# 2014（H26）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

180分

$\boxed{1}$ (60点)

3 以上の奇数$n$ に対して，$a_n$ と$b_n$ を次のように定める.

$$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)\ ,\ \ b_n=\frac{n^2-1}{8}$$

(1)　$a_n$と$b_n$ はどちらも整数であることを示せ.

(2)　$a_n-b_n$ は4 の倍数であることを示せ.

＜解答＞

(1)

$(k-1)k(k+1)$は連続する３つの整数の積である。連続する３つの整数には必ず2 の倍数と3 の倍数が含まれるから，$(k-1)k(k+1)$は6 の倍数である（ただし，$k\neq 0$の場合）。

$\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)$は　6 の倍数の和だから，6 の 倍数である。

したがって，$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)$は整数である。

$n=2j+1$　$(j=1,2,3,...)$　とおけば,

$$b_n=\frac{n^2-1}{8}=\frac{(n+1)(n-1)}{8}=\frac{2j(2j+2)}{8}=\frac{j(j+1)}{2}$$

$j$ あるいは$(j+1)$ のいずれかが偶数だから，$b_n$ は整数である。

(2)

$$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k^3-k)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\frac{(n-1)^2n^2}{4},\ \ \sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2},\ \ \therefore\ \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k^3-k)=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}$$

$$a_n-b_n=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}-\frac{n^2-1}{8}=\frac{(n-3)(n-1)(n+1)^2}{24}$$

$$\frac{(n-3)(n-1)(n+1)^2}{24}=\frac{(2j-2)2j(2j+2)^2}{24}=\frac{2(j-1)j(j+1)^2}{3}\quad ①$$

$j=1$，すなわち$n=3$の場合は，$a_n-b_n=0$である。

$j=2,3,4,...$　の場合は，$(j-1)$，$j$，$(j+1)$ は連続する３つの整数だから，必ず2 の倍数と3 の倍数を含む。したがって，①は4 の倍数である。

以上によって，$a_n-b_n$ は$n=3$ の場合を除いて，4 の倍数である。

＜解説＞

整数の問題。特段の着想が必要な問題ではなく，解答方針に迷うこともないだろう。

(1)

連続する３つの整数には，必ず2 の倍数と3 の倍数が含まれること，すなわちそれらの積は6 の倍数

であることに気づく必要がある。

(2)

ていねいに計算すれば良い。ポイントは$\sum_{k=1}^{n-1} k^3$を求めること。数学Bの教科書に記載されている。公式を覚えていることが必要だ。思い出せず，求めるようでは，時間がかかって辛い。

以下のように教科書に記載されている。

$k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$

$\sum_{k=1}^{n-1}\{k^4-(k-1)^4\}=(n-1)^4=\sum_{k=1}^{n-1}(4k^3-6k^2+4k-1)$，したがって

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3=\frac{(n-1)^4}{4}+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2-\sum_{k=1}^{n-1} k+\frac{n-1}{4}=\frac{(n-1)^4}{4}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{4}-\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n-1}{4}$$

$$=\frac{(n-1)^2n^2}{4}$$

上記で$\sum_{k=1}^{n-1} k^2$を求める必要がある。これも同様の手法により，

$k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$

$\sum_{k=1}^{n-1}\{k^3-(k-1)^3\}=(n-1)^3=\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2-3k+1)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1} k^2=\frac{(n-1)^3}{3}+\sum_{k=1}^{n-1} k-\frac{n-1}{3}=\frac{(n-1)^3}{3}+\frac{n(n-1)}{2}-\frac{1}{3}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$n=3$のとき，$a_3=1$，$b_3=1$で $a_3-b_3=0$だから，4の倍数ではない。だから，この問題は少々おかしいことを指摘しておく。

$\boxed{2}$ (60点)

$a>1$とし，次の不等式を考える．

$$(*)\ \frac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1) $a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式（＊）が成り立つことを示せ．

