}$より小さければ単振動をする。

$\omega_{max}=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$　（答）

$F=mr\omega^2-2kr=(m\omega^2-2k)r=-hr$とおく。ただし$h=2k-m\omega^2>0$

aを加速度とすれば，小物体の単振動の運動方程式は，$ma=-hr$だから

$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{h}}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k-m\omega^2}}$　（答）

問（２）(a)

静止摩擦力が小物体に働く力より大きければ，小物体は静止したままである。

すなわち，$\mu mg\geqq|F|$であれば静止している。

$0\leqq\omega<\omega_{max}$のとき，$F<0$だから，$\mu mg\geqq 2kr-mr\omega^2$，$\therefore\ 0\leqq r\leqq\dfrac{\mu mg}{2k-m\omega^2}$　（答）

$\omega_{max}<\omega$のとき，$F>0$だから，$\mu mg\geqq mr\omega^2-2kr$，$\therefore\ 0\leqq r\leqq\dfrac{\mu mg}{m\omega^2-2k}$　（答）

(b)（イ）

問（３）(a)

小物体が中心に向かって動き始め，その後ばねの変位がrになった瞬間に，ばね1に沿う方向に働いている力は，ばねの力，遠心力，動摩擦力だから，

$F'=-2kr+mr{\omega_0}^2+\mu' mg$　（答）

(b)

$$F'=-2kr+mr{\omega_0}^2+\mu' mg=-(2k-m{\omega_0}^2)r+\mu' mg$$

$$=-(2k-m{\omega_0}^2)\left(r-\frac{\mu' mg}{2k-m{\omega_0}^2}\right),\quad r-\frac{\mu' mg}{2k-m{\omega_0}^2}=x \text{とおくと，}$$

$F'=-(2k-m{\omega_0}^2)x$となり，運動方程式は$m\dfrac{d^2r}{dt^2}=m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-(2k-m{\omega_0}^2)x$となって，$x$も単振動をする。

周期は$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k-m{\omega_0}^2}}$であり，動き始めから次に止まるまでの時間は$\dfrac{1}{2}$周期だから，

$T_1=\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k-m{\omega_0}^2}}$　（答）

(c)

動き始める瞬間は，$F=-2kr_0+mr_0{\omega_0}^2+\mu mg=0$である。したがって，$r_0=\dfrac{\mu mg}{2k-m{\omega_0}^2}$

小物体が中心に向かって動き始めて，中心に近づくと，ばねの力は弱くなり，（遠心力＋動摩擦力）と等しくなる。すると，小物体は静止する。

単振動の中心 r_c は$x=0$だから，$x=r_c-\dfrac{\mu' mg}{2k-m{\omega_0}^2}=0$，$\therefore\ r_c=\dfrac{\mu' mg}{2k-m{\omega_0}^2}=\dfrac{\mu'}{\mu}r_0$，

$r_0-r_c=r_c-r_1$だから，$r_1=2r_c-r_0=\left(\dfrac{2\mu'}{\mu}-1\right)r_0$　（答）

(d)

r_1 に到達して静止するのは，ウとカ。単振動だから，r の変化は正弦波状になる。

したがって変位 r の時間変化を示すグラフは(ウ)。

＜解説＞

問１(a)

小物体には，ばねに沿う方向に，ばね１，２の力と小物体が円板上にあって回転していることによる遠心力が働く。

(b)

遠心力は半径方向に向き，円板の中心からの距離(r)と角速度の2 乗すなわちω^2に比例する。ばねの力は中心方向に向き，r に比例する。両者は逆逆方向である。したがって，角速度が小さいとばねの力の方が大きいから，ばねによる単振動をする。角速度がある大きさより大きくなると，ばねによる力と遠心力がつり合うまで，ばねが伸びる。

単振動の周期の公式は覚えていなければばならない。単振動の運動方程式を，$ma=-hr$ のように表現したとき，βを角振動数として，$r=r_0\sin\beta t$のように単振動となり，$a=-\beta^2r_0\sin\beta t$だから，

