2014 (H26) 年度　東北大学　前期入学試験　数学解説

前期：理学部•医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻•検査技術科学専攻）
•歯学部•薬学部•工学部•農学部　　試験時間 150分

$\boxed{1}$　$x=t+\dfrac{1}{3t}$　$\left(0<t\leqq\dfrac{1}{2}\right)$とする。

(1)　x のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　x の方程式 $x^2+ax+b=0$ が(1)の範囲に少なくとも１つの解をもつような点$(a,\ b)$の存在範囲を図示せよ。

＜解答＞

(1)

$\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{3t^2}=\dfrac{3t^2-1}{3t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=0$になるのは，$t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

したがって $0<t\leqq\dfrac{1}{2}$では$\dfrac{dx}{dt}<0$ だから，x は単調減少する。したがって $t=\dfrac{1}{2}$でx は最小値 $\dfrac{7}{6}$，

また $\displaystyle\lim_{t\to 0}x=\infty$だから，$x$ のとり得る範囲は $x\geqq\dfrac{7}{6}$　（答）

(2)

$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+b$

$f(x)=0$が実数解をもつためには$a^2-4b\geqq0$，$\therefore\ b\leqq\dfrac{a^2}{4}$　①

解の少なくも一つが $x\geqq\dfrac{7}{6}$であるためには，

$-\dfrac{a}{2}\geqq\dfrac{7}{6}$のとき，すなわち $a\leqq-\dfrac{7}{3}$　②　のときは，解の一つは必ず$x\geqq\dfrac{7}{6}$である。

$-\dfrac{a}{2}<\dfrac{7}{6}$のとき，すなわち $a>-\dfrac{7}{3}$　③　のときは，$f\left(\dfrac{7}{6}\right)\leqq0$であれば，解の一つは$x\geqq\dfrac{7}{6}$である。

$f\left(\dfrac{7}{6}\right)=\left(\dfrac{7}{6}\right)^2+\dfrac{7}{6}a+b\leqq0$，$\therefore\ b\leqq-\dfrac{7}{6}a-\left(\dfrac{7}{6}\right)^2$　④

①～④を満足する点$(a,\ b)$の存在範囲は図１の打点部である。

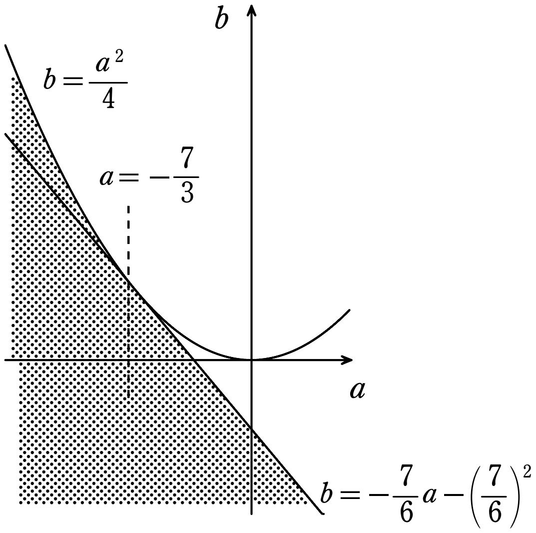

図１

＜解説＞

2次方程式の解の範囲に関する問題。

(1)

与えられたtの範囲でxがどのように変化するかを考える。

(2)

2次方程式が実数解をもつことが前提条件となる。その上で，放物線の軸が(1)の範囲に入る場合と入らない場合に分けて考える。

$\boxed{2}$ 下図のような平行六面体OABC－DEFGがxyz空間内にあり，O$(0,0,0)$，A$(2,0,0)$，C$(0,3,0)$，D$(-1,0,\sqrt{6})$とする。辺ABの中点をMとし，辺DG上の点NをMN$=4$かつDN＜GNを満たすように定める。

(1) Nの座標を求めよ。

(2) 3点E，M，Nを通る平面とy軸との交点Pを求めよ。

(3) 3点E，M，Nを通る平面による平行六面体OABC－DEFGの切り口の面積を求めよ。

＜解答＞

(1)

Bは$(2,3,0)$だから，辺ABの中点Mは$\left(2,\frac{3}{2},0\right)$

DN$=t$とすれば，Nは$(-1,t,\sqrt{6})$

$\mathrm{MN}=\sqrt{3^2+\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+(\sqrt{6})^2}=4$，$\therefore \left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{5}{2}\right)=0$，DN＜GNだから，$t=\frac{1}{2}$

したがって，Nは$\left(-1,\frac{1}{2},\sqrt{6}\right)$ （答）

(2)

Pを$(0,p,0)$とおく。Eは$(1,0,\sqrt{6})$である。

$\overrightarrow{EM}=\left(2\,,\dfrac{3}{2}\,,\,0\right)-(1\,,0\,,\sqrt{6})=\left(1\,,\dfrac{3}{2}\,,\,-\sqrt{6}\right)$

$\overrightarrow{EN}=\left(-1\,,\dfrac{1}{2}\,,\,\sqrt{6}\right)-(1\,,0\,,\sqrt{6})=\left(-2\,,\dfrac{1}{2}\,,\,0\right)$