(2) すべての $t>0$ に対して上の不等式（＊）が成り立つような$a$の範囲を求めよ．

＜解答＞

(1)

$a=2$ のとき，（＊）は$\frac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{2}}$，したがって $t>0$ に対して $e^t-1\geqq te^{\frac{t}{2}}$ ①

①を証明すれば良い。$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{2}}$とおく。$f'(t)=e^t-e^{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}}=\left(e^{\frac{t}{2}}-1-\frac{1}{2}t\right)e^{\frac{t}{2}}$

$f'(t)=g(t)e^{\frac{t}{2}}$，$g(t)=e^{\frac{t}{2}}-1-\frac{1}{2}t$ とおく。

$g(0)=0$で$g'(t)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)>0$ だから，$g(t)>0$ $(t>0)$

$f'(0)=0$だから，$f'(t)>0$　$(t>0)$，したがって$f(t)$は単調増加関数で，$f(0)=0$だから，

$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{2}}>0$，よって①が証明された。

(2)

（＊）$\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$，したがって $t>0$ に対して $e^t-1\geqq te^{\frac{t}{a}}$

$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{a}}\geqq 0$　②　とおけば，

$t>0$ において②を満たす$a$の範囲を求めれば良い。

$f'(t)=e^t-e^{\frac{t}{a}}-\dfrac{1}{a}te^{\frac{t}{a}}=\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{1}{a}t\right)e^{\frac{t}{a}}=g(t)e^{\frac{t}{a}}$　③

$f'(0)=g(0)=0$

$g(t)=\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{1}{a}t\right)$，$g'(t)=\dfrac{a-1}{a}e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a-1}\right)$

$t>0$で$e^{\frac{a-1}{a}t}>1$であるから，

ⅰ）$\dfrac{1}{a-1}<1$，すなわち$a>2$のとき

$e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a-1}>0$だから $g'(t)>0$，したがって$g(t)$は単調増加で，$g(0)=0$だから，$g(t)>0$

したがって，③から$f'(t)>0$だから$f(t)$は単調増加で，$f(0)=0$だから，$f(t)>0$

ⅱ）$a=2$のとき

(1)の結果から，$f(t)\geqq 0$

ⅲ）$\dfrac{1}{a-1}>1$，すなわち$a<2$のとき

$e^{\frac{a-1}{a}t}=\dfrac{1}{a-1}$を満たす$t=\alpha>0$が存在する。$0<t<\alpha$で$g(t)<0$だから，$f'(t)<0$，したがって

$f(t)$は図１の ように変化する。したがって，少なくも $0<t<\alpha$ において$f(t)<0$となる。

以上によって，すべての$t>0$ に対して上の不等式（＊）が成り立つような$a$の範囲は $a\geqq 2$

| $t$ | 0 | | $\alpha$ | |
|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(t)$ | 0 | ↘ | $g(\alpha)$ | ↗ |
| $f'(t)$ | 0 | $-$ | $g(\alpha)e^{\frac{\alpha}{a}}$ | |
| $f(t)$ | 0 | ↘ | | |

図１

＜解説＞

解答方針に迷う問題だ。泥臭く，導関数の正負から関数の増減を議論する方法が直ちに浮かぶが，もっとスマートな方法がないかと模索を始めると，なかなか解答方針が定まらない。ここは泥臭く，１次の導関数，２次の導関数を求めて考えよう。

(1)

（＊）を$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{2}}$のようにおいて，$f(t)$の変化を調べるのがポイントである。

このとき，$f'(t)=e^t-e^{\frac{t}{a}}-\dfrac{1}{a}te^{\frac{t}{a}}=\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{1}{a}t\right)e^{\frac{t}{a}}=g(t)e^{\frac{t}{a}}$のように表現すれば，$e^{\frac{t}{a}}$は単調増加関数だから，$g(t)$の変化を調べることによって，$f(t)$の変化を容易に調べることができる。

(2)