$\beta=\sqrt{\dfrac{h}{m}}=\sqrt{\dfrac{2k}{m}-\omega^2}$，したがって，$T=\dfrac{2\pi}{\beta}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k-m\omega^2}}$

問（２）(a)

小物体が静止しているためには，小物体に働く力が静止摩擦力より小さいことが必要である。静止摩擦は動きを止めるように働くからである。

(b)

$0\leqq\omega<\omega_{max}$のとき，$0\leqq r\leqq\dfrac{\mu mg}{2k-m\omega^2}$だから，$\omega\to\omega_{max}$で$\dfrac{\mu mg}{2k-m\omega^2}\to\infty$，

$\omega\to 0$で$\dfrac{\mu mg}{2k-m\omega^2}\to\dfrac{\mu mg}{2k}$，これらを満たすのはイ，エ。

$\omega_{max}<\omega$のとき，$0\leqq r\leqq\dfrac{\mu mg}{m\omega^2-2k}$だから，$\omega\to\infty$で$\dfrac{\mu mg}{m\omega^2-2k}\to 0$，これを満たすのはイ，ウ。

両方を満たすのはイ。

問（３）(a)

小物体は円板の角速度が小さくなってω_0になったときに，中心Oに向けて動き始めたということは，（ばねによる復元力ー遠心力）≧ 静止摩擦力になったということである。

すなわち，動き始める瞬間は，$F=-2kr_0+mr_0\omega_0{}^2+\mu mg=0$である。

(b)

動いているときには、小物体には動摩擦力が働く。

ここでは，$r-\dfrac{\mu' mg}{2k-m\omega_0{}^2}=x$とおいて扱うのがポイントである。すると，$F'=-(2k-m\omega_0{}^2)x$となって，変位$x$に比例した逆方向の力が働くことがわかる。すなわち，xは単振動する。$x=0$が単振動の中心だから，$r=\dfrac{\mu' mg}{2k-m\omega_0{}^2}$が単振動の中心ということになる。動摩擦力がなければ，$r=x=0$が単振動の中心であるが，動摩擦力のために，振動の中心が$\dfrac{\mu' mg}{2k-m\omega_0{}^2}$だけずれることになる。

この場合，動き始めてから静止するまでの時間は，単振動の周期との関係から求めることができる。動き始めから次に止まるまでの時間は$\dfrac{1}{2}$周期に相当することに気づかなければならない。

(c)

動き始めの変位と静止したときの変位の真ん中が単振動の中心である。

したがって，$r_0-r_c=r_c-r_1$であることに気づかねばならない。ただしr_cは単振動の中心位置である。

(d)

r_1に到達して静止すれば，そのまま静止している。なぜなら，動摩擦力の方が（ばねの力ー遠心力）より大きいので，小物体は静止した。動摩擦力より静止摩擦力の方が大きいから，小物体に働く力は静止摩擦力より小さく，再び動き出すことはない。

$\boxed{2}$

＜解答＞

問（１）(a)

誘電体が挿入されていない部分の電気容量は$\dfrac{\varepsilon_0 b(l+x_1)}{d}$

挿入されている部分の電気容量は$\dfrac{\varepsilon_1 b(l-x_1)}{d}$

コンデンサー１は両者の並列接続だから，その電気容量は両者の和であり，

$C=\dfrac{b}{d}\{\varepsilon_0(l+x_1)+\varepsilon_1(l-x_1)\}$　（答）

問（２）

スイッチS_1がA のとき，コンデンサー１に溜まった電荷は$Q=C_1V$

Bのとき，コンデンサー１の電荷がQ_1，両端の電圧がV'になったとすれば，

$Q=Q_1+Q_2=C_1V'+C_2V'$，$V'=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}V$，$Q_2=C_2V'=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}V$　（答）

問（３）(a)

$\varDelta x>0$だから，極板間の誘電体の長さが減少する。するとコンデンサー１の容量は減少するから，蓄積できる電荷は減少する。すなわち蓄積されていた電荷はコンデンサーから電池へと流れる。したがってP点を流れる電流の向きは(イ)である。