$\overrightarrow{EP}=(0\,,\,p\,,0)-(1\,,0\,,\sqrt{6})=(-1\,,\,p\,,-\sqrt{6})$ ①

$\overrightarrow{EP}$ はベクトル$\overrightarrow{EM}$と$\overrightarrow{EN}$がつくる平面内にあるから，α，βを実数として

$\overrightarrow{EP}=\alpha\overrightarrow{EM}+\beta\overrightarrow{EN}=\alpha\left(1\,,\dfrac{3}{2}\,,\,-\sqrt{6}\right)+\beta\left(-2\,,\dfrac{1}{2}\,,\,0\right)=\left(\alpha-2\beta\,,\dfrac{3}{2}\alpha+\dfrac{1}{2}\beta\,,\,-\sqrt{6}\,\alpha\right)$ ②

①と②を比べて，$\alpha-2\beta=-1$，$\dfrac{3}{2}\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=p$，$-\sqrt{6}\,\alpha=-\sqrt{6}$

$\therefore\ \alpha=1$，$\beta=1$，$p=2$，したがって交点Pは$(0\,,2\,,0)$　（答）

(3)

$\overrightarrow{MP}=(0\,,2\,,0)-\left(2\,,\dfrac{3}{2}\,,\,0\right)=\left(-2\,,\dfrac{1}{2}\,,\,0\right)=\overrightarrow{EN}$

$\overrightarrow{NP}=(0\,,2\,,0)-\left(-1\,,\dfrac{1}{2}\,,\,\sqrt{6}\right)=\left(1\,,\dfrac{3}{2}\,,\,-\sqrt{6}\right)=\overrightarrow{EM}$

したがって3点E，M，Nを通る平面による平行六面体OABC－DEFGの切り口EMPNは平行四辺形である。したがって，

$\text{▱EMPN}=2\triangle\text{EMN}=\sqrt{(|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{EN}|)^2-(\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN})^2}$

$|\overrightarrow{EM}|=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$，$|\overrightarrow{EN}|=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$，$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=-\dfrac{5}{4}$

$\text{▱EMPN}=\sqrt{\dfrac{629}{16}-\dfrac{25}{16}}=\dfrac{\sqrt{151}}{2}$　（答）

<解説>

ベクトルを用いた立体図形の取り扱いの問題。ベクトルを加算減算して直線を表すことにより，容易に扱うことができる。図1を参照して考えよう。

(1)

A，C，Dの座標が与えられているので，平行六面体ということから，残る頂点E，B，F，Gの座標は容易に求まる。AB∥OCかつAB＝OC，A$(2\,,0\,,0)$，C$(0\,,3\,,0)$だから，Bは$(2\,,3\,,0)$と求まる。同様にGは$(-1\,,3\,,\sqrt{6})$だから，DG上の点Nを$(-1\,,\,t\,,\sqrt{6})$とおくことができる。

(2)

y軸上の点は$(0\,,\,y\,,0)$と表されるから，Pを$(0\,,\,p\,,0)$とおくことができる。

「3点E，M，Nを通る平面内に点Pがある」ということを，「$\overrightarrow{EP}$はベクトル$\overrightarrow{EM}$と$\overrightarrow{EN}$がつくる平面内にある」と考え，これを「$\overrightarrow{EP}=\alpha\overrightarrow{EM}+\beta\overrightarrow{EN}$」のように表現して計算することがポイントである。

(3)

3辺がベクトルによって表現された三角形の面積は，

$\triangle\text{EMN}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{EN}|\sin(\angle MEN)=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{EN}|\sqrt{1-(\cos(\angle MEN))^2}$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{EN}|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}}{|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{EN}|}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{EN}|)^2-(\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN})^2}$$

上記の公式を覚えていない場合は，下記のようにていねいに計算すれば良い。

$\square$EMPN$=2\times\triangle$EMN$=|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{EN}|\sin(\angle MEN)$

$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=|\overrightarrow{EM}||\overrightarrow{EN}|\cos(\angle MEN)$

$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=-\frac{5}{4}$，$|\overrightarrow{EM}|=\frac{\sqrt{37}}{2}$，$|\overrightarrow{EN}|=\frac{\sqrt{17}}{2}$，したがって$\cos(\angle MEN)=-\frac{5}{\sqrt{629}}$

$\sin(\angle MEN)=\sqrt{1-(\cos(\angle MEN))^2}=\frac{2\sqrt{151}}{\sqrt{629}}$

$\therefore$ $\square$EMPN$=\frac{\sqrt{37}}{2}\frac{\sqrt{17}}{2}\frac{2\sqrt{151}}{\sqrt{629}}=\frac{\sqrt{151}}{2}$