同様に，$f(t)$の変化を調べる。このとき　$t>0$で$e^{\frac{a-1}{a}t}>1$だから，$\dfrac{1}{a-1}$と1の大小関係によって，$g'(t)=0$の解の有無が決まることがポイントである。ここに着眼して，$a$の範囲を区別して考察する。

なお，図２に示すように関数 $e^t-1$ と関数 $te^{\frac{t}{a}}$ は非常に似た形状をしている。

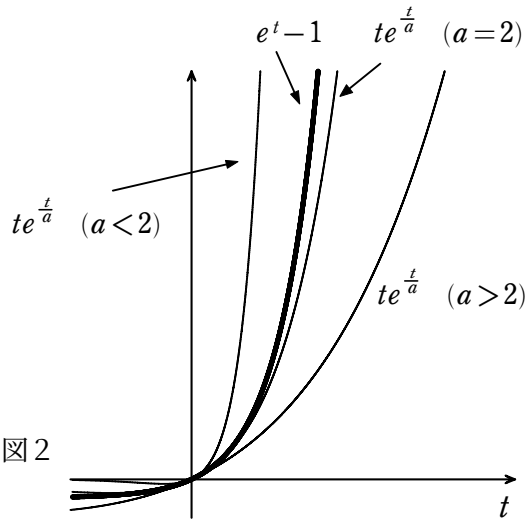


図２

$\boxed{3}$ (60点)

1個のさいころを投げて，出た目が1か2であれば行列 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ を，出た目が3か4であれば行列$B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ を，出た目が5か6であれば行列 $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ を選ぶ．そして，選んだ行列の表す１次変換によって$xy$平面上の点Rを移すという操作を行う．点Rは最初は点(0 , 1)にあるものとし，さいころを投げて点Rを移す操作を$n$回続けて行ったときに点Rが点(0 , 1)にある確率を$p_n$，点(0 , −1)にある確率を$q_n$とする．

(1)　$p_1$，$p_2$と$q_1$，$q_2$を求めよ．

(2)　$p_n+q_n$と$p_{n-1}+q_{n-1}$の関係式を求めよ．また，$p_n-q_n$と$p_{n-1}-q_{n-1}$の関係式を求めよ．

(3)　$p_n$を$n$を用いて表せ．

＜解答＞

(1)

行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ は原点の周りに$-90°$ 回転変換する。

行列$B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は原点の周りに$90°$ 回転変換する。

行列 $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は$y$ 軸に関して対称移動する。

1 回のさいころ投げで点 $(0\,,1)$ にあるのは$C$ による変換だから，$p_1=\dfrac{1}{3}$　（答）

2 回のさいころ投げで点 $(0\,,1)$ にあるのは，$CC$，$AB$，$BA$ による変換だから，

$p_2=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$　（答）

1 回のさいころ投げで点 $(0\,,-1)$ にあることはないから，$q_1=0$　（答）

2 回のさいころ投げで点 $(0\,,-1)$ にあるのは，$AA$，$BB$ による変換だから，

$q_2=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$　（答）

(2)

$n$ 回目で点 $(0\,,1)$ にある場合は，$n-1$回目で点 $(0\,,1)$，$(1\,,0)$，$(-1\,,0)$ にある場合である。

$n-1$回目で点 $(0\,,1)$にある確率は$p_{n-1}$，$(1\,,0)$，$(-1\,,0)$ にある確率は同じで，$\dfrac{1}{2}(1-p_{n-1}-q_{n-1})$

したがって，$p_n=\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}(1-p_{n-1}-q_{n-1})+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}(1-p_{n-1}-q_{n-1})=\dfrac{1}{3}(1-q_{n-1})$

$n$ 回目で点 $(0\,,-1)$にある場合は，$n-1$回目で点 $(0\,,-1)$，$(1\,,0)$，$(-1\,,0)$ にある場合である。

したがって，$q_n=\dfrac{1}{3}q_{n-1}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}(1-p_{n-1}-q_{n-1})+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}(1-p_{n-1}-q_{n-1})=\dfrac{1}{3}(1-p_{n-1})$