(b)

コンデンサー１の誘電体が存在していない部分の容量をC_{10}，存在している部分の容量をC_{11}とすれば，単位面積あたりの電荷の量は，電荷の量を極板の面積で除したものだから

$\sigma_0=\dfrac{C_{10}V}{b(l+x+\varDelta x)}$，$C_{10}=\dfrac{\varepsilon_0 b(l+x+\varDelta x)}{d}$，したがって$\sigma_0=\dfrac{\varepsilon_0 V}{d}$　（答）

$\sigma_1=\dfrac{C_{11}V}{b(l-x-\varDelta x)}$，$C_{11}=\dfrac{\varepsilon_1 b(l-x-\varDelta x)}{d}$，したがって$\sigma_1=\dfrac{\varepsilon_1 V}{d}$　（答）

(c)

コンデンサー１の誘電体が存在していない部分の電荷をQ_{10}，存在している部分の電荷をQ_{11}とすれば，

$Q_{10}=\sigma_0\times b(l+x+\varDelta x)=\sigma_0 b(l+x)+\sigma_0 b\varDelta x$

$Q_{11}=\sigma_1\times b(l-x-\varDelta x)=\sigma_1 b(l-x)-\sigma_1 b\varDelta x$

したがって，誘電体の移動$\varDelta x$による電荷の変化は，Q_{10}について$\sigma_0 b\varDelta x$，Q_{11}について$-\sigma_1 b\varDelta x$だから

$\varDelta Q_1=(\sigma_0-\sigma_1)b\varDelta x$　（答）

したがって，静電エネルギーの変化は，$\varDelta U=\dfrac{1}{2}\varDelta QV=\dfrac{1}{2}(\sigma_0-\sigma_1)b\varDelta xV$　（答）

(d)

エネルギー保存の法則により

外力がした仕事 ＝（コンデンサーの静電エネルギーの変化）＋（電池が移動した電荷にした仕事）

外力がした仕事$=f\varDelta x$

コンデンサーの静電エネルギーの変化$=\dfrac{1}{2}(\sigma_0-\sigma_1)b\varDelta xV<0$

コンデンサーの電荷 $-(\sigma_0-\sigma_1)b\varDelta x$ が減少して，電池にその電荷が移動したのだから

電池が移動した電荷にした仕事 $=-(\sigma_0-\sigma_1)b\varDelta xV$

したがって，$f\varDelta x=\dfrac{1}{2}(\sigma_0-\sigma_1)b\varDelta xV-(\sigma_0-\sigma_1)b\varDelta xV=-\dfrac{1}{2}(\sigma_0-\sigma_1)b\varDelta xV$

外力fがした仕事は，極板と誘電体に働く力Fに抗してする仕事だから，$f=-F$として，

$-F\varDelta x=-\dfrac{1}{2}(\sigma_0-\sigma_1)b\varDelta xV$，$\therefore\ F=\dfrac{1}{2}bV(\sigma_0-\sigma_1)$　（答）

問（４）

誘電体が存在していない部分の容量は，$C_{10}=\dfrac{\varepsilon_0 b(l+x)}{d}=k_0(l+x)$，ただし$k_0=\dfrac{\varepsilon_0 b}{d}$

誘電体が存在している部分の容量は，$C_{11}=\dfrac{\varepsilon_1 b(l-x)}{d}=k_1(l-x)$，ただし$k_1=\dfrac{\varepsilon_1 b}{d}$

コンデンサー１の容量は，$C_1=C_{10}+C_{11}=k_0(l+x)+k_1(l-x)$

$x=x_2$ で充電したときの蓄積電荷を$Q_{x2}=C_{x2}V=\{k_0(l+x_2)+k_1(l-x_2)\}V$ とおく。

充電した後，スイッチS_2を切ったのだから，電荷Q_{x2} は変化しない。

したがって，誘電体が移動してコンデンサー１の容量C_1が変化すると，両端の電圧が変化する。

$$V_1=\frac{Q_{x2}}{C_1}=\frac{Q_{x2}}{k_0(l+x)+k_1(l-x)}=\frac{Q_{x2}}{(k_0+k_1)l-(k_1-k_0)x} \quad ①$$