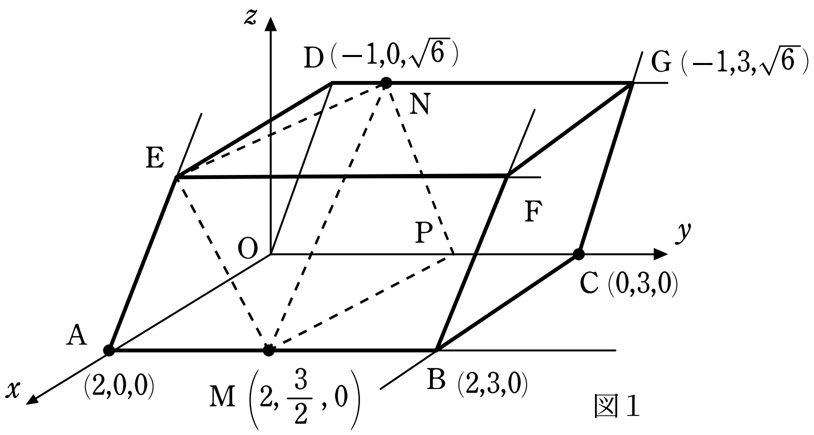

図 1

$\boxed{3}$　1，2，3，4，5 のそれぞれの数字が書かれた玉が2 個ずつ，合計10 個ある。

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて2 個の玉を取り出す。書かれている2 つの数字の積が10 となる確率を求めよ。

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて4 個の玉を取り出す。書かれている4 つの数字の積が100となる確率を求めよ。

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて6 個の玉を順に取り出す。1個目から3 個目の玉に書かれている3 つの数字の積と，4 個目から6 個目の玉に書かれている3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。

<解答>

(1)

10 個の玉から2 個選ぶ場合の数は，${}_{10}C_2=\frac{10(10-1)}{2}=45$ 通り

2 つの数字の積が10となるのは2×5 だから，2 を選ぶ場合の数が2 通り，5 を選ぶ場合の数が2 通りである。したがって2 と5 を選ぶ場合の数は4 通り。したがって，求める確率は $\frac{4}{45}$　（答）

(2)

$100=(1\times2\times5)^2$だから，4 個の玉の数字の積が100 となる場合は，

$2\times2\times5\times5$ の場合と$1\times4\times5\times5$ の場合である。

前者は1 通り。後者は1を選ぶのが2 通り，4 を選ぶのが2 通りだから$2\times2=4$ 通り。

10 個の玉から4 個選ぶ場合の数は ${}_{10}C_4=\dfrac{10!}{4!(10-4)!}=210$ 通り

4 個の玉の積が100となる確率は $\dfrac{1+4}{210}=\dfrac{1}{42}$ （答）

(3)

10 個の玉を取り出して並べる並べ方は，10 個の数字がすべて異なるとすれば，10! 通り。

ここでは，1，2，3，4，5までの数字の玉が2 個ずつだから，

異なる並べ方は $\dfrac{10!}{2!2!2!2!2!}=2^3\times3^4\times5^2\times7$ 通り ①

取り出した1個めから3 個めまでの玉（グループＡとする）の数字の積と4 個めから6 個めまでの玉（グループＢ）の数字の積が等しい場合には，以下の２つがある。

ⅰ) ＡとＢに含まれる玉の数字が同じ場合

ⅱ) $1\times4=2\times2$だから，Ａが$(1,4,\alpha)$ Ｂが$(2,2,\alpha)$のような数字の玉となる場合，$\alpha=3$または5

ⅰ) の場合

1から5 までの数字の玉から3 個を取り出して並べ，次にそれらと同じ数字の玉を3 個並べる場合は$3!\,{}_5C_3 3!$ 通り，残る4 個の玉は同じ数字の玉が2 個ずつだから，その並べ方は $\dfrac{4!}{2!2!}$通り

したがって並べ方の場合の数は，$3!{}_5C_3 3!\times\dfrac{4!}{2!2!}=2^4\times3^3\times5$ 通り ②

ⅱ) の場合

1個めから3 個めまでの数字が$(1,4,\alpha)$の組合せになる並べ方の場合は，3! 通り

4 個めから6 個めが数字が$(2,2,\alpha)$の組合せになる並べ方の場合の数は，3 通り

さらに$\alpha=3$ または5 だから，$3!\times3\times2=2^2\times3^2$ 通り

$(2,2,\alpha)$が1個めから3 個め，$(1,4,\alpha)$が4 個めから6 個めになる場合もあるから，

1個めから6 個めまでの並べ方は $2^2\times3^2\times2$ 通り

残りの4 個の数字は$(1,4,5,5)$ または$(1,4,3,3)$の並べ方 だから，$\dfrac{4!}{2!}$通り

これらの積として，並べ方の場合の数は，$2^3\times3^2\times\dfrac{4!}{2!}=2^5\times3^3$ 通り ③

したがって求める確率は (②＋③) ／① ＝ $\dfrac{2^4\times3^3\times5+2^5\times3^3}{2^3\times3^4\times5^2\times7}=\dfrac{10+4}{3\times5^2\times7}=\dfrac{2}{75}$ （答）

＜解説＞

順列，組合せを基礎とする確率の問題。それぞれの概念と計算を理解していれば，難しくはない。だが，(3)は場合の数を求める過程がやや煩瑣であり，計算ミスも誘発されやすいので，要注意である。

(1)

容易だから，この問題を確実に解いて落ち着こう。

(2)

100を素因数に分解して，4個の玉の数字の積が100になる場合の組合せを考えよう。難しくはないから，さらに落ち着こう。

(3)

順に取り出す，ということだから，並べ方の問題だと素直に考えよう。すると，場合の数を数えるときに順列と組合せを使うと気づく。

1から5まで数字を書いた2個ずつ，合計10個の玉の並べ方の総数①を求める。すべて異なる数字の玉10個の並べ方は10!，同じ数字の玉が2個ずつあるのだから，それらの区別はつかないのだから，2!で割る必要がある。そのように考えて，①が求まる。