$p_n+q_n=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}(p_{n-1}+q_{n-1})$　（答）

$p_n-q_n=\dfrac{1}{3}(p_{n-1}-q_{n-1})$　（答）

(3)

$U_n=p_n+q_n$，$V_n=p_n-q_n$とおけば，(2)から

$U_n=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}U_{n-1}$，$V_n=\dfrac{1}{3}V_{n-1}$

$$U_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(U_{n-1}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)^2\left(U_{n-2}-\frac{1}{2}\right)=\cdots=\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\left(U_1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\left(p_1+q_1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}+0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}\right)^n,\ \therefore U_n=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$$

$$V_n=\frac{1}{3}V_{n-1}=\cdots=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}V_1=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(p_1-q_1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}-0\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$p_n=\dfrac{1}{2}(U_n+V_n)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4}$　（答）

＜解説＞

行列による１次変換，確率，数列などの知識が絡んだ，総合的な数学能力が問われる良問である。

(1)

まずは３つの１次変換の作用を明確にし，点$(0,1)$にあったRがどのように動くかを確認する。これらは代表的な１次変換であり，教科書にも掲載されているから，容易に解るだろう。点$(0,1)$を動かすことのない変換は$C$である。なお反時計方向の回転が正である。

(2)

$n-1$回目で点$(1,0)$，$(-1,0)$にある確率は同じで，$\frac{1}{2}(1-p_{n-1}-q_{n-1})$となることに気づくことがポイントである。点$(0,1)$に$B$を作用すると，反時計方向に$90°$回転するから点$(-1,0)$にくる。点$(0,1)$に$A$を作用すると，反時計方向に$-90°$回転するから点$(1,0)$にくる。$A$，$B$の作用する確率は$\frac{1}{3}$と等しいから，$(1,0)$，$(-1,0)$にある確率は同じである。

(3)

(1)，(2)の結果を利用して解く。(2)で求めた$p_n+q_n$，$p_n-q_n$の表式を見れば，直ぐに両者を$n$によって表現することができることに気づくだろう。数列の一般項を求める技法を適用すれば良い。

$\boxed{4}$ (60点)

点$\mathrm{P}(t,\ s)$が$s=\sqrt{2}t^2-2t$を満たしながら$xy$平面上を動くときに，点Pを原点を中心として$45°$回転した点Qの軌跡として得られる曲線を$C$とする．さらに，曲線$C$と$x$軸で囲まれた図形を$D$とする．

(1) 点$\mathrm{Q}(x,\ y)$の座標を，$t$を用いて表せ.

(2) 直線$y=a$と曲線$C$がただ１つの共有点を持つような定数$a$の値を求めよ.

(3) 図形$D$を$y$軸のまわりに１回転して得られる回転体の体積$V$を求めよ.

＜解答＞

(1)

原点を中心として$45°$回転する１次変換は

$$A=\begin{pmatrix}\cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45°\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

点$\mathrm{P}(t,\ s)$に$A$を作用すると点$\mathrm{Q}(x,\ y)$になるのだから，$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t \\ s\end{pmatrix}$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(t-s)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}t^2-3t)=-t^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}t \quad \text{（答）}$$

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(t+s)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}t^2-t)=t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}t \quad \text{（答）}$$

(2)

(1)の結果から，$x+y=\sqrt{2}\,t$，$y-x=\sqrt{2}\,s$

$s=\sqrt{2}\,t^2-2t$ に代入して整理すると，曲線$C$の式は，$x^2+(2y-1)x+y^2-3y=0$　①

$y=a$とすれば，$x^2+(2a-1)x+a^2-3a=0$　②

①と直線$y=a$がただ１つの共有点を持つということは，②の実数解がただ1つの解，すなわち重解をもつということだから，

解の判別式$(2a-1)^2-4(a^2-3a)=0$，したがって$a=-\dfrac{1}{8}$　（答）

(3)