$0<x\leqq l$のとき

$k_1>k_0$だから，xの増加につれ，V_1は直線状ではなく曲線状に増大する

$-l<x\leqq 0$のとき

$x=0$から$-l$まで，誘電体は極板間に完全に入るので，容量変化はなく一定だから，V_1は一定

$-2l<x\leqq -l$のとき

xの減少につれ，V_1は直線状ではなく曲線状に増大する

また，$x=-\frac{l}{2}$で誘電体の中心と極板の中心とが一致するので，$x\leqq -\frac{l}{2}$での変化は$x\geqq 0$での変化と同じである。以上から極板電圧の変化を示す曲線は(イ)である。

①で$x=0$として，

$$V_1=V_C=\frac{Q_{x2}}{(k_0+k_1)l}=\frac{1}{(k_0+k_1)l}\{k_0(l+x_2)+k_1(l-x_2)\}V=\left\{1+\frac{(k_0-k_1)x_2}{(k_0+k_1)l}\right\}V \quad ②$$

$k_0-k_1=\frac{b}{d}(\varepsilon_0-\varepsilon_1)$，$k_0+k_1=\frac{b}{d}(\varepsilon_0+\varepsilon_1)$を②に代入して，$V_C=\left\{1+\frac{(\varepsilon_0-\varepsilon_1)x_2}{(\varepsilon_0+\varepsilon_1)l}\right\}V$　（答）

＜解説＞

問（１）

平行平板の電気容量の公式，並列接続の電気容量の公式などは覚えていなければならない。

問（２）

スイッチS_1がＡのときにコンデンサー１に溜まった電荷の一部は，Ｂに切り替えたとき，コンデンサー１から２に移るが，総量は変化しない。また両コンデンサーは並列接続だから，それぞれの両端の電圧は等しい。

問（３）(a)

$f>0$の力によって誘電体を移動したのだから，極板間にある誘電体の長さがΔx減少する。したがってコンデンサー１の容量が減少する。すると蓄積できる電荷が減少するから，蓄積されていた電荷が減少する。したがって点Ｐでの電流の向きはコンデンサー１からスイッチ方向，すなわち(イ)である。

(b)

単位面積当たりの電荷σは 電荷／極板面積 である。

(c)

(b)の結果を利用する。

(d)

コンデンサーから電荷が逃げて，回路を流れて電池に蓄積される。電池には電位Vがあるから，電池が電荷に仕事をしたことになる。

問４

充電した後，スイッチを切ったので，コンデンサーに蓄積された電荷は保存される。すると，コンデンサーの容量の変化によって，極板の電圧は変化する。

誘電体の位置xに対応する容量の式 ①を求め，そのグラフを考察する。式 ①は(b)によって容易に求まる。$x=0$から$-l$まで，誘電体は極板間に完全に入るので，容量変化は一定だから，V_1 は一定。

また，$x=-\dfrac{l}{2}$で誘電体の中心と極板の中心とが一致するので，$x=-\dfrac{l}{2}$でグラフは対称となる。

3

問（1）(a)

長さLの中に波の山がn 本あったから，$n+1$個の波が存在していたので，波長$\lambda=\dfrac{L}{n+1}$　（答）

波長λの長さを進むに要する時間がTだから，波の進む速さは$v=\dfrac{\lambda}{T}=\dfrac{L}{T(n+1)}$　（答）

(b)

定常波の節と節の間隔は波長の$\dfrac{1}{2}$だから，波の山の間には，２個の節がある。

したがって$n+1$個の波に対して節の数は$N=2(n+1)$　（答）

板Ｂは定常波の腹だから，一番近い節線は板Ｂの$\dfrac{1}{4}$波長手前になり，$x_1=-\dfrac{L}{4(n+1)}$　（答）

問（２）(a)　図１

(b)