初めの3個の玉の数字の積と次の3個の玉の数字の積とが同じになる条件を考える。

ｉ)とⅱ)の場合のあることは容易に解る。ｉ)では，

初めの3個の数字の並べ方

＝（異なる3個の数字の並べ方）×（5個の数字から異なる3個の数字を取り出す組合せの数）

$=3!\times {}_5C_3$

次の3個の数字の並べ方は，3個の数字は決まっているから，3! 通り

残る4個の玉の数字は，同じ数字が2個ずつだから，並べ方は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

②はこれらの積となる。

$\boxed{4}$　不等式 $1\leqq x^2+y^2\leqq 4$ が表す xy 平面内の領域を D とする。Pを円 $x^2+y^2=1$ 上の点，QとRを円 $x^2+y^2=4$ 上の異なる2点とし，三角形PQRは領域Dに含まれているとする。a，b を実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す1次変換によりPはP’，QはQ’，RはR’に移されるとする。このとき，三角形P’Q’R’が領域Dに含まれるための a，b の必要十分条件を求めよ。ただし，三角形は内部も含めて考えるものとする。

<解答>

P$(\cos\alpha, \sin\alpha)$，Q$(2\cos\beta, 2\sin\beta)$，R$(2\cos\gamma, 2\sin\gamma)$とおく。

すると，$P'=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos\alpha-b\sin\alpha \\ b\cos\alpha+a\sin\alpha \end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha \\ \sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix}$

$=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$，ただし$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

同様に，$Q'=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos\beta \\ 2\sin\beta \end{pmatrix}=2\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos(\beta+\theta) \\ \sin(\beta+\theta) \end{pmatrix}$

同様に，$R'=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos\gamma \\ 2\sin\gamma \end{pmatrix}=2\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos(\gamma+\theta) \\ \sin(\gamma+\theta) \end{pmatrix}$

したがって一次変換$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$は，各点を原点の周りに$\theta$回転し，原点から$\sqrt{a^2+b^2}$倍の距離にする。

P’が領域D に入るためには，$1 \leqq \sqrt{a^2+b^2} \leqq 2$，$\therefore 1 \leqq a^2+b^2 \leqq 4$ ①

Q’，R’が領域D に入るためには，$1 \leqq 2\sqrt{a^2+b^2} \leqq 2$，$\therefore \frac{1}{4} \leqq a^2+b^2 \leqq 1$ ②

①，②を満足するのは，$a^2+b^2=1$

$a^2+b^2=1$であれば，P は円$x^2+y^2=1$ 上を，Q，R は円$x^2+y^2=4$ 上を同じ角度回転する。したがって，△PQR≡△P’Q’R’だから，△PQR が領域D に含まれれば△P’Q’R’も領域D に含まれる。

したがって，$a^2+b^2=1$が必要十分条件である。

＜解説＞

図１を参照する。行列によるAの１次変換により点P，Q，Rがどのように移動するか考える。このとき，原点の周りに角θだけ回転する移動は1次変換$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$であることを思い出そう。すると，$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$も回転に関係するだろうと類推が働く。その上で，P，Q，Rをx 軸からの回転角によって表示して計算することを着想しよう。この種の問題に取り組んだことのある読者は，$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$なる1次変換は，点を原点の周りに回転し，原点から$\sqrt{a^2+b^2}$倍の距離にするということを概ね覚えているだろう。それを活用すれば良い。

以上のような着想に至らない場合，以下のように単純に考える方法もある。

P(1，0)とすれば，P’(a，b)だから，$1 \leqq \sqrt{a^2+b^2} \leqq 2$

Q(2，0)とすれば，Q’($2a$，$2b$)だから，$1 \leqq 2\sqrt{a^2+b^2} \leqq 2$

両式を満足するのは，$\sqrt{a^2+b^2}=1$，すなわち$a^2+b^2=1$

一方，$a^2+b^2=1$とすれば，$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$とおくことができる。

$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$となって，原点の周りに$\theta$回転する1次変換となる。したがって，P は円$x^2+y^2=1$ 上を，Q，R は円$x^2+y^2=4$ 上をθ回転してP’，Q’，R’となる。

（以下は上の解と同じである。）

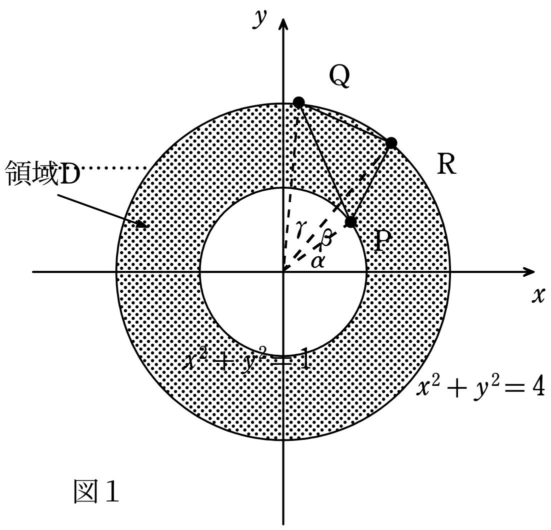

図１

$\boxed{5}$ 整数nに対して，

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}dx$$

とする。

(1) I_0を求めよ。

(2) nを正の整数とするとき，I_n-I_{n-1}を求めよ。

(3) I_5を求めよ。

<解答>

(1)