①の解を$\alpha$，$\beta$　（$\alpha>\beta$）とすれば，図形$D$を$y$軸のまわりに１回転して得られる回転体の断面は半径$\alpha$，$\beta$の二つの同心円に囲まれたドーナツ部である。

その面積は，$S=\pi(\alpha^2-\beta^2)=\pi(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-\pi(2y-1)\sqrt{8y+1}$

したがって，$V=\displaystyle\int_{-\frac{1}{8}}^{0} S\,dy=-\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}(2y-1)\sqrt{8y+1}\,dy$

$u=\sqrt{8y+1}$とおけば，$y=\dfrac{1}{8}(u^2-1)$，$dy=\dfrac{u}{4}du$

$\displaystyle\int y\sqrt{8y+1}\,dy=\frac{1}{32}\int u^2(u^2-1)du=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3\right)$

$\displaystyle\int\sqrt{8y+1}\,dy=\int\frac{u^2}{4}du=\frac{u^3}{12}$

また，$y=0\to u=1$，$y=-\dfrac{1}{8}\to u=0$

したがって，

$$\int_{-\frac{1}{8}}^{0} y\sqrt{8y+1}\,dy=\frac{1}{32}\left[\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3\right]_0^1=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{-1}{16\times15}$$

$$\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\sqrt{8y+1}\,dy=\left[\frac{u^3}{12}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

$$V=-\pi\left(\frac{-2}{16\times15}-\frac{1}{12}\right)=\frac{11}{120}\pi$$　（答）

＜解説＞

(1)

45°の回転を行列による１次変換によって行うことがポイントである。幸い問題３がそのような問題だから，直ぐに気づくであろう。むろん，行列を使わなくてもできるが，格段に容易である。万一，回転の行列を思い出さなかったどうするか。

(2)

曲線$C$の式を求める必要がある。ここで，$x+y=\sqrt{2}\,t$，$y-x=\sqrt{2}\,s$という表式を利用することが，計算を速くする小さな工夫である。ただ１つの共有点ということから，直ちに２次方程式が重解をもつということに至らなければならない。

(3)

この問題を考えるとき，大雑把に図形を描いてみると良い。$s=\sqrt{2}\,t^2-2t$ は２次関数のグラフである。これを45° 回転するとどうなるか。図形$D$ はどのようか。これを$y$ 軸の周りに回転すると，どのような回転立体になるか理解しておこう。すると，この問題の解答方針を迅速に導くことにつながる。

曲線$C$ と$x$ 軸に囲まれた図形$D$ は図１のようになる。$y$ 軸に垂直な平面で，$D$を$y$ 軸の周りに回転した立体を切断すると，その断面は図２のように同心円となる。$y=0$ のとき，$\alpha=1$，$\beta=0$，$y=-\dfrac{1}{8}$のとき重解で，$\alpha=\beta=0$である。回転立体の体積は，この同心円の面積を$y=-\dfrac{1}{8}$から$y=0$ まで積分していけば良い。これが，(3)の$V$の表式である。$\displaystyle\int_{-\frac{1}{8}}^{0}(2y-1)\sqrt{8y+1}\,dy$ の積分では，$u=\sqrt{8y+1}$ と変数変換することがポイントである。教科書の例題等にも掲載されているから，練習しておきたい。