図１において節線は山の波面と谷の波面の交点を通る。入射波と反射波の進行方向のx方向成分は大きさが同じで逆向きだから，交点はy方向すなわち板Ｂに平行に動く。したがって，節線は板Ｂに平行になるので，(イ)

節線の間隔は山と山の間隔の半分だから，

$$l=\frac{1}{2}\times\frac{\lambda}{\cos\theta}=\frac{\lambda}{2\cos\theta}\quad（答）$$

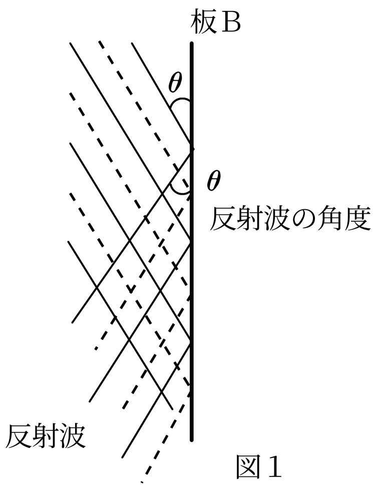

図１

(c)

図２を参照する。

入射波，反射波とも１秒後にはv 移動する。

その結果，両者の山が一致する点は板Ｂに平行にv_θ 移動する。したがって，$v_\theta\sin\theta=v$，$\therefore\ v_\theta=\dfrac{v}{\sin\theta}$　（答）

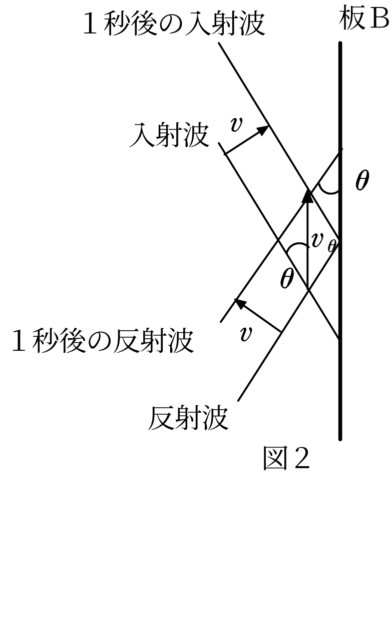

図２

問（３）(a)

点PからQまでの経路長は

$PQ=\sqrt{d^2+F^2}$

PQとOQの経路長の差は

$PQ-OQ=\sqrt{d^2+F^2}-F$

$d=d_1$のとき最初に波が強めあい，振幅が最大となる。

このとき経路長差が１波長に等しい。

したがって，$\sqrt{d_1^{\,2}+F^2}-F=\lambda$

$\therefore\ d_1=\sqrt{\lambda(\lambda+2F)}$　（答）

(b)

x 軸上の点X$(x, 0)$における経路差は，$\mathrm{PX}-\mathrm{OX}=\sqrt{d^2+x^2}-x$

したがって，$\sqrt{d^2+x^2}-x=m\lambda$ を満たす$x>0$ が存在し，しかも$\sqrt{d^2+x^2}-x<(m+1)\lambda$ であれば，波の振幅が最大となる場所の数はmである。

$\sqrt{d^2+x^2}-x=m\lambda$ から，$d^2=2mx\lambda+m^2\lambda^2>m^2\lambda^2$，したがって$d>m\lambda$

$\sqrt{d^2+x^2}-x<(m+1)\lambda$から，$d^2<2(m+1)x\lambda+(m+1)^2\lambda^2$，したがって $d^2\leqq(m+1)^2\lambda^2$

以上から，$m\lambda<d\leqq(m+1)\lambda$ （答）

＜解説＞

問（1）(a)

長さL の中にn 本の山の波が観測されたということは，$n+1$個の波が存在することに注意する。図を描いて確認すると良い。

時間T 後に次の山の波が来たのだから，T は周期である。

(b)