与式で$n=0$として，$I_0=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$\sin x=u$とおく。$\frac{du}{dx}=\cos x$だから，$\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{1}{u}du=\log|u|+C$

$x=\frac{\pi}{4}$で$u=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\frac{\pi}{2}$で$u=1$，$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\Big[\log|u|+C\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=\frac{1}{2}\log 2$　（答）

(2)

$I_{n-1}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n-1)x)}{\sin x}dx$だから，

$$I_n-I_{n-1}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)-\cos((2n-1)x)}{\sin x}dx$$

$\cos((2n+1)x)=\cos(2nx)\cos x-\sin(2nx)\sin x$

$\cos((2n-1)x)=\cos(2nx)\cos x+\sin(2nx)\sin x$

したがって，$I_n-I_{n-1}=-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2nx)\,dx=\frac{1}{n}\Big[\cos(2nx)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\frac{1}{n}\left\{\cos(n\pi)-\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)\right\}=\frac{1}{n}\left\{(-1)^n-\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$

(3)

$(I_5-I_4)+(I_4-I_3)+(I_3-I_2)+(I_2-I_1)+(I_1-I_0)$

$=I_5-I_0=\frac{1}{5}(-1)+\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{3}(-1)+\frac{1}{2}(2)+(-1)=-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1-1=\frac{-8}{15}$

$I_5=I_0-\frac{8}{15}=\frac{1}{2}\log 2-\frac{8}{15}$　（答）

<解説>

三角関数を被積分関数にもつ積分の問題。題意は簡明であり，計算も難しくはない。そのことを予

感しながら，早めに着手して正答したい問題である。問題は誘導的に構成されているから，前問を後問で活用する。

(1)

$n=0$とおけば，被積分関数は簡単な形式になる。常套的な変数変換によって，積分の実行は容易である。

(2)

三角関数の加法定理を利用すれば，被積分関数は簡単な形式になる。

(3)

(2)を活用すれば，簡明な順序と形式で求めることができる。

$\boxed{6}$　以下の問いに答えよ。

(1)　nを自然数，aを正の定数として，

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく。$x>0$における関数$f(x)$の極値を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　nが2以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

＜解答＞

(1)

$$f'(x)=\frac{n+1}{a+x}-\frac{1}{x}=\frac{nx-a}{x(a+x)}$$

$x=\dfrac{a}{n}$において，$f'(x)=0$だから，図１のように$f(x)$は変化し，極値をとる

x	0		$\frac{a}{n}$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

図１

$$f\left(\frac{a}{n}\right)=(n+1)\left\{\log\left(a+\frac{a}{n}\right)-\log(n+1)\right\}-n(\log a-\log n)-\log\frac{a}{n}=0$$

$\therefore$ 極値は0

(2)

(1)の結果から，

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x\geqq 0$$

これを整理すると，$(n+1)\log\dfrac{a+x}{n+1}\geqq\log\left(\dfrac{a}{n}\right)^{n}x$，したがって$\left(\dfrac{a+x}{n+1}\right)^{n+1}\geqq\left(\dfrac{a}{n}\right)^{n}x$　①

$b_k=\dfrac{k+1}{k}$とおく。$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k$

$b_1b_2\cdots b_{k-1}b_k=n+1$

したがって，$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k>\sqrt[n]{n+1}=\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_{n-1}b_n}$　② を証明すれば良い。

数学的帰納法によって②を証明する。

$n=2$のとき，$(b_1+b_2)^2-4b_1b_2=(b_1-b_2)^2\geqq 0$，$\therefore (b_1+b_2)^2\geqq 4b_1b_2$，$\therefore\dfrac{b_1+b_2}{2}\geqq\sqrt{b_1b_2}$

等号は$b_1=b_2$のときだが，ここでは$b_1\fallingdotseq b_2$だから，$\dfrac{b_1+b_2}{2}>\sqrt{b_1b_2}$

したがって，$n=2$ のとき②は成立する。

②が成立するとすれば，$n+1$でも成立することを証明すれば良い。

すなわち，$\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}b_k>\sqrt[n+1]{n+1+1}=\sqrt[n+1]{b_1b_2\ldots b_{n-1}b_nb_{n+1}}$　③ を証明する。

①において，$a=\sum_{k=1}^{n}b_k$，$x=b_{n+1}$とおけば，

$$\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n+b_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}\geqq\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\right)^n b_{n+1}$$

$$>\left(\sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_{n-1}b_n}\right)^n b_{n+1}=b_1b_2\cdots b_{n-1}b_nb_{n+1}$$

したがって，$\dfrac{b_1+b_2+\ldots+b_n+b_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}b_k>\sqrt[n+1]{b_1b_2\ldots b_{n-1}b_nb_{n+1}}$

すなわち，②が成立すれば，③が成立する。②は$n=2$ において成立するから，数学的帰納法により，②が証明された。

<解説>

着想，着眼が必要な難問である。だが，ある基礎知識が閃けば，容易に解けるかも知れない。

(1)

対数の微分を覚えていれば，問題なかろう。

(2)