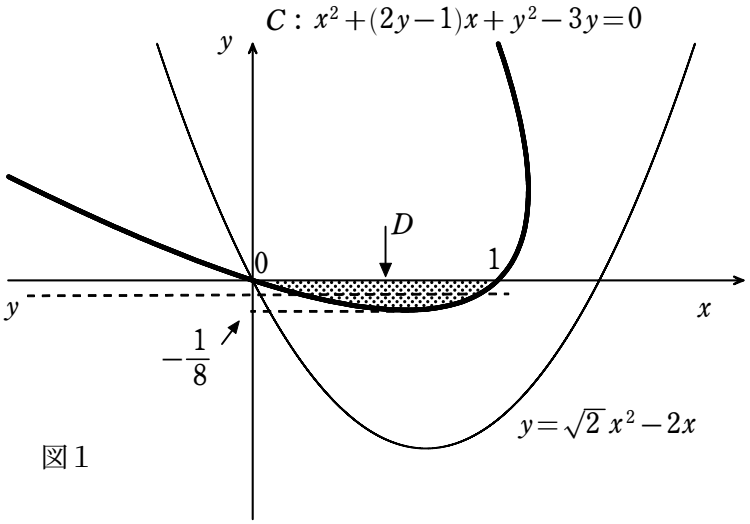


図１

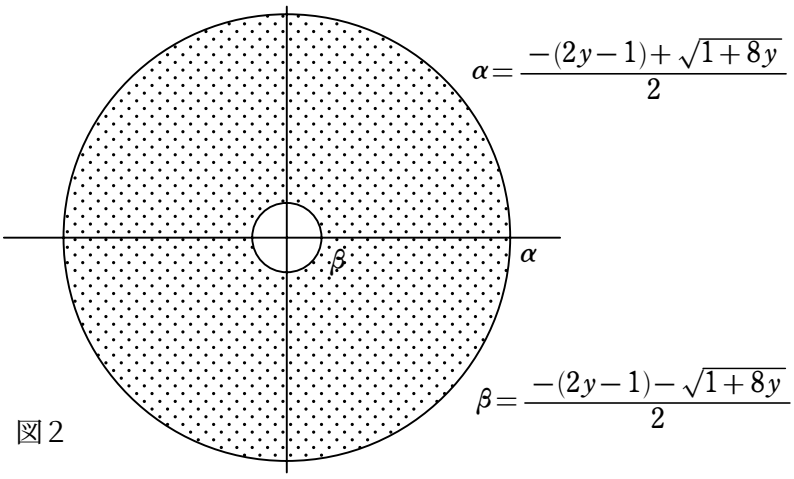


図２

$\boxed{5}$ (60点)

$xy$ 平面上の曲線 $C$：$y=x^3+x^2+1$を考え，$C$ 上の点 $(1,3)$を$P_0$ とする．$k=1,2,3,...$ に対して，点 $P_{k-1}(x_{k-1},y_{k-1})$における $C$ の接線と$C$ の交点のうちで$P_{k-1}$ と異なる点を$P_k(x_k,y_k)$とする．このとき，$P_{k-1}$ と$P_k$ を結ぶ線分と$C$ によって囲まれた部分の面積を$S_k$とする．

(1) $S_1$を求めよ．

(2) $x_k$を$k$ を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$を求めよ．

＜解答＞

(1)

点$P_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$で曲線 $C$ に接し，点$P_k(x_k,\ y_k)$と交わる直線を$L_{k-1}$とする。

$y'=3x^2+2x$，$P_0=(1,3)$だから，$L_0$：$y=5x-2$，

$L_0$と$C$の交点は $5x-2=x^3+x^2+1$から，$(x-1)^2(x+3)=0$，したがって$P_1=(-3,\ -17)$

$$S_1=\int_{-3}^{1}\{(x^3+x^2+1)-(5x-2)\}dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{1}=\frac{64}{3}$$

(2)

点 $P_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$で曲線 $C$ に接し，点 $P_k(x_k,\ y_k)$と交わる直線は$L_{k-1}$は

$y_{k-1}={x_{k-1}}^3+{x_{k-1}}^2+1$，$y'_{k-1}=3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1}$ だから