水面が振動しない場所が線状にy 軸に平行に現れたということは，波源Aと板Bとの間に定常波が発生したことを意味している。定常波は入射波と反射波が強めあう位置（腹）と弱めあう位置（節）が一定の位置に交互に現れることによって発生する。したがって，節と節の間隔は元の進行波の波長の半分である。

原点Oは定常波の腹である。したがって，最も近い節点の位置は原点Oから$\frac{1}{4}$波長分ずれたところにある。

問2(a)

波の進行方向は波面に垂直である。反射波の進行方向は，板Bの垂線に関して入射波の進行方向と対称になる。反射波の進行方向を求めて，それに垂直な面を波面とすれば良い。

(b)

本質的に考えると，なかなか難しい問題である。入射波が板に対して傾いたとき，板に平行だった節線はどうなるのか。山の波面と谷の波面が平行ではないので，波面が完全に重なることはない。山の波面と谷の波面が重なった点は節になり，それが並ぶことになる。図1から解るように，節点が直線状に並び，板と平行に移動するわけである。

(c)

図2のような図を描いて考えれば，容易だろう。

問（3）(a)

Oからの波とPからの波の経路長の差が波長の整数倍のときに，波が強めあう。波の山と山が重なり振幅が最大となる。初めに振幅が最大となるのは経路長差がちょうど波長に等しいとき，すなわち整数が1のときである。

(b)

振幅が最大となるx 軸上の場所の数がmということは，経路長差が$m\lambda$ になる$x>0$があり，$(m+1)\lambda$ になる$x>0$がない，ということである。このような条件を満たすdの範囲を求めればよい。

<総評>

理科４科目のうち、２科目受験で試験時間150分である。他の科目の難易が解らないので，一概にはいえないが，75分でこの物理の問題を扱うことは，相当に的確な理解が必要だと思う。複雑な計算を要する問題はない，ということは幸いである。

結果だけでなく，考え方や計算の過程も記せということだから，部分点も付与されると思われるので，しっかり粘り強く取り組もう。

$\boxed{1}$

ばねの力，回転による遠心力，摩擦力が関係する力と運動の問題。問（１）は摩擦がない場合。単振動の周期は頻出するから，公式は覚えておくこと。もちろん，その導出の考え方も含めて理解していること。問（２）は摩擦がある場合。遠心力がばねの力より大きい場合と小さい場合とで，静止する条件が異なってくる。問（３）は静止摩擦と動摩擦の両者を含めて考えなければならない。

全体としては，難易度Ｂの標準的な問題だが，問（３）は難易度Ａを含む。

$\boxed{2}$

コンデンサーを含む電気回路の問題。充電電圧，コンデンサーの電気容量，蓄えられる電荷，静電エネルギー等の基本的な関係は覚えていなければならない。コンデンサーの構造と電気容量の関係もしかりである。問３(d)は誘電体に働く力という概念が新しく，戸惑う。しかし，ここでは，なぜどのように力が働くのかを問うているわけではないので，働くものだと考えて対応しよう。$f=-F$とおくことがポイントである。問３(d)は難易度Ａ－，他はＢ。

$\boxed{3}$

水面を伝わる波の干渉の問題である。問１では，入射波と反射波の重ね合せにより発生する定常波の問題である。入射波，反射波とも進行波だが，波源と反射板の距離が波長の整数倍だと，両者の山と山が重なりあって，最大の振幅になる場所（腹）と振幅が0になる場所（節）が定まる定常波ができる。問２では入射波を傾けたとき，どうなるかという問題で，定常波についてきちんと理解していないと，やや難しい。計算が難しいのではなく，考え方が難しいのである。

問３では，干渉による振幅の変化の問題である。経路長の差が波長の整数倍のとき，二つの波が強めあう。(b)はやや戸惑うかも知れない。mあって，$m+1$はない，というdの条件を求める。難易度は問１はＢ，問２(c)はＡ－，問３(b)はＡ－と考える。

150516