当然(1)の結果を活用して解く問題である。だが，どのように結びつくのか，見当がつかない。不等式の証明の問題だから，(1)の結果から，$f(x)\geqq 0$だから，これを表現して何が見えてくるかを考える。

①が得られるが，それでも与式とどのように結びつくのか見えてこない。与式を凝視してオヤッと思えば正答に至る道への入り口となることが解る。

$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$を凝視して，両辺の $\dfrac{1}{n}$ に着目して，$(n+1)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{n+1}$も考えて，相加平均と相乗平均の関係を着想する（思い出す）ことが正答への入り口となる。

うまいぐあいに，$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k}=n+1$ではないか。まさに，相加平均≧相乗平均ではないか。すると，この問題は相加平均≧相乗平均を(1)の結果を利用して証明する問題ではないか？と考えれば前へ進むことができる。

いかなる整数nでも成立する式を証明する有力な方法は数学的帰納法であることは読者は承知であろう。ここでも帰納法を用いて証明することを試みる。そのために，(1)の結果をどのように利用するか,

がポイントである。極値0を導く過程で，極値0は最小値であることが明らかになっているから，関数$f(x) \geqq 0$である。これをできるだけ簡明な式で表現すると①が得られる。

①を凝視して，頭を働かせると，左辺は相加平均を示唆する表現，右辺は相乗平均を示唆する表現であることに気づく。$x=b_{n+1}$とおくと，すっと前へ進めるようになるのだが，閃くかどうか。

以上のように，正答に至るにはいくつかの着眼，着想，閃きが必要なのだが，難関大学の理系に挑戦しようとする読者は，日頃，数学的感覚を磨いているだろうから，案外簡単に解けるかも知れない。

一方，状況によっては難しくて手が出ないかも知れない。だからといって落胆する必要はない。筆者も全く解らなかった。やむなく，別サイトで勉強させてもらった。なぜ，歯が立たなかったか，それなりに事情があるのだが，控えさせてもらう。

＜総評＞

例年同様，難易がほど良く混じった問題構成である。容易な問題から手をつけるとすれば，私は１，５，４，２，３，６の順と思った。読者はいかがであろうか。

$\boxed{1}$

2次方程式の解の範囲に関する問題。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$

ベクトルを利用した表示と演算による立体図形の問題である。ベクトルを用いることにより，立体図形の取り扱いが非常に容易になる。立体図形は紙面に描くことが難しく，脳内にイメージを描くことも難しい。だから，苦手，腰が引けるという読者も多いだろう。受験勉強の中で，できるだけ描くこと，脳内に描くことをトレーニングしてほしい。理系が扱う物は立体だから将来必ず役に立つ。

この問題は平行六面体というわかり易い単純な図形で，設問も簡明である。ベクトル表示と演算の基本を理解していれば大丈夫だろう。難易度はＢ。

$\boxed{3}$

素直に考えていけば良い，確率の問題。場合の数を算出するために，順列と組合せの考え方を正しく適用する。(3)は解答方針に思考力と確率事象に対する的確な知識を必要とする。単純ミスや計算ミスが誘発されやすいので注意する。(1)，(2)は難易度Ｃ，(3)は難易度Ｂ＋。

$\boxed{4}$

行列による1次変換の問題。与えられた行列から，原点の周りの回転に関係すると着想すれば，容易に正答に至るであろう。難易度Ｂ。

$\boxed{5}$

三角関数を被積分関数とする積分の問題。題意は簡明であり，解答方針に戸惑うことはないだろう。誘導的にできているから，前問を利用して解いていく。難易度はＢ－。

$\boxed{6}$

整数式の証明問題。数学的帰納法を用いるのだが，解説で述べたように，解答方針を立てるためには，適切な着眼着想が必要であり，外れると迷路にはまり込む問題である。難易度Ａ。

150228

前期：文学部・教育学部・法学部・経済学部・医学部保健学科看護学専攻

試験時間 100分

$\boxed{1}$ 曲線 C：$y=x^2$ 上の点 P$(a,\ a^2)$ における接線を l_1，点 Q$(b,\ b^2)$ における接線を l_2 とする。ただし，$a<b$ とする。l_1 と l_2 の交点をRとし，線分PR，線分QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする。

(1) Rの座標を a と b を用いて表せ。

(2) S を a と b を用いて表せ。

(3) l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$y'=2x$ だから，接線 l_1 は，$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$，接線 l_2 は，$y=2b(x-b)+b^2=2bx-b^2$

両者の交点は $2a(x-a)+a^2=2b(x-b)+b^2$ より，$x=\dfrac{a+b}{2}$，$y=ab$

したがって交点 R の座標は，$\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$ （答）

(2)

図1を参照する。

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{x^2-(2ax-a^2)\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{x^2-(2bx-b^2)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-ax^2+a^2x\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}-bx^2+b^2x\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-a\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+a^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$-\frac{a^3}{3}+\frac{b^3}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-b^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)+(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(b^2-a^2)\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)^3}{12} \quad \text{（答）}$$

(3)

接線 l_1 の傾きは $2a$，接線 l_2 の傾きは $2b$，両者が垂直ということは，$2a\times2b=-1$

したがって，$ab=-\dfrac{1}{4}$，$b=-\dfrac{1}{4a}$，したがって $S=-\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{4a}+a\right)^3$，$b>a$ だから，$a<0$