$L_{k-1}$：$y-y_{k-1}=y'_{k-1}(x-x_{k-1})=(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1})(x-x_{k-1})$

$$y=(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1})(x-x_{k-1})+y_{k-1}=(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1})(x-x_{k-1})+{x_{k-1}}^3+{x_{k-1}}^2+1$$

$$=(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1})x-2{x_{k-1}}^3-{x_{k-1}}^2+1$$

$L_{k-1}$は点$P_k(x_k,\ y_k)$で曲線 $C$ と交わるのだから

$y_k={x_k}^3+{x_k}^2+1=(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1})x_k-2{x_{k-1}}^3-{x_{k-1}}^2+1$

したがって，${x_k}^3+{x_k}^2-(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1})x_k+2{x_{k-1}}^3+{x_{k-1}}^2=0$

$(x_k-x_{k-1})^2(x_k+2x_{k-1}+1)=0$，$\therefore\ x_k=-(2x_{k-1}+1)$

$$x_k+\frac{1}{3}=-2\left(x_{k-1}+\frac{1}{3}\right)=(-2)^2\left(x_{k-2}+\frac{1}{3}\right)=\cdots=(-2)^k\left(x_0+\frac{1}{3}\right)$$

$$x_k=(-2)^k\left(x_0+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=(-2)^{k+2}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\{(-2)^{k+2}-1\}\quad\text{（答）}$$

(3)

(2)から直線$L_{k-1}$は $y=(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1})x-2{x_{k-1}}^3-{x_{k-1}}^2+1$

したがって，$$S_k=\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\{(x^3+x^2+1)-(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1})x+2{x_{k-1}}^3+{x_{k-1}}^2-1\}dx\right|$$

$$=\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx\right|$$

$f(x)=0$は重解$x_{k-1}$ と解$x_k$をもつから，

$f(x)=(x^3+x^2+1)-(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1})x+2{x_{k-1}}^3+{x_{k-1}}^2-1$

$=(x-x_{k-1})^2(x+2x_{k-1}+1)=(x-x_{k-1})^2(x-x_k)$

$X=x-x_{k-1}$とおいて，

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx=\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_{k-1})^2(x-x_k)dx=\int_0^{x_k-x_{k-1}} X^2(X+x_{k-1}-x_k)dX$$

$$=\left[\frac{X^4}{4}+\frac{x_{k-1}-x_k}{3}X^3\right]_0^{x_k-x_{k-1}}=\frac{(x_{k-1}-x_k)^4}{4}-\frac{(x_{k-1}-x_k)^4}{3}=-\frac{1}{12}(x_{k-1}-x_k)^4$$

$x_{k-1}-x_k=\frac{1}{3}\{(-2)^{k+1}-1\}-\frac{1}{3}\{(-2)^{k+2}-1\}=\frac{1}{3}(-2)^{k+1}(1+2)=(-2)^{k+1}$ だから

したがって，$S_k=\frac{1}{12}(x_{k-1}-x_k)^4=\frac{4}{3}2^{4k}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{4k}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{4(n-1)}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{2^4}{15}=\frac{1}{20}$$ （答）

＜解説＞

先ずは図１のようなグラフを大雑把に描いて，問題の全貌を理解しよう。３次関数の微分と積分の問題だが，単純な計算問題ではなく，着想がないと，難しくなってしまう。

(1)

$P_0=(1, 3)$における$C$の接線を求めるのは容易だろう。接線の方程式と$C$の方程式から交点の座標$P_1$を求める。

(2)

(1)と同様に，点 $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$で曲線 $C$ に接し，点 $P_k(x_k, y_k)$と交わる直線は$L_{k-1}$の方程式から，$x_{k-1}$と$x_k$ の関係を求める。数列の一般項を求める問題に帰着する。

(3)

$S_k$の積分表式を求めることに困難はないだろう。$C$ の式と接線の式の差分を$x_{k-1}$ から$x_k$ まで積分すれば良い。この積分計算を単純に実行することでは，煩瑣な経過をたどってしまう。時間がかかり期待するような結果が得られない恐れがある。