$|a|=\alpha$ とおくと，$S=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{4\alpha}+\alpha\right)^3=\dfrac{1}{12}\left\{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}-\sqrt{\alpha}\right)^2+1\right\}^3\geqq\dfrac{1}{12}$

したがって，S の最小値は $\dfrac{1}{12}$ （答）

＜解説＞

図を描いて考える。

(1)

接線l_1，l_2の方程式を求める。

(2)

図を描いて，面積を求める図形を確認し，被積分関数と積分範囲を確定して，積分を実行する。

(3)

直線どうしが垂直である条件は記憶しておこう。その条件を求めることから考えると時間が足りなくなる恐れがある。図２を描けば，容易に求めることができるが，試験の最中に容易かどうか。

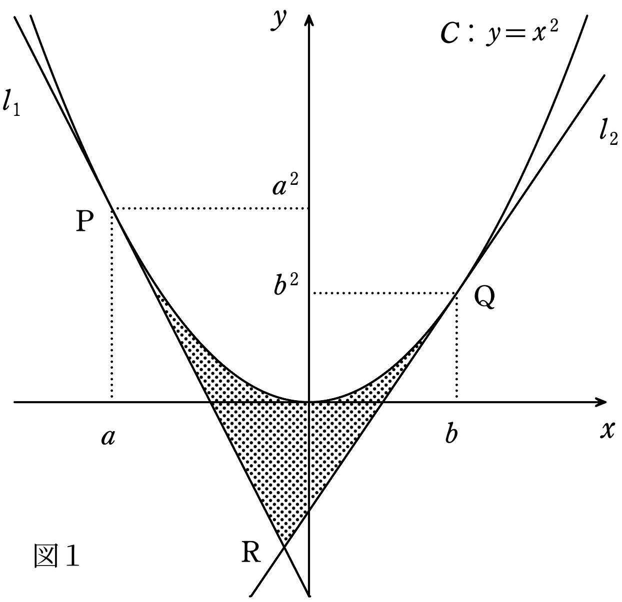

図１

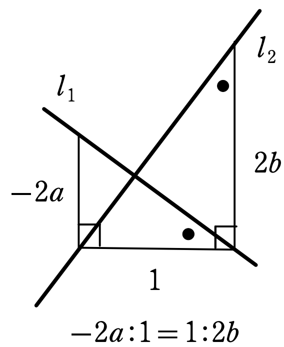

図２

$\boxed{2}$　理系の問題$\boxed{3}$と同じである。そちらを参照のこと。

$\boxed{3}$　tを正の実数とする。三角形OABの辺OAを2：1に内分する点をM，辺OBをt：1に内分する点をNとする。線分ANと線分BMの交点をPとする。

(1)　$\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$およびtを用いて表せ。

(2)　直線OPは線分BMと直交し，かつ∠AOBの二等分線であるとする。このとき，辺OAとOBの長さの比とtの値を求めよ。

＜解答＞

(1)

図１を参照する。$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AN}$，ただし$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AN}$として，$0<k<1$である。

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{ON}=-\overrightarrow{OA}+\dfrac{kt}{t+1}\overrightarrow{OB}$，したがって$\overrightarrow{OP}=(1-k)\overrightarrow{OA}+\dfrac{kt}{t+1}\overrightarrow{OB}$　①

$\overrightarrow{OA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OM}$だから，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{2}(1-k)\overrightarrow{OM}+\dfrac{kt}{t+1}\overrightarrow{OB}$

Pは線分BM上にあるから，$\dfrac{3}{2}(1-k)+\dfrac{kt}{t+1}=1$，$\therefore\ k=\dfrac{t+1}{t+3}$

①に代入して，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{t+3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{t+3}\overrightarrow{OB}$　（答）

(2)

△OPMと△OPBは辺OPを共有し，

∠MOP＝∠NOP，∠MPO＝∠NPO＝∠Rだから，△OPM≡△OPB

OB=OM=$\dfrac{2}{3}$OA，したがってOA：OB=3：2

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{t+3}(2\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB})\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{1}{t+3}\left\{\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OA}^2+\left(\dfrac{2}{3}t-2\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OB}^2\right\}=0$

OA＝a，∠AOB=θとして，　$\dfrac{4}{3}a^2+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}t-2\right)a^2\cos 2\theta-\dfrac{4}{9}a^2t=0,$

したがって，$\left(\dfrac{t}{3}-1\right)(\cos^2\theta-1)=0$

$\theta>0$だから $\cos^2\theta\fallingdotseq 1$，したがって$\dfrac{t}{3}-1=0$，$\therefore\ \dfrac{t}{3}=1$，$\therefore\ t=3$

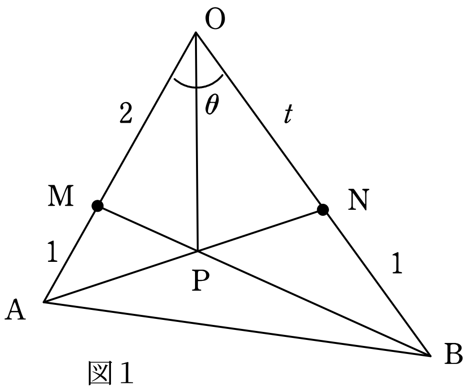

図１

＜解説＞

ベクトルによる図形の表現と計算の問題。ベクトルを用いることにより，図形の性質を多彩に容易に表現することができる。

(1)

この解答のポイントは，「Pは線分BM上にあるから，$\dfrac{3}{2}(1-k)+\dfrac{kt}{t+1}=1$」とするところにある。つまり，△OMBにおいて，辺MB上の点をPとして，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OM}+\beta\overrightarrow{OB}$と表したとき，$\alpha+\beta=1$を意味する。図２において

$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OM}+\beta\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OB'}$

$\alpha=\dfrac{OM'}{OM}=\dfrac{PB'}{OM}=\dfrac{BB'}{OB}=\dfrac{OB-OB'}{OB}=\dfrac{OB-\beta OB}{OB}=1-\beta$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$

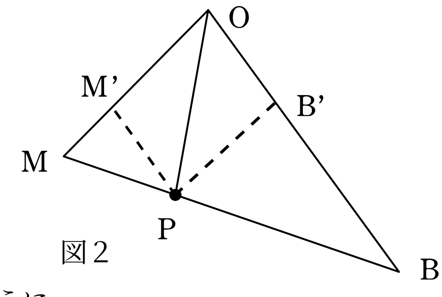

図２

このように，三角形の頂点と対辺上の点を結ぶベクトルを2辺のベクトルの和で表したとき，その係数の和が1になることは覚えておきたい。教科書に記載されている。同様に以下のことも記載されている。図２から明らかなように，

$\dfrac{PB}{MB}=\dfrac{PB'}{OM}=\alpha$，$\dfrac{MP}{MB}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{M'P}{OB}=\beta$，したがってPは線分MBを$\beta：\alpha$に内分する点である。

上記のようなポイントを直ちに思い出さなかったり，閃かなかったりしたら，自力で導かなければならない。しかし上記のことは，直感的に思いつくことでもあるので，思いついて簡単にチェックして，正しかったら使おう。

(2)

直交するベクトルの内積は0になる。ていねいに計算すれば良い。内積の公式は覚えておかなければならない。

$\boxed{4}$ 実数 x，y に対して

$$A=2\sin x+\sin y,\qquad B=2\cos x+\cos y$$

とおく。

(1) $\cos(x-y)$をA，B を用いて表せ。

(2) x，y が$A=1$を満たしながら変化するとき，B の最大値と最小値，およびそのときの$\sin x$，$\cos x$の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$A^2=4\sin^2 x+4\sin x\sin y+\sin^2 y$

$B^2=4\cos^2 x+4\cos x\cos y+\cos^2 y$

$A^2+B^2=4+4(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+1=5+4\cos(x-y)$

$\therefore\ \cos(x-y)=\dfrac{1}{4}(A^2+B^2-5)$ （答）

(2)

$A^2+B^2=5+4\cos(x-y)$，$A=1$だから，$B^2=4\cos(x-y)+4$

$-1\leqq\cos(x-y)\leqq 1$だから，$-4\leqq B^2-4\leqq 4$，$0\leqq B^2\leqq 8$，$\therefore\ -2\sqrt{2}\leqq B\leqq 2\sqrt{2}$

すなわち$\cos(x-y)=1$のとき，B の最大値は$2\sqrt{2}$，最小値は$-2\sqrt{2}$

$\cos(x-y)=1$だから，$x=y+2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,...)$，したがって$\sin y=\sin x$

$A=2\sin x+\sin y=3\sin x=1$，$\therefore\ \sin x=\dfrac{1}{3}$

B が最大値$2\sqrt{2}$のとき，$2\sqrt{2}=2\cos x+\cos y=3\cos x$，$\therefore\ \cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

B が最小値$-2\sqrt{2}$のとき，$-2\sqrt{2}=2\cos x+\cos y=3\cos x$，$\therefore\ \cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

以上をまとめると，

B の最大値は$2\sqrt{2}$で，このとき$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

B の最小値は$-2\sqrt{2}$で，このとき$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

＜解説＞

(1)

式を凝視して，$\cos(x-y)$をどのように導くかを考える。すると，三角関数の加法定理に着目すれば良いことに気づくあろう。

(2)

B^2が最大値8をとるということは，Bの最大値は$\sqrt{8}$，最小値は$-\sqrt{8}$ということになる。

＜総評＞

文系といえども，骨のある問題が揃っている。４，１，３，２の順序で手をつけたい。２(3)に時間をとられるより，他の問題を確実にする方が良いかも知れない。

$\boxed{1}$

2次方程式の表す図形を対象とした微分，積分の問題。題意は簡明で複雑なところがなく，解答方針に迷うところもないだろう。ていねいに計算していく。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$

理系と同じ確率の問題。(1)，(2)は難易度Ｃであり，確実に正答したい。(3)は確率問題に習熟していないと難しいだろう。できなくても落胆しない。難易度Ｂ＋。

$\boxed{3}$

図形をベクトルによって扱う問題。数学Ｂの教科書に記載されている基礎事項を理解していることが必要である。難易度Ｂ。

$\boxed{4}$

三角関数の問題。題意は簡明であり，紛れも少ないので，着実に正答したい。難易度Ｂ－。

150321