ここは，被積分関数＝0の方程式が，重解$x_{k-1}$と解$x_k$をもつことに着眼しよう。すると，被積分関数が因数分解され，積分計算が容易になるばかりでなく，結果として見通しの良い整理された表式が得られる。

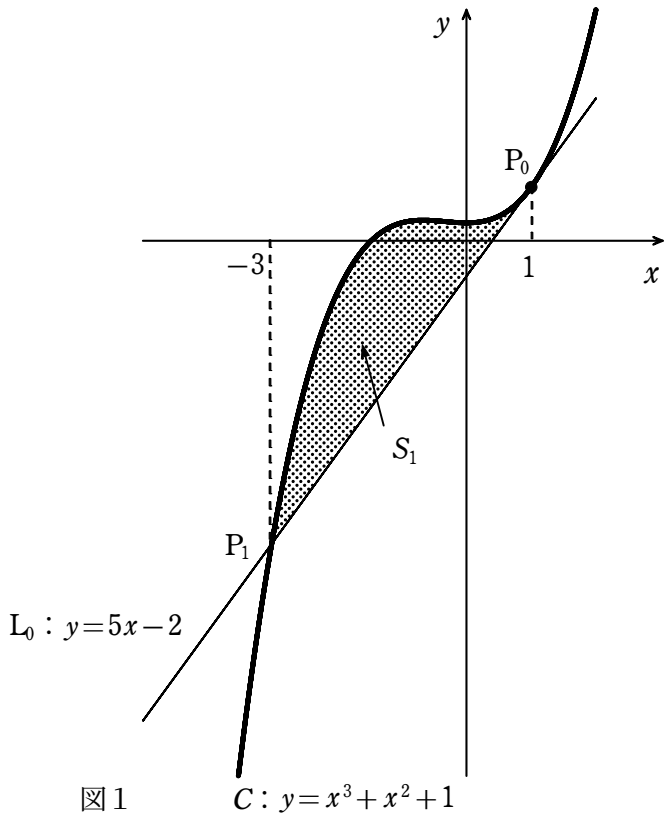


図１

＜総評＞

例年同様，難易度Ｂ以上の問題が揃った。受験者の数学力を試す良問だと思う。受験者の得意分野，習熟分野によって異なるだろうが、筆者なら以下の順序で手をつけたいと思った。１，３，４，５，２の順である。

1 (60点)

整数の問題の解答方針には着想が必要なものが多いが，本問はそれほどの着想を必要としない。連続する３つの整数には2 の倍数と3 の倍数が含まれ，それらの積は6 の倍数となることに気づく必要がある。また数列の和の公式を覚えておく必要もある。完答したい。難易度Ｂ。

2

指数関数の不等式の証明問題で，解答方針に悩むところがある。スマートな方法がないか，考えあぐねると，時間が過ぎてしまう。泥臭くても，導関数の正負と関数の増減関係によって証明しようと決断して取り組めば，完答できなくても部分点をもらえる程度には記載できるだろう。難易度Ａ。

3

行列による１次変換，確率，数列がバランス良く混じった良問である。題意は簡明で，解答方針を模索する必要もない，素直な問題である。完答したい。難易度Ｂ。

4

２次関数の変数を１次変換して得られる２次関数の積分の問題。3 を参考にして，45°回転を実行すると良い。体積を求める断面が２次方程式の解を半径とする同心円であることに着目すると良い。これができれば，解答方針は容易に定まる。難易度Ｂ＋。

5

３次曲線とその接線とで囲まれる図形の面積を求める問題。微分，積分に加えて数列の計算も含む

問題である。(1)はスムーズに正答したい。(2)も解答方針に迷うことはないだろう。は数列の一般項を求めることになる。(3)はとにかく，$S_k$を求める必要がある。$S_k$を積分表式とすることには，困難はない。積分計算を実行する際，単純に計算するのではなく，上手な方法はないか思いを巡らそう。難易度はＡ－。

